

**Национальная академия наук Кыргызской Республики**

**Институт машиноведения и автоматики**

**Кыргызско-Российский славянский университет  
им. Б.Н. Ельцина**

**Диссертационный совет Д 05.21.631**

На правах рукописи  
УДК: 517.91:510.5(575.2)(043.3)

**Анищенко Юлия Владимировна**

**Разработка моделей и численных алгоритмов решения задач геоэлектрики на  
основе конечно-разностного регуляризованного метода**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**Автореферат**

**диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук**

**Бишкек – 2021**

**Работа выполнена в Ошском технологическом университете имени академика М.М. Адышева на кафедре «Информационные технологии и управление»**

**Научный руководитель:** **Сатыбаев Абдуганы Джунусович**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
«Информационные технологии и управление»  
ОшТУ имени академика М.М.Адышева

**Официальные оппоненты:** **Бакиров Калыс Берикович**  
доктор технических наук, доцент, профессор  
кафедры «РГФТТРМПИ» Института Горных  
Дел и Горных Технологий им. У. Асаналиева

**Раматов Кубаныч Садинович**  
кандидат технических наук, доцент кафедры  
«ПОКС» Кыргызского государственного  
технического университета им. И. Раззакова

**Ведущая организация:** **Кыргызский государственный университет  
строительства, транспорта и архитектуры  
им. Н. Исанова, Институт новых  
информационных технологий, г. Бишкек,  
720020, ул. Малдыбаева 34Б**

Защита состоится 19 ноября 2021 года в 13:00 часов на заседании диссертационного совета Д 05.21.631 при Институте машиноведения и автоматики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызско-Российском Славянском университете им. Б.Н. Ельцина по адресу: 720071, г. Бишкек, пр. Чуй, 265, ауд. 346.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Национальной академии наук Кыргызской Республики по адресу: 720071, г. Бишкек, пр. Чуй, 265 и Кыргызско-Российского Славянского университета им. Б.Н. Ельцина по адресу: 720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44 и на сайте Института машиноведения и автоматики Национальной академии наук Кыргызской Республики по адресу: [www.iait.kg](http://www.iait.kg). E-mail: [diss\\_ima@mail.ru](mailto:diss_ima@mail.ru).

Автореферат разослан 18 октября 2021 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета к.ф.-м.н., с.н.с.

Керимкулова Г.К.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы диссертации.** Диссертационная работа посвящена разработке и обоснованию численного метода и алгоритма решения обратных коэффициентных задач уравнения геоэлектрики. Такие задачи относятся к некорректным задачам математической физики, теория которых основана В.К. Ивановым, М.М. Лаврентьевым, А.Н. Тихоновым.

Определение коэффициентов обратных задач уравнения геоэлектрики имеет широкое распространение при интерпретации геофизических данных, где часто требуется определить свойства среды или расположенных на некоторой глубине включений с помощью дополнительной информации, которую можно получить путем измерения на поверхности волн, отраженных от неоднородностей среды. Распространение этих волн описывается уравнением в частных производных, а свойства среды и параметры объекта описываются коэффициентами этого уравнения, в случае уравнения геоэлектрики – проводимостью среды, магнитной и диэлектрической проницаемостями.

Задача, рассматриваемая в диссертационной работе, относится к обратным гиперболическим задачам динамического типа. В таких задачах дополнительной информацией является след решения прямой задачи на некоторой времениподобной поверхности. Подобного рода задачи были исследованы в работах М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, А.С. Алексеева, А.С. Благовещенского, С.И. Кабанихина, Т.П. Пухначевой, С.П. Шишатского и др. Из более новых работ, можно отметить М.А. Шишленина и Н.С. Новикова. В нашей республике вклад в этом направлении внесли А.Дж. Сатыбаев, А.Т. Маматкасымова.

