

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ
РЕСПУБЛИКИ

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Диссертационный совет К 01.19.599

На правах рукописи
УДК 517.928

АБДИЛАЗИЗОВА АКБЕРМЕТ АБДИЖАЛИЛОВНА

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ
СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ
СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук

Ош – 2022

Работа выполнена на кафедре математического анализа Ошского государственного университета

Научный руководитель **Каримов Салы**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа ОшГУ. (Кыргызстан, г.Ош)

Официальные оппоненты: **Аблабеков Бактыбай Сапарбекович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий КНУ им Ж.Баласагына (Кыргызстан, г. Бишкек).

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики ОшТУ имени М.М. Адышева (Кыргызстан, г.Ош).

Ведущая организация: Кыргызско-Российский Славянский университет имени Б. Н. Ельцина, кафедра математических основ дизайна и архитектуры. 720000, Кыргызская Республика, г. Бишкек, ул. Анкара 2А, ауд.307

Защита состоится 10-февраля 2022-года в 13:00 часов на заседании диссертационного совета К 01.19.599 по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете, Жалал-Абадском государственном университете и Институте природных ресурсов Южного отделения НАН Кыргызской Республики по адресу: 723500, г. Ош ул. Ленина, 331, ауд. Идентификационный код онлайн трансляции защиты диссертации: <http://vc.vak/b/k01-wvo-bll-2lm>.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета и на страничке диссертационного совета сайта: www.oshsu.kg.

Автореферат разослан «6» января 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета, к.ф.-м.н., доцент



Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации.

При описании действие реального объекта или течение реального процесса рассматривается их модель. Это часто выражается в виде дифференциальных уравнений, в большинстве случаев они содержат малый параметр. В связи с этим во многих математических моделях используются уравнения содержащие малый параметр. Здесь, основной вопрос заключается в полноте отображения реально происходящего. С математической точки зрения это сводит к рассмотрению вопроса о зависимости решения дифференциальных уравнений от малых параметров.

Пусть даны системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\varepsilon x'(t) &= f(x(t), y(t)), \\ y'(t) &= g(x(t), y(t)),\end{aligned}\tag{a}$$

или

$$\begin{aligned}\varepsilon x'(t) &= f(x(t), y(t), t), \\ y'(t) &= g(x(t), y(t), t),\end{aligned}\tag{b}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $x(t, \varepsilon) \in R^p$, $y(t, \varepsilon) \in R^m$, $t \in [t_0, T] \subset R$.

Системы такого типа встречаются во многих прикладных задачах. Например, в квантовой механике, теории колебаний, теории радиотехнических приборов, теории автоматического регулирования, гидродинамике, электротехнике и других явлениях. Такие системы уравнений называются сингулярно возмущенными.

Начиная с 50-х годов, начались систематические исследования систем вида (a), (b).

Если в (a) формально считать, $\varepsilon = 0$, то получается система

$$\begin{aligned}f(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) &= 0, \\ \bar{y}'(t) &= g(\bar{x}(t), \bar{y}(t)).\end{aligned}\tag{c}$$

Система (c) называется вырожденным или предельным. Предполагается, что вырожденная система (c) в области T^* ($t \in T^*$) имеет решение $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$.

Относительно системы (a), (b) рассматривались различные задачи и проблемы. Мы рассмотрим начальную задачу.

Пусть $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ – решения задачи (a), удовлетворяют начальным условиям

$$\begin{aligned}x(t_0, \varepsilon) &= x_0, \\ y(t_0, \varepsilon) &= y_0.\end{aligned}$$

Ставится вопрос: для каких значений t имеет место предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t)?$$

Это задача впервые в ограниченной области при наложении определенных условий на невозмущенной системе решена А. Н. Тихоновым. В работах А.Б. Васильевой, Ф. Бутузова и других исследовались случаи, когда невозмущенная система (с) имеет несколько решений.

Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко и их ученики исследовали сингулярно возмущенные автономные уравнения, определили процесс релаксационных колебаний.

А.Б.Васильева, М.И.Иманалиев построили разложение решения по малому параметру. В этих работах исследование проводится применением положения равновесия устойчивости.

Первая работа в случае где нарушается условие устойчивости принадлежит М.А. Шишковой. В этой работе исследовано уравнение с помощью аналитического продолжения на некоторую часть комплексной плоскости.

Полученные результаты развиты и обобщались в работах С.Каримова, Г.М. Анарбаевой, К.С. Алыбаева, Д.А. Турсунова, М.А. Азимбаева.

В работах К.Б. Тампагарова и А.Б. Мурзабаевой сингулярно возмущенное уравнение исследовалось не используя условие устойчивости.

В выше указанных работах исследованы уравнения в ограниченной области и когда матрица-коэффициентов при линейной неизвестной вектор-функции имеет простое (некратное) собственное значение, определяющее смены устойчивости.

Анализ результатов известных работ показывает, что задача в бесконечной области, в случае когда собственные значения являются кратными не рассмотрено. Следовательно, исследование этой проблемы является **актуальным** и составляет основное содержание данной работы.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими темами.

Диссертация выполнена по тематике научно-исследовательских работ кафедры математического анализа Ошского государственного университета.

Цель исследования. Исследовать асимптотику решений сингулярно возмущенной системы нелинейных дифференциальных уравнений в особых случаях.

Задачи исследования:

1. Исследовать асимптотику решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений, когда собственные значения, определяющие смены устойчивости, матрицы коэффициентов при линейной неизвестной вектор-функции простые и кратные.
2. Построить асимптотическое разложение в бесконечной полосе.
3. Проверить асимптотическую близость решений сингулярно возмущенной и невозмущенной задач.

Научная новизна работы.

1. Доказывается асимптотическая близость решений сингулярно возмущенной и невозмущенной задачи в бесконечной полосе.

2. Исследовано асимптотическое изменение решений сингулярно возмущенной системы нелинейных дифференциальных уравнений в бесконечной полосе, когда собственные значения простые.

3. Получено асимптотическое разложение решения для сингулярно возмущенной системы 4х нелинейных уравнений в бесконечной полосе, когда собственные значения определяющие условия устойчивости кратные.