Так как решение обратных задач достаточно трудоемкий процесс, во-первых это их некорректность, во-вторых неустойчивость по отношению к ошибкам измерения, в-третьих они зачастую являются нелинейными, поэтому создание и обоснование численных методов решения обратных и некорректных задач является актуальной задачей, в силу практической важности и необходимости создания эффективных алгоритмов решения.

**Связь темы диссертации с приоритетными научными направлениями, крупными научными программами (проектами), основными научно-исследовательскими работами, проводимыми образовательными и научными учреждениями.** Работа является инициативной.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является исследование модернизированной математической модели прямой и обратной задач геоэлектрики, разработка, обоснование алгоритма численного метода решения прямой и обратной задач геоэлектрики на основе конечно-разностного регуляризованного метода, а также его компьютерная реализация.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Исследовать корректность прямой задачи геоэлектрики, т.е. обосновать существование, единственность и устойчивость поставленной прямой задачи уравнения геоэлектрики.
2. Разработать конечно-разностный метод определения магнитной проницаемости в обратной задаче уравнения геоэлектрики с мгновенным и шнуровым источниками.
3. Создать конечно-разностный регуляризованный метод определения электропроводимости среды, магнитной или диэлектрической проницаемости в обратной задаче уравнения геоэлектрики.
4. Разработать численные алгоритмы решения прямой и обратной задач уравнения геоэлектрики на основе вышеуказанных методов.
5. Составить комплекс программ на основе разработанных алгоритмов решения.

**Научная новизна полученных результатов.** Исследована математическая модель прямой и обратной задач геоэлектрики с мгновенным и шнуровым источниками, которые имеют существование в практических приложениях.

Обоснована корректность прямой задачи геоэлектрики, установлена ее устойчивость конечно-разностным методом.

Разработан конечно-разностный регуляризованный метод решения обратной задачи, в котором необходимо было определить или  $\sigma$  - электропроводимость среды, или  $\varepsilon$  - диэлектрическую проницаемость, или  $\mu$  - магнитную проницаемость.

Разработан численный алгоритм и компьютерная реализация задач геоэлектрики на основе вышеуказанных методов.

**Практическая значимость, полученных результатов.** Практическая значимость заключается в разработке новых алгоритмов решения задач геоэлектрики, в возможности применения разработанных алгоритмов и программ в моделировании и решении геофизических задач.

Полученные результаты в настоящее время используются в учебном процессе Ошского технологического университета на факультете кибернетики и информационных технологий.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту:**

1. Математические модели одномерной, двумерной прямой и одномерной обратной задач геоэлектрики с мгновенным и шнуровым источниками.
2. Теоремы существования, единственности и теоремы условной устойчивости решения двумерной прямой задачи уравнения геоэлектрики.
3. Теоремы сходимости конечно-разностного решения, конечно-разностного регуляризованного решения для одномерных обратных задач уравнения геоэлектрики.

4. Численные алгоритмы решения, разработанные на основе конечно-разностного регуляризованного метода и программная реализация прямых и обратных задач уравнения геоэлектрики.
5. Результаты решения, полученные в виде графиков, анализа решения.

**Личный вклад соискателя.** Все полученные результаты диссертации являются новыми и установлены автором. Автором доказана возможность комбинированного использования метода выпрямления характеристики, метода выделения особенностей, метода конечных разностей для решения прямой задачи и конечно-разностного регуляризованного метода для решения обратных задач уравнения геоэлектрики.

В совместных работах с научным руководителем А.Дж. Сатыбаевым общая идея, формулировка постановки задачи предложены научным руководителем, а математические выкладки, обоснования численных решений и компьютерная реализация прямой и обратной задач для уравнения геоэлектрики изложены Ю.В. Анищенко. При получении результатов научного исследования были опубликованы статьи с А.Ж. Кокзовой, А.Т. Маматкасымовой, Г.А. Калдыбаевой, А.А. Алимкановым, М.Ж. Жанибековым. Письменное согласие соавторов на использование результатов прилагаются в документации.

**Апробации результатов диссертации.** Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на международных конференциях:

- Восьмая международная молодежная научная школа-конференция "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач", Новосибирск, 01–07 сентября 2016 г.;
- Международная конференция "Информационные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании", посвященной 75-летию академика А. Жайнакова, Бишкек 6–8 октября 2016 г.;
- В рамках «Марчуковских научных чтений» международная конференция «Вычислительная и прикладная математика 2017» (ВПМ 2017), Новосибирск, 25 июня–30 июня 2017 г.;
- Девятая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», посвященной 85-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева, Новосибирск, 26 июня – 2 июля 2017 г.;
- Математика в современном мире. Международная конференция, посвященная 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева. Новосибирск, 14-19 августа 2017 г.;
- Международная конференция "International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018)". 6 – 9 сентября 2018 г. турецкий Кипр: Lefkosa (Nicosia), Mersin 10, Turkey;

- International Conference «INVERSE PROBLEMS IN FINANCE, Economics AND LIFE SCIENCES», Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, December 26-28, 2017 г.

**Полнота отражения результатов диссертации в публикациях.** Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 15 научных работах, из них 8 в журналах, рекомендованных ВАК КР; 1 в материалах международной научной конференции; 1 в зарубежном периодическом издании; 2 в журналах, зарегистрированных в системе Scopus и Web of Science; 1 в журнале Республики Казахстан, индексируемом КазБЦ (Казахстанская база цитирования) и рекомендованным ККСОН (Комитет по контролю в сфере образования и науки); в 2 авторских свидетельствах Кыргызпатента на созданные программы.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из оглавления, введения, пяти глав, которые разбиты на разделы и заключений по главам, вывода, практических рекомендаций, списка использованной литературы из 88 наименований и 5 приложений. Основное содержание диссертации изложено на 147 страницах.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору А.Дж. Сатыбаеву за постановки задач, идею в исследовании метода, за советы и обсуждения на этапах формирования данной диссертации, а также за постоянное внимание к работе.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, формулируется цель и задачи, изложена научная новизна, практическая значимость результатов исследований и положения, выносимые на защиту, указана полнота отражения результатов, структура и объем диссертации.

**В I главе** «Обзор литературы» приводится обзор литературы по теме диссертационной работы.

Первые постановки задач, которая исследуется в диссертационной работе, были исследованы и сформулированы М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым, А. С. Алексеевым, А. С. Благовещенским. А развитая В.Г. Романовым методика доказательства локальных теорем существования и единственности решения обратных динамических задач, а также теорем единственности и условной устойчивости в «целом» применяется в исследовании широкого круга обратных задач С.И. Кабанихиным, и их учениками. Новые результаты имеются в работах М.А. Шишленина, Н.С. Новикова. В данной области следует отметить работы отечественных ученых А.Дж. Сатыбаева, Г.А. Калдыбаевой, А.Т. Маматкасымовой.

Таким образом, в данной главе изложены результаты исследования обратных задач гиперболических уравнений динамического типа, подобных задаче рассматриваемой в диссертационной работе. Дано обоснование метода, применяемого автором для численного решения задачи.

Во **II главе** «Материал и методы исследования» представлены материалы и методы, используемые в решении поставленных задач.

**Объект исследования.** Объектом исследования в данной диссертационной работе являются различные постановки обратных задач геоэлектрики.

**Предмет исследования.** Предметом исследования в данной диссертационной работе являются математическая модель задач геоэлектрики, численный метод решения, а именно конечно-разностный регуляризованный, алгоритм решения, а также программные комплексы и их функциональность.

**Методы исследования.** Методами исследования в данной диссертационной работе являются метод выпрямления характеристик, метод выделения особенностей, конечно-разностный метод и конечно-разностный регуляризованный метод, математическое моделирование, а также современные языки программирования для создания интерфейса программы.

С третьей по пятую главы посвящены результатам собственных исследований и их обоснованию.