Практическая значимость полученных результатов. Работа носит теоретический характер, ее результаты могут служить развитием теории сингулярно возмущенных задач и применены для решения различных прикладных задач. Результаты работы также могут быть использованы при чтении лекции специального курса по теории возмущений при подготовке бакалавров и магистров.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

– Получено асимптотика для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения в бесконечной полосе.

– Получено асимптотическое разложение для сингулярно возмущенной системы нелинейных дифференциальных уравнений в бесконечной полосе, когда собственные значения определяющие условия устойчивости простые. Даны асимптотические оценки полученных разложений.

– Получено асимптотическое разложение решений начальной задачи для сингулярно возмущенной системы 4х нелинейных уравнений в бесконечной полосе, когда собственные значения определяющие условия устойчивости кратные.

Личный вклад автора. Постановка задачи принадлежит научному руководителю профессору С. Каримову, а получение основных результатов осуществлено автором.

В совместных работах с Г. Анарбаевой [6, 8, 12], ей принадлежит обсуждение результатов, а основные результаты получены автором.

Апробация работы. Результаты работы регулярно докладывались и обсуждались:

- на семинарах кафедры математического анализа Ошского государственного университета под названием «Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения» (руководитель семинара д. ф. - м. н., проф. С.Каримов);

- на III конгрессе математиков тюркского мира (Казахстан г.Алма-Ата - 2009г.);

-на региональном научном семинаре математиков юга Кыргызстана “Актуальные проблемы математики и их применения” (2019-2021г.г.) (руководитель: член – корр. НАН КР., профессор Алымкулов К.А.).

Полнота отражения результатов диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 статьях, 8 статей опубликованы в системе

РИНЦ, в рекомендованных НАК при Президенте КР изданиях – 3, 1 статья опубликована в материале международной конференции. Общее количество баллов составляет – 206.

Структура и объем работы.

Работа состоит из оглавления, списка условных обозначений и определений, принятых в работе, введения, четырех глав, разбитых на 11 параграфов, вывода, трех рисунков и списка использованной литературы, содержащего 54 наименований. В конце каждой главы изложены выводы. Нумерация параграфов, формул, теорем - тройная: первая цифра указывает номер главы, вторая – номер параграфа, третий ее порядковый номер. Объем текста составляет 90 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дана краткая предыстория изучаемой задачи и анализ полученных результатов отдельных работ по сингулярно возмущенным уравнениям. Обосновываются актуальность темы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения выносимые на защиту и общая характеристика работы.

Первая глава «ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ПО ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ» состоит из двух параграфов.

В § 1.1. “Общий обзор результатов по теории сингулярно возмущенных уравнений” дается краткий общий обзор сингулярно возмущенных задач.

В § 1.2. “Результаты других исследователей, наиболее близкие к данной работе” приведены результаты других исследователей, наиболее близкие к данной работе.

Вторая глава “АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА” состоит из трех параграфов.

В параграфе 2.1 сформулирована постановка задачи:

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = a(t)x(t, \varepsilon) + h(t), \quad (1)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x_0(\varepsilon). \quad (2)$$

$$H_0 = \{t \in C, t_0 \leq t_1 \leq T_0, -\infty < t_2 < +\infty\},$$

Требуется найти асимптотику решений задачи (1)- (2) в области H_0 .

Пусть выполняются следующие условия:

Ш 2.1. $\operatorname{Re} a(t) < 0$ в полосе $\{t_0 \leq t_1 < a_0 \wedge -\infty < t_2 < +\infty\}$, $a_0 \in (t_0, T_0)$,

$\operatorname{Re} a(t) = 0$ на прямой $\{t_1 = a_0 \wedge -\infty < t_2 < +\infty\}$,

$\operatorname{Re} a(t) > 0$ в полосе $\{a_0 < t_1 \leq T_0 \wedge -\infty < t_2 < +\infty\}$.

Ш.2.2. $\forall t_0 \in H_0, a(t), h(t) \in \Phi(H_0) \wedge \operatorname{Im} a(t) > 0$.

Ш 2.3. $h(t) = \frac{1}{|t|^k}, k > 1$ при $t \rightarrow \infty$.

Обозначим $u(t_1, t_2) = \operatorname{Re} \int_{t_0}^t a(s) ds$.

Во втором параграфе под названием “Особенности задачи”, рассматриваются примеры, которые указывают особенности рассматриваемой задачи.

Пример 1. Пусть $a(t) = 2(t + i), t \in C$.

Определим функцию $A(t) = 2 \int_{-i}^t (\tau + i) d\tau = (t + i)^2$. Рассмотрим линии уровня $\operatorname{Re} A(t) = t_1^2 - (t_2 + 1)^2 = c$. Линия уровня $\operatorname{Re} A(t) = 0$ в точке $(0, -1)$ делит поверхность на 4 части (S_1, S_2, S_3, S_4) (рисунок 1).