В **III главе** исследована корректность двумерной прямой задачи геоэлектрики, доказаны теоремы существования и единственности решения уравнения геоэлектрики, а также единственность решения задачи волнового процесса. Построен конечно-разностный аналог дифференциальной задачи:

$$\left. \begin{aligned} & \bar{\varepsilon}(z, y) \bar{\mu}(z, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \bar{\sigma}(z, y) \bar{\mu}(z, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t} = \\ & = \Delta_{z,y} u(z, y, t) - \nabla_{z,y} \ln \bar{\mu}(z, y) \nabla_{z,y} u(z, y, t), \quad t \in R_+, z \in R_+, y \in R, \\ & u(z, y, t)|_{t=0} \equiv 0, \quad z \in R_+, y \in R, \\ & \frac{\partial u(z, y, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = h(y) \delta(t) + r(y) \theta(t), \quad t \in [0, T], y \in (-D, D), \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Прямая задача заключается в определении  $u(z, y, t)$  из задачи (1), при известных значениях  $\bar{\varepsilon}$  - диэлектрической и  $\bar{\mu}$  - магнитной проницаемости,  $\bar{\sigma}(z, y)$  - электрической проводимости среды, а также при известных значениях  $h(y), r(y)$ .

Пусть относительно параметров уравнения и начального условия выполнены следующие условия:

$$\bar{\varepsilon}(z, y), \bar{\mu}(z, y), \bar{\sigma}(z, y) \in \Lambda_1, \quad (2)$$

$$h(y), r(y) \in \Lambda_2, \quad (3)$$

где

$$\Lambda_1 = \left\{ \begin{aligned} & \rho_1(x, y) \in C^6((0, d) \times (-D_1, D)), \quad \sup p \{ \rho_1(x, y) \} \in ((0, d) \times (-D_1, D)), \\ & a = \|\rho_1\|_{C^2((0, d) \times (-D_1, D))}, \quad a \leq M, \end{aligned} \right\},$$

$$\Lambda_2 = \left\{ \begin{aligned} & \sup p \quad h(y) \in (-D, D), h(y) \in C^5(-D, D), \quad 0 < M_1, M_2, M_3, D_1, d = const, \\ & D = D_1 + T(M_2 + a), \quad T = 2d / (M_1 - a), \end{aligned} \right\}.$$

Применяя методы характеристик и выделения особенностей к (1) получим прямую задачу с данными на характеристиках:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \alpha^2} + L_1 \mathcal{G}(\alpha, y, t), \quad |\alpha| < t < T, y \in (-D, D), \\ \mathcal{G}|_{|\alpha|=t} &= S(t, y), \quad t \in [0, T], y \in (-D, D), \\ \mathcal{G}|_{y=-D} &= \mathcal{G}|_{y=+D} = 0, \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Здесь  $L_1 \mathcal{G}(\alpha, y, t)$ ,  $S(t, y)$  - функции, зависящие от функций  $\mu(\alpha, y), \varepsilon(\alpha, y), \sigma(\alpha, y), \alpha_y, \Delta \alpha, h(y), r(y)$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть выполнены условия (2)–(3), введенные условия и нормы, и функция  $u(\alpha, y, t)$  непрерывна и имеет непрерывные производные первого порядка в  $\Omega(T, D)$  и пусть  $S(t, y) \in L_2(\Omega(T, D))$ . Тогда существует обобщенное решение задачи (4) в пространстве  $W_2^1(\Omega(T, D))$ , где область  $\Omega(T, D) = \{(\alpha, y, t) : \alpha \in (-T, T), \alpha < t < T - \alpha, y \in (-D, D)\}$ .

В разделе 3.2. получена единственность решения для задачи (4).

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть функции  $\mu(\alpha, y), \varepsilon(\alpha, y), \sigma(\alpha, y), \alpha_y, \Delta \alpha$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка, и пусть решение задачи (4) существует и принадлежит  $C^2(\Omega(T, D))$ , и выполнено условие уравнения Эйконала. Тогда решение задачи (4) единственно в области  $\Omega(T, D)$ .

Из эквивалентности задач (4) и (1) следует, что решение задачи (1) также единственно в области  $\Omega(T, D)$ , при выполнении условия теоремы 1.

В разделе 3.3. построен конечно-разностный аналог дифференциальной задачи (4).

$$\left. \begin{aligned} V_{i\bar{i}} &= V_{a\bar{a}} + L_1 V_{ij}^k, \quad (ih_1, jh_2, k\tau \in \Omega_{ij}^k), \\ V_{\pm k, j}^{[k]} &= S_j^{[2i]}, \quad i = \overline{-N, N}; \quad j = \overline{-L, L}, \\ V_{i, L}^k &= V_{i, -L}^k = 0, \quad i = \overline{-N, N}; \quad j = \overline{[2i], 2N}, \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Здесь же разработан конечно-разностный алгоритм решения данной задачи.

В разделе 3.4. доказана единственность решения двумерной прямой задачи волновых процессов.

Таким образом, в данной главе доказано существование, единственность двумерной прямой задачи уравнения геоэлектрики с плоской границей и шнуровым источником, а также исследована прямая задача для волновых процессов. Обоснована сходимость численного решения к точному решению прямой задачи. Разработан алгоритм решения.

**IV глава** посвящена исследованию одномерных обратных задач уравнения геоэлектрики.

В разделе 4.1. исследована одномерная обратная задача геоэлектрики, в которой неизвестна магнитная проницаемость  $\mu_0(x_3)$ .



$$u_{0tt} = \frac{1}{\varepsilon_0(x_3)\mu_0(x_3)} \left[ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2} + \frac{\mu'_{0x_3}}{\mu_0(x_3)} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \right] - \frac{\tau_0(x_3)}{\varepsilon_0(x_3)} \cdot u_{0x_3}, \quad x_3 \in (0, d), t \in (0, T), \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} u_0(x_3, t)|_{t=0} &\equiv 0, \quad u'_{0x_3}|_{x_3=0} = -\frac{1}{2} \delta(t) + r_0 \theta(t), \\ u_0(x_3, t)|_{x_3=0} &= f(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$\varepsilon_0(x_3)$  – известная диэлектрическая проницаемость,  $\tau_0(x_3)$  – электропроводимость – известная функция,  $u_0(x_3, t)$  – распространение электромагнитных волн.

Для решения обратной задачи относительно коэффициентов предположительно выполнены условия

$$(\mu(x), \varepsilon(x), \tau(x)) \in \Lambda_0, \quad (8)$$

где  $\Lambda_0 = \left\{ \mu(x) \in C^6(R_+), \mu'(x) = 0, 0 < M_1 \leq \mu(x) \leq M_2, \|\mu\|_{C^2} \leq M_3 \right\}$ .

Применим к задаче (6)–(7) метод характеристик и тогда, получим следующую обратную задачу

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu'_x(x)}{\mu(x)} - \frac{\varepsilon'_x(x)}{\varepsilon(x)} \right] \cdot u_x - \tau(x) \sqrt{\frac{\mu(x)}{\varepsilon(x)}} \cdot u_x, \quad x \in (0, d), t \in (0, T), \\ u(x, t)|_{t=0} &\equiv 0, \quad u_x|_{x=0} = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon(0)\mu(0)}} \delta(t) + r_0 \theta(t), \\ u(x, t)|_{x=0} &= f(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Применим метод выделения особенностей, и представим решение задачи в виде

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + S(x) \theta(t - |x|), \quad (10)$$

где  $\tilde{u}(x, t)$  – непрерывная функция.

Если учесть (10), то из задачи (9) получим следующую обратную задачу с данными на характеристиках относительно  $S(x)$

$$\left. \begin{aligned} u''_{tt} &= u''_{xx} - \frac{2S'(x)}{S(x)} u'_x, \quad (x, t) \in \Delta(T), \\ u(x, t)|_{t=|x|} &\equiv S(x), \quad x \in [0, T/2], \\ u(x, t)|_{x=0} &= f(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $\Delta(T) = \Delta(T_d) = \{x \in (0, d), t \in (0, T_d) : x \in (0, T/2), |x| < t < T - |x|\}$ .