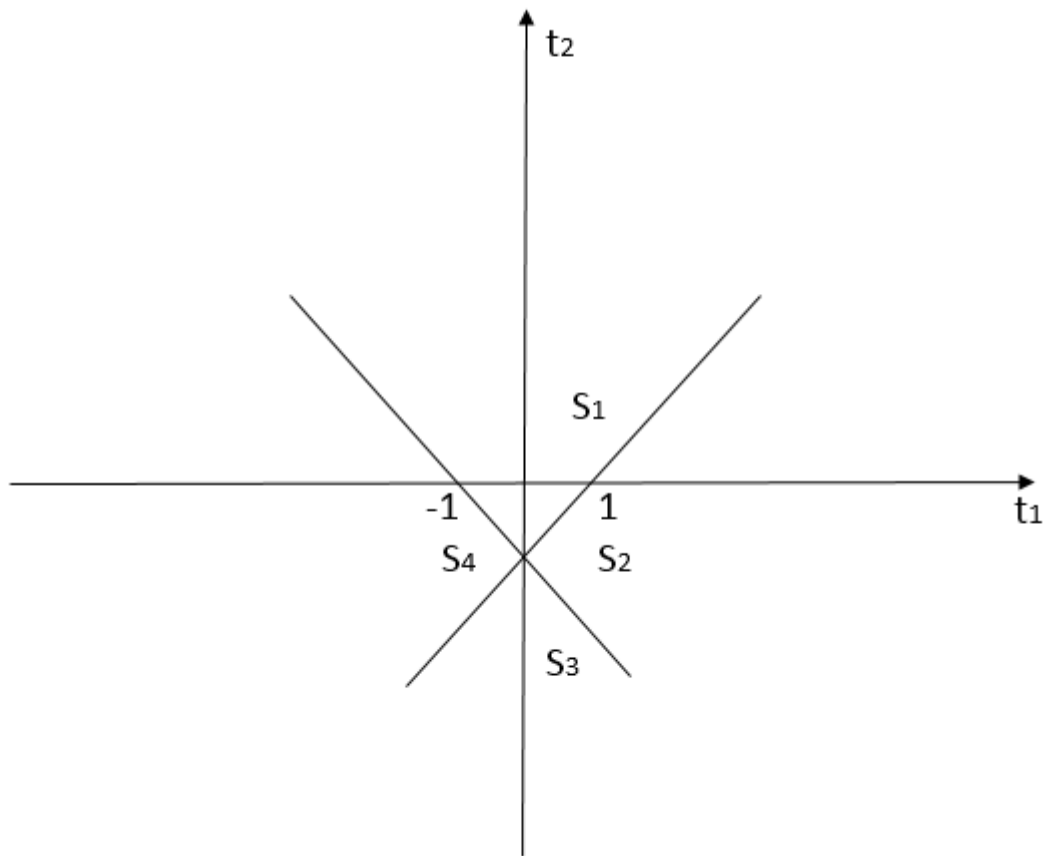


Рисунок 1. Ветви линии уровня

Имеет место

$$t \in (S_1 \cup S_3): \operatorname{Re} A(t) \leq 0, \quad t \in (S_2 \cup S_4): \operatorname{Re} A(t) \geq 0.$$

Тогда для уравнение

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = (t + i)x(t, \varepsilon) + \varepsilon \varphi(t),$$

с начальным условием

$$x(-1, \varepsilon) = x^0,$$

требуется исследовать асимптотическое изменение решения задачи по ε . Из результатов ранних исследований следует, что решение $x(t, \varepsilon)$ на отрезке $[-1, 1]$ ограничено.

Во всех работах посвященных исследованию уравнений, где нарушается условие устойчивости, рассмотрен случай, когда существуют ветви (пересекающиеся) линии уровня соединяющие концы отрезка. В этих случаях не было необходимости рассматривать бесконечную область.

Пример 2. Пусть $a(t) = -e^{-it}$. $a(t) = -\cos t + i \sin t$, рассмотрим отрезок $0 \leq t \leq \pi$ (Рисунок 2).

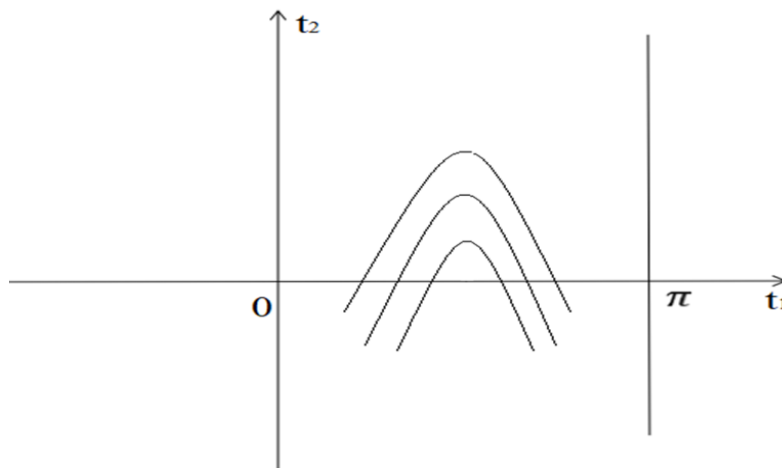


Рисунок 2. Линии уровня ($C > 0$).

Пример 3. Пусть $a(t) = -e^{it}$. Получаем $a(t) = -\cos t - i \sin t$. $\operatorname{Re} a(t)$ на отрезке $0 \leq t \leq \pi$ меняет свой знак от отрицательного на положительный и $\operatorname{Re} a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Пример 4. Если $a(t) = e^{it}$, то $a(t) = \cos t + i \sin t$. Здесь знак $\operatorname{Re} a(t)$ меняется на $[\pi, 2\pi]$.

$$\text{Тогда } A(t) = \int_{\pi}^t e^{i\tau} d\tau = \frac{1}{i} (e^{it} - e^{i\pi}) = \frac{1}{i} (e^{it} + 1).$$

$$\text{Если } t = t_1 + it_2, \text{ тогда } \operatorname{Re} A(t) = \operatorname{Re} \frac{1}{i} (e^{-t_2} (\cos t_1 - i \sin t_1) + 1) = e^{-t_2} \sin t_1,$$

$$u(t_1, t_2) = e^{-t_2} \sin t_1.$$

Линии уровня (C) будут в виде рисунка 3.

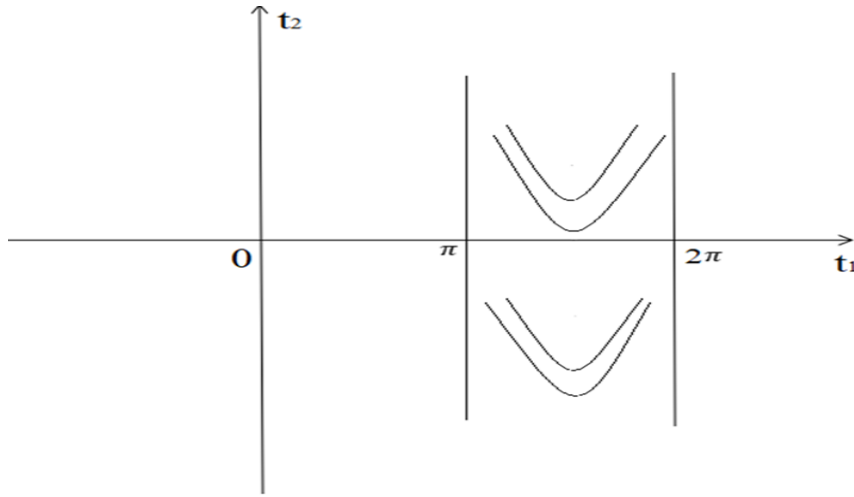


Рисунок 3. Линии уровня ($C < 0$).

В примерах 2-4 точка пересечения линий уровня соединяющие концы отрезка, в случае смены устойчивости для функции $u(t_1, t_2)$, будет бесконечно удаленной точкой перевала бесконечного порядка.

Для получения асимптотической оценки вблизи на правых концах отрезка приходится рассмотреть бесконечную область. Эта одна из особенностей задачи данной работы.

Третий параграф называется “Решение задачи”.

Задача (1)-(2) будет равносильно интегральному уравнению:

$$x(t, \varepsilon) = E(t, t_0, \varepsilon)x_0(\varepsilon) + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon)h(\tau)d\tau,$$

$$\text{где } E(t, t_0, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t a(s)ds\right), \quad E(t, \tau, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t a(s)ds\right).$$

Доказываются следующие леммы:

Лемма 2.3.1. Пусть выполняются условия III 2.1-III 2.2. Тогда линии уровня

$$(C) = \{t \in H_0, u(t_1, t_2) = c - \text{const.}\},$$

полностью покрывают полосу H_0 .

Лемма 2.3.2. Пусть выполняются условия Леммы 2.3.1. Тогда существуют: линия уровня (C_1) соединяющая точки $(t_{01}, 0), (T_1, 0)$, линия уровня (C_2) соединяющая точки $(t_{02}, 0), (T_2, 0)$ и функция $t_2 = \phi(t_1)$ ($t_{01} \leq t_1 \leq T_2$).

Функция $t_2 = \phi(t_1)$ определяется, как решение уравнения

$$u(t_1, t_2) = at_1 + b,$$

$$\text{где } a = \frac{C_1 - C_2}{t_{01} - T_1}, \quad b = \frac{C_2 t_{01} - C_1 T_1}{t_{01} - T_1}.$$

Кривую, определяющую функцию $t_2 = \phi(t_1)$ обозначим через K .

1). В случае когда кривая K определена следующими линиями уровня:

$$C_1 = \frac{1}{2} \varepsilon \ln \varepsilon, C_2 = \varepsilon \ln \varepsilon,$$

область обозначим через $H_1 \subset H_0$. H_1 будет неограниченной.

2). Пусть $C_1 = -\frac{1}{2} \delta$, $C_2 = -\delta$, где $\delta - const$, $0 < \delta \ll 1$, то область обозначается через $H_2 \subset H_0$. В этом случае область также неограничена.

3). Пусть постоянные $C_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon$, $C_2 = -\frac{1}{2} \varepsilon^p$, где $0 < p < 1$, здесь область обозначаем через $H_3 \in H_0$ и область H_3 также неограничена.

Пусть $\tilde{K} = \Delta \cup K$, где $\Delta = \{(t_1, t_2) : t_0 \leq t_1 \leq t_{01}, t_2 = 0\}$.

Когда точки (t_1, t_2) лежат на K , то путь интегрирования определяется так: $l = \bigcup_{k=1}^3 l_k$, где l_1 – отрезок прямой, соединяющий точку $(t_0, 0)$ с точкой $(t_{01}, 0)$, l_2 – отрезок кривой, соединяющий точку $(t_{01}, 0)$ с точкой $(t_1, t_2^* = \tilde{\phi}(t_1, \varepsilon))$, $l_3^{(1)}$ – отрезок прямой, соединяющий точку (t_1, t_2^*) с точкой (t_1, t_2) . Здесь существует единственная точка $(t_1, t_2^* = \phi(t_1))$ для t_1 .

Получена асимптотическая оценка решения поставленной задачи и доказаны следующие теоремы:

Теорема 2.1.1. Пусть выполнены условия III 2.1-III 2.3. Тогда решение задачи (1)- (2) на $\tilde{K} = \Delta \cup H_1$ существует, единственно и справедлива оценка

$$|x(t, \varepsilon)| \leq c \omega(\varepsilon) \frac{1}{1 - c \delta_0(\varepsilon)},$$

где $\delta_0(\varepsilon) = \frac{1}{\ln \varepsilon}$, $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$.

Теорема 2.1.2. Пусть выполнены условия III 2.1-III 2.3. Тогда решение задачи (1)- (2) на $\tilde{K} = \Delta \cup H_2$ существует, единственно и справедлива оценка

$$|x(t, \varepsilon)| \leq c \omega(\varepsilon),$$

где $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$.

Теорема 2.1.3. Пусть выполнены условия III 2.1-III 2.3. Тогда решение задачи (1)- (2) на $\tilde{K} = \Delta \cup H_3$ существует, единственно и справедлива оценка

$$|x(t, \varepsilon)| \leq c \sqrt{\varepsilon}.$$

Глава 3 под названием “Асимптотика решения систем из двух уравнений”, состоит из трех параграфов.

В §3.1 “Постановка задачи” рассматривается задача

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = D(t) x(t, \varepsilon) + \varepsilon [\varphi(t) + B(t) x(t, \varepsilon)] + f(t, x(t, \varepsilon)), \quad (3)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0(\varepsilon), \quad \|x(t_0, \varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad (4)$$

где $t \in H_0 = \{t \in C, t_0 \leq t_1 \leq T_0, -\infty < t_2 < +\infty\}$, $D(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$,
 $B(t) = \left(b_{kj}(t)\right)_1^2$, $\lambda_1(t) = \overline{\lambda_2(\bar{t})}$. Если t вещественное, тогда $\lambda_1(t) = \overline{\lambda_2(t)}$.

Пусть выполняются следующие условия:

Ш 3.1. $\forall t \in H_0$, $D(t) \in \Phi(H_0)$, $B(t) \in \Phi(H_0) \wedge \|B(t)\| = O(1)$ при $t \rightarrow \infty$.

Ш 3.2. $f(t, x) \in \Delta(t, x) = \{t_0 \in H_0, \|x\| < \delta - \text{const} - \text{не зависит от } \varepsilon\}$.

Определим функции $E_k(t, \tau, \varepsilon) = \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t \lambda_k(s) ds$, $k = 1, 2$.

Если обозначим $u(t_1, t_2) = \text{Re} \int_{t_0}^t \lambda_1(s) ds$, тогда $u(t_1, -t_2) = \text{Re} \int_{t_0}^t \lambda_2(s) ds$.

Пусть функции $\text{Re} \lambda_1(t)$, $u(t_1, t_2)$ в области H_0 удовлетворяют следующим условиям:

Ш 3.3. $\text{Re} \lambda_1 < 0$ на полосе $t \in H_{01} = \{t \in H_0, t_0 \leq t_1 < a_0, -\infty < t_2 < +\infty\}$,

$\text{Re} \lambda_1(a_0 + i0) = 0$ на прямой $p = \{t \in H_0, t_1 = a_0, -\infty < t_2 < +\infty\}$,

$\text{Re} \lambda_1 > 0$ на полосе $t \in H_{02} = \{t \in H_0, a_0 < t_1 \leq T_0, -\infty < t_2 < +\infty\}$.

Ш 3.4. $\forall t \in H_0$, $\text{Im} \lambda_1(t) > 0$.

Отсюда следует, что устойчивость положения равновесия системы (3) на интервале $(a_0, T_0]$ не сохраняется.

Ш 3.5. Пусть на прямых $t_1 = t_0$, $t_1 = T_0$ ($-\infty < t_2 < +\infty$) функция $u(t_1, t_2) = 0$.

Лемма 3.1.1. Если выполняются условия Ш 3.3-Ш 3.5, тогда полоса H_0 будет полностью покрыта линиями уровня

$$(C) = \{t \in H_0, u(t_1, t_2) = C - \text{const}\}.$$

При поставленных условиях ставится задача исследования асимптотики решения задачи (3)-(4).

§3.2 “Особенности исследования”

Заменим задачу (3)-(4) на эквивалентное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) = E(t, t_0, \varepsilon) x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) [B(\tau) x(\tau, \varepsilon) + \varphi(\tau)] d\tau + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) g(\tau, x(\tau, \varepsilon)) d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где $E(t, \tau, \varepsilon) = \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t D(s) ds$.

$$x(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1(t, \varepsilon) \\ x_2(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^0(t, \varepsilon) \\ x_2^0(t, \varepsilon) \end{pmatrix} = x^0(t, \varepsilon), \varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix},$$

$$f(t, x(t, \varepsilon)) = \begin{pmatrix} f_1(t, x(t, \varepsilon)) \\ f_2(t, x(t, \varepsilon)) \end{pmatrix},$$

$$E_k(t, \tau, \varepsilon) = \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t \lambda_k(s) ds \right] \quad (k=1, 2).$$

Перепишем (5) в скалярном виде:

$$x_k(t, \varepsilon) = x_k^0(\varepsilon) E_k(t, t_0, \varepsilon) + \int_{t_0}^t E_k(t, \tau, \varepsilon) [\varphi_k(\tau) + P_k(\tau, \varepsilon)] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t E_k(t, \tau, \varepsilon) f_k(\tau, \varepsilon) d\tau, \quad (6)$$

где

$$P_k(t, \varepsilon) = b_{k1}(t)x_1(t, \varepsilon) + b_{k2}(t)x_2(t, \varepsilon), k=1, 2.$$

Систему (6) будем решать методом последовательных приближений.

Основной задачей здесь является доказательство существования решений возмущенной задачи и оценка близости решений возмущенной и невозмущенной задач при $\varepsilon \rightarrow 0$ на промежутке $[t_0, T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)]$ где непрерывная функция $\tilde{\delta}(\varepsilon) \geq 0$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\delta}(\varepsilon) = 0$.

Начиная со второго приближения пути интегрирования выбираются из области H_0 . Пути интегрирования состоят из отрезков гладких кривых или частично гладких кривых.

§3.3 “Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений”.

Для оценки последовательных приближений используем 4-лемму¹.

Пусть $C_1 = \alpha(\varepsilon)$, $C_2 = 2\alpha(\varepsilon)$, тогда область покрытой кривыми K обозначим через $K_0 \in H_0$.

Пусть $C_1 = -\varepsilon^p$, $C_2 = -2\varepsilon^p$, где $0 < p < 1$. В этом случае область обозначим через $H_4 \subset H_0$.

Пусть $C_1 = \varepsilon \ln \varepsilon$, $C_2 = 2\varepsilon \ln \varepsilon$, тогда область обозначим через $H_5 \subset H_0$.

Пусть $\tilde{K} = \Delta \cup K$, где $\Delta = \{(t_1, t_2) : t_0 \leq t_1 \leq t_{01}, t_2 = 0\}$. Оценка $x(t, \varepsilon)$ проводится для точки области \tilde{K} . Здесь путь интегрирования l зависит от того, какому множеству принадлежат точки (t_1, t_2) .

¹ **Алыбаев, К.С.** Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. [Текст] / К.С. Алыбаев // Дисс. ... д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2001. – 204 с.

Выберем пути интегрирования. Пусть кривая которая $(t_1, t_2) \in K$ состоит из $l = \bigcup_{k=1}^3 l_k$, где l_1 - отрезок прямой, соединяющий точку $(t_0, 0)$ с точкой $(t_{01}, 0)$, l_2 - отрезок кривой, соединяющий точки $(t_{01}, 0)$ и $(t_1, t_2^* = \tilde{\phi}(t_1))$, l_3 - отрезок прямой, соединяющий точку (t_1, t_2^*) с точкой (t_1, t_2) . Заметим, что если $(t_1, t_2) \in K$, то на кривой K_0 , при любом t_1 найдется единственная точка $(t_1, t_2^* = \phi(t_1))$.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 3.3.1. Пусть выполнены условия Ш 3.1-Ш 3.5. Тогда решение задачи (3)-(4) представимое в виде $x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t, \varepsilon)$ на K существует, единственно и справедлива оценка

$$|x^{(n)}(t, \varepsilon)| \leq (c \cdot \varepsilon)^n.$$

Теорема 3.3.2. Пусть выполнены условия Ш 3.1-Ш 3.5. Тогда решение задачи (3)-(4) представимое в виде $x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t, \varepsilon)$ на H_4 существует, единственно и справедлива оценка

$$|x^{(n)}(t, \varepsilon)| \leq (c \cdot \varepsilon^{1-p})^n.$$

Теорема 3.3.3. Пусть выполнены условия Ш 3.1-Ш 3.5. Тогда решение задачи (3)-(4) представимое в виде $x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t, \varepsilon)$ на H_5 существует, единственно и справедлива оценка

$$|x_k^{(n)}(t, \varepsilon)| \leq (c \cdot \delta_0(\varepsilon))^n,$$

где $0 < c - const$, $\delta_0(\varepsilon) = \frac{1}{|\ln \varepsilon|}$.

Четвертая глава "Асимптотика решения системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений", посвящена случаю, когда собственные значения, определяющие смену устойчивости кратные.

Четвертая глава состоит из трех параграфов.

В § 4.1. Приводятся вводные замечания, постановка задачи и формулировка основной теоремы.

Рассматривается задача

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = D(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon f(t, x(t, \varepsilon)), \quad (7)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \quad (8)$$

где $x^0 - const$, $D(t)$ – заданная матрица размера 4×4 ,

$f(t, x(t, \varepsilon)) = colon(f_1(t, x(t, \varepsilon)), f_2(t, x(t, \varepsilon)), f_3(t, x(t, \varepsilon)), f_4(t, x(t, \varepsilon)))$ – известная величина.

Пусть выполняются следующие условия:

Ш 4.1. $\forall t \in H_0$, $D(t)$ имеет собственные значения $\lambda_k(t)$, $k=1,2,3,4$ и жорданову форму $D(t) = \{D_1(t), D_2(t), D_3(t), D_4(t)\}$ ($D(t) \in \Phi(H_0)$).

Ш 4.2. $f(t, x) \in \Phi(\Delta(t, x))$, $\Delta(t, x) = \{t_0 \in H_0, \|x\| < \delta - \text{const не зависит от } \varepsilon\}$.

Ш 4.3. $\lambda_k(t) \in \Phi(H_0)$ и $\lambda_1(t) = \overline{\lambda_2(\bar{t})}$, $\lambda_1(t) = \lambda_3(t)$, $\lambda_2(t) = \lambda_4(t)$.

Функции $\text{Re } \lambda_1(t), u(t_1, t_2)$ в области H_0 удовлетворяют следующим условиям:

Ш 4.4. $\text{Re } \lambda_1 < 0$ на полосе $t \in H_{01} = \{t \in H_0, t_0 \leq t_1 < a_0, -\infty < t_2 < +\infty\}$,

$\text{Re } \lambda_1(a_0 + i0) = 0$ на прямой $p = \{t \in H_0, t_1 = a_0, -\infty < t_2 < +\infty\}$,

$\text{Re } \lambda_1 > 0$ на полосе $t \in H_{02} = \{t \in H_0, a_0 < t_1 \leq T_0, -\infty < t_2 < +\infty\}$

Ш 4.5. $\forall t \in H_0, \text{Im } \lambda_1(t) > 0$.

Ш 4.6. $u(t_1, t_2) = 0$ на прямых $t_1 = t_0$ и $t_1 = T_0, -\infty < t_2 < +\infty$.

Требуется найти асимптотику решения задачи (7)-(8) при выполнении этих условий.

Доказывается следующая теорема:

Теорема 4.1.1. Пусть выполнены условия Ш 4.1-Ш 4.6. Тогда для задачи (7)-(8) при $t_0 \leq t \leq T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)$ существует единственное решение и для него справедлива оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon,$$

где $c > 0$ – постоянное не зависящее от t и от ε , непрерывная функция $\tilde{\delta}(\varepsilon) \geq 0$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\delta}(\varepsilon) = 0$.

Задачу (7), (8) сводим к интегральному уравнению и будем методом последовательных приближений проводить оценивание.

В § 4.2 приводятся оценки первых приближений.

Для $(t_1, t_2) \in \bar{K}$ получена оценка

$$|x^{(1)}(t, \varepsilon)| = O(\varepsilon),$$

где $x^{(1)}(t, \varepsilon) = \text{colon}(x_1^{(1)}(t, \varepsilon), x_2^{(1)}(t, \varepsilon), x_3^{(1)}(t, \varepsilon), x_4^{(1)}(t, \varepsilon))$.

Если $(t_1, t_2) \in \bar{K}$, то $l_1 = \bigcup_{k=1}^3 l_k^{(1)}$, где $l_1^{(1)}$ – отрезок прямой, соединяющий точку $(t_0, 0)$ с точкой $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0)$, $l_2^{(1)}$ – отрезок кривой (\bar{C}) , соединяющий точку $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0)$ с точкой $(t_1, t_2^* = \tilde{\varphi}(t_1, \varepsilon))$, $l_3^{(1)}$ – отрезок прямой, соединяющий точку (t_1, t_2^*) с точкой (t_1, t_2)

§4.3. “Сходимость последовательных приближений”.

Последовательные приближения $x^{(n)}(t, \varepsilon)$ с начальным условием (3.1.2*) определяются:

$$\varepsilon x'^{(n)}(t, \varepsilon) = D(t)x^{(n)}(t, \varepsilon) + \varepsilon f(t, x^{(n-1)}(t, \varepsilon)) \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$x_k^{(0)}(t_0, \varepsilon) = x_k^0(\varepsilon), \quad x_k^0(\varepsilon) - \text{const}, \quad k = \overline{1, 4}.$$

Скалярная форма этой системы имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon x_1'^{(n)} = \lambda_1(t)x_1^{(n)} + \varepsilon f_1(t, x_1^{(n-1)}), \\ \varepsilon x_2'^{(n)} = \eta x_1^{(n)} + \lambda_2(t)x_2^{(n)} + \varepsilon f_2(t, x_2^{(n-1)}), \\ \varepsilon x_3'^{(n)} = \eta x_2^{(n)} + \lambda_3(t)x_3^{(n)} + \varepsilon f_3(t, x_3^{(n-1)}), \\ \varepsilon x_4'^{(n)} = \eta x_3^{(n)} + \lambda_4(t)x_4^{(n)} + \varepsilon f_4(t, x_4^{(n-1)}). \end{cases}$$

Для $n=2$ справедлива оценки

$$\begin{aligned} |x_1^{(2)}(t, \varepsilon)| &\leq c \cdot \varepsilon (1 + c\varepsilon), \\ |x_2^{(2)}(t, \varepsilon) - x_2^{(1)}(t, \varepsilon)| &\leq (c\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} |x_3^{(2)}(t, \varepsilon) - x_3^{(1)}(t, \varepsilon)| &\leq (c\varepsilon)^2, \\ |x_4^{(2)}(t, \varepsilon) - x_4^{(1)}(t, \varepsilon)| &\leq (c\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Остальные приближения определяются с применением метода математической индукции.

Таким образом на отрезке $t_0 \leq t \leq T_0 - \tilde{\delta}(\varepsilon)$

$$\|x^{(n)}(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon, \quad c - \text{const}.$$

Теорема 4.1.1 полностью доказана.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе на бесконечной полосе построено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, нелинейных систем из двух уравнений первого порядка и систем четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, когда матрицы коэффициентов при линейной неизвестной вектор-функции имеют кратных собственных значений. Для асимптотического разложения соответственно получено равномерные асимптотические оценки.

В примерах показаны особенность задачи.

Отмечено, что точка пересечения линий уровня соединяющие концы отрезка в случае смены устойчивости для функции $u(t_1, t_2)$, будет бесконечно удаленной точкой перевала бесконечного порядка

Когда собственные значения матрицы $D(t)$ не имеют нулей на бесконечной области, решении оценим с помощью метода последовательных приближений. Отмечено, что при изменении t собственные значения меняют

свой знак, тогда появляется трудность доказать сходимость последовательности $\{x^{(n)}(t, \varepsilon)\}$.

Определено, что оценка последовательных приближений связано с выбором пути интегрирования.

С выше изложенными особенностями доказано единственность решения и построена асимптотика.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Абдилазизова, А.А.** Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости [Текст] / С. Каримов, А.А. Абдилазизова // Журнал «Естественные и технические науки». – Москва, 2007. – №4. – С. 13-16.
2. **Абдилазизова, А. А.** Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости (случай, когда собственные значения имеют нули на границе области) [Текст] / С. Каримов, А.А. Абдилазизова // Вестник ОшГУ. – Ош, 2007. – №2. – С. 130-135.
3. **Абдилазизова, А. А.** Асимптотические оценки решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае (случай, когда $\lambda_1(t) = (t+i)^r$, $\lambda_2(t) = (t-i)^r$, $r = 4m, m \in \mathbb{N}$) [Текст] / А.А. Абдилазизова // Вестник ОшГУ. – Ош, 2009. – №6. – С. 151-156.
4. **Абдилазизова, А.А.** Асимптотические оценки решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае (случай, когда $\lambda_1(t) = (t+i)^r$, $\lambda_2(t) = (t-i)^r$, $r = 4m+1, m = 0, 1, \dots$) [Текст] / А.А. Абдилазизова // Вестник ОшГУ. – Ош, 2009. – №6. – С. 156-160.
5. **Абдилазизова, А.А.** Более точные оценки решения сингулярно возмущенной задачи [Текст] / С. Каримов, Г.М. Анарбаева, А. Абдилазизова // Вестник ОшГУ. – Ош, 2016. – № 4, – С. 50-59.
6. **Абдилазизова, А.А.** Асимптотические оценки решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае [Текст] / С. Каримов, А.А. Абдилазизова // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2019, – № 6. – С. 9-16.
7. **Абдилазизова, А.А.** Исследование решение сингулярно возмущенной задачи в неограниченном области. [Текст] / Г.М. Анарбаева, А.А. Абдилазизова // Математические методы в технике и технологиях. – Москва, 2020. – Т. 12-3. – С. 7-11.
8. **Абдилазизова, А.А.** Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае смены устойчивости [Текст] / А.А. Абдилазизова // Евразийское Научное Объединение. – Москва, 2021. – № 7-1 (77). – С. 1-3.
9. **Абдилазизова, А.А.** Асимптотические поведения решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае смены

устойчивости. [Текст] / С. Каримов, А.А. Абдилазизова // Евразийское Научное Объединение. – Москва, 2021. – № 7-1 (77). – С. 15-19.

10. **Абдилазизова, А.А.** Чектелбеген аймакта сызыктуу эмес маселенин өзгөчө учурдагы асимптотикалык баасы [Текст] / А.А. Абдилазизова // ОшМУнун жарчысы. – Ош, 2021. – 3-том. – Б. 4-9

11. **Абдилазизова, А.А.** Сингулярдык козголгон теңдемелер системасынын чечиминин асимптотикалык тартибине нөлдөрдүн жана уюлдардын таасири [Текст] / С. Каримов, А.А. Абдилазизова // ОшМУнун жарчысы. – Ош, 2021. – 3-том. – Б. 49-54.

12. **Abdilazizova, A.A.** Behavior of the solution of singular perturbed system of differential equations in particularly critical case [Text] / S. Karimov, G.M. Anarbaeva, A.A. Abdilazizova, // Al-Farabi Kazakh NU. – 2009. Reports. – V1. – P. 337-343.

РЕЗЮМЕ

диссертации Абдилазизовой Акбермет Абдижалиловны на тему:
«Асимптотика решений сингулярно возмущенной системы
дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости» на
соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по
специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

Ключевые слова: малый параметр, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенное уравнение и система уравнений, собственные значения, неограниченная область, линия уровня, асимптотика решения.

Объект исследования: сингулярно возмущенное линейное уравнение и системы нелинейных дифференциальных уравнений, когда собственные значения определяющие смены устойчивости простые и кратные, неограниченная область.

Цель работы. Исследовать асимптотику решения сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в особых случаях.

Методы исследования: асимптотический, последовательные приближения, линии уровня, интегрирования по частям и математическая индукция.

Полученные результаты и их новизна. Доказано асимптотическая близость решения сингулярно возмущенной и невозмущенной задачи в бесконечной полосе, получено асимптотические оценки для решения сингулярно возмущенной системы нелинейных дифференциальных уравнений, когда собственные значения (матрица - коэффициентов при линейных неизвестных функциях) простые и кратные.

Степень использования или рекомендации по использованию. Результаты могут быть применены для решения различных прикладных задач, также могут быть использованы при чтении лекционных курсов по теории сингулярных возмущений и специального курса при подготовке бакалавров и магистров.

Абдилазизова Акбермет Абдижалиловнанын «Туруктуулук шарты бузулган учурда сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер системасынын чечиминин асимптотикасы» деген темадагы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: кичине параметр, асимптотикалык ажыратылыш, сингулярдык козголгон теңдемелер жана теңдемелер системасы, өздүк маанилер, чектелбеген аймак, деңгээл сызык, чечимдин асимптотикасы.

Изилдөөнүн объектиси: сингулярдык козголгон сызыктуу теңдеме жана сызыктуу эмес теңдемелердин системалары туруктуулук шартын аныктоочу (белгисиз сызыктуу вектор-функциянын матрица-коэффициентинин) өздүк маанилери жөнөкөй жана эселүү, чектелбеген аймак.

Жумуштун максаты. Сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер системасынын чечимдеринин асимптотикасын өзгөчө учурларда изилдөө.

Изилдөөнүн жалпы ыкмалары: Асимптотикалык, удаалаш жакындашуулар, деңгээл сызыктар, бөлүктөп интегралдоо, математикалык индукция.

Иштин илимий жаңылыгы: Сингулярдык козголгон жана козголбогон маселелердин чечимдеринин асимптотикалык жакындыгы чексиз тилкеде далилденди, сингулярдык козголгон сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелер системасынын туруктуулук шартын аныктоочу өздүк маанилери (белгисиз сызыктуу вектор-функциянын матрица-коэффициенти) жөнөкөй жана эселүү болгон учурларда чечимдин асимптотикалык баалоосу алынды.

Алынган натыйжалардын практикалык маанилүүлүгү. Диссертациянын жыйынтыктары түрдүү колдонмо маселерди чечүүдө колдонулушу мүмкүн. Изилдөөнүн жыйынтыктарын магистрлерди жана бакалаврларды даярдоонун атайын курстарында, сингулярдык козголуулар теориясы боюнча лекцияларды окууда колдонсо болот.

SUMMARY

dissertation by Abdilazizova Akbermet Abdizhalilovna on topic:
"Asymptotics of a singularly perturbed system solutions of differential equations in case of change in stability" for degree of candidate in physical – mathematical sciences, specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control.

Keywords: small parameter, asymptotic expansion, singularly perturbed equation and system of equations, eigenvalues, unbounded domain, level line, solution asymptotics.

Research object: a singularly perturbed linear equation and systems of nonlinear differential equations, when the eigenvalues determining the changes in stability are simple and multiple, an unbounded domain.

Research purpose: Investigate the asymptotics of the solution of singularly perturbed systems of differential equations in special cases.

Research methods: asymptotic, successive approximations, level lines, integration by parts and mathematical induction.

Research results and their novelty. The asymptotic proximity of a singularly perturbed solution and unperturbed problem in infinite strip is proved, asymptotic estimates are obtained for a singularly perturbed system solution in nonlinear differential equations, when eigenvalues (coefficients matrix at linear unknown functions) are simple and multiple.

Application level or recommendations for use. Results can be used in solving of various applied problems, and can also be used in lecturing courses on the singular perturbations theory and in a special course for preparation of bachelors and masters.

Обозначения, определения и сокращенные записи

\forall – квантор общности;

\exists – квантор существования;

\in – знак принадлежности; \notin – знак не принадлежности;

\subset – знак вложения; \cup – знак объединения; \cap – знак пересечения;

\vee – связка или, \wedge – связка и.

Z, R, C – соответственно множества целых, действительных и комплексных чисел.

ε – малый параметр, $\varepsilon > 0$.

t – независимая переменная, если $t \in C$, то $t = t_1 + it_2$, где t_1, t_2 – действительные переменные, $i = \sqrt{-1}$.

$diag(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ – диагональная матрица; $colon(f_1(t), f_2(t))$ – вектор столбец.

$[t_0, T_0]$ – отрезок действительной оси, $t_0 < T_0$.

$\Phi(H_0)$ – пространство аналитических функции на H_0 , $H_0 \subset C$.

Определение 1. Если в сингулярно возмущенном обыкновенном уравнении (системе), функция (матрицы коэффициентов) при линейной неизвестной функции (вектор-функции) имеют простые и кратные собственные значения, у которых действительная часть меняет знаки с отрицательных на положительные и рассматриваемая область неограничена, то такие случаи назовем особыми.

Определение 2. Если $\operatorname{Re} \lambda(t) < 0$ ($\lambda(t)$ – собственное значение функции или матрицы) в интервале $[t_0, T')$, тогда интервал $[t_0, T')$ называется устойчивым, если $\operatorname{Re} \lambda(t) > 0$ на интервале $(T', T_0]$, то интервал $(T', T_0]$ называется неустойчивым.

Сингулярно возмущенное уравнение (система) сокращенно пишем уравнение (система).

Подписано в печать: ____ 2022
Объем: 1,5 п.л. Заказ № ____
Формат 60х90 1/16. Тираж 120 экз.

Редакционно-издательский отдел “Билим” ОшГУ
г. Ош, ул. Ленина, 331.