Построим разностный аналог задачи (11), где  $O(h)$  – малый член отброшен:

$$\left. \begin{aligned} u_{\bar{t}\bar{t}} &= u_{\bar{x}\bar{x}} - d_i u_{\bar{x}}, \quad (ih, kh) \in \Delta_h(T) \\ u_{\bar{t}}^i &= S_i, \quad i = \overline{0, N}, \\ g_i &= -\frac{1}{2\mu_0\varepsilon_0} - \frac{h}{2} \sum_{l=1}^{N-1} d_l g_l, \quad i = \overline{1, N}, \\ d_i &= 2S_i \cdot g_i, \quad i = \overline{2, N} \\ u_0^k &= f^k, \quad k = \overline{0, 2N}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть  $f(t) \in C^4([0, T])$  и пусть существует решение обратной задачи (11), которое удовлетворяет условию (8). Пусть для малой  $T$  решение прямой задачи  $u(x, t) \in C^4(\Delta(T_1))$ . Тогда конечно-разностное решение обратной задачи (12) сходится к точному решению обратной задачи (11) со скоростью порядка  $O(h)$  в классе  $C$  и справедлива оценка

$$\max_{i=0, N} |S_i - \tilde{S}_i| \leq \frac{1}{2} h \|u\|_{C^4(\overline{\Delta(T)})}, \quad (13)$$

где  $S_i$  - точное решение обратной задачи (11),  $\tilde{S}_i$  - конечно-разностное решение (11) с малым членом  $O(h)$ .

Если определена  $S_i, i = \overline{0, N}$ , то можно определить и  $\mu_i$  - решение обратной задачи (9), что и для (11).

В разделе 4.2. разработано конечно-разностное регуляризованное решение для задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} - \left[ \frac{1}{2} \frac{b'(z)}{b(z)} - \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} \right] \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} - \frac{\tau(z)}{\varepsilon(z)} \frac{\partial V(z, t)}{\partial z}, \quad (z, t) \in R_+^2, \\ V(z, t)|_{t=0} &\equiv 0, \quad z \in R_+, \quad \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_0 \delta(t) + r_0 \theta(t), \quad t \in R_+, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$V(z, t)|_{z=0} = f(t), \quad t \in [0, 2T]. \quad (15)$$

Обратная задача заключается в определении из задачи (14)–(15)  $\tau(z)$  – электропроводимость среды при известных значениях  $\mu(z)$ ,  $\varepsilon(z)$  – магнитной и диэлектрической проницаемости, а также дополнительной информации о решении прямой задачи (15).

Применяем метод характеристик и метод выделения особенностей приводим задачу (14)–(15) к задаче с данными на характеристиках. Определим функции  $V(z, t)$ ,  $S(z)$  при известных функциях  $\mu(z)$  и  $\varepsilon(z)$ , и при известной функции  $f(t)$  – дополнительная информация о решении прямой задачи. Строим разностный аналог дифференциальной задачи (14)–(15).

ТЕОРЕМА 4. Пусть решение обратной дифференциальной задачи (14)–(15) существует и  $V(z, t) \in C^4(\Delta(T))$ , и выполняется условие  $(\varepsilon(z), \mu(z), \sigma(z)) \in \Lambda_0$ , тогда построенные решения  $(\tilde{V}_i^k, \tilde{S}_i)$  обратной задачи сходятся к точному решению  $(V_i^k, S_i)$  обратной дифференциальной задачи со скоростью порядка  $O(h)$ .

ТЕОРЕМА 5. Пусть решение дифференциальной задачи существует и  $V(z, t) \in C^4(\Delta(T))$ , и пусть выполнено условие  $(\varepsilon(z), \mu(z), \sigma(z)) \in \Lambda_0$ . Тогда построенное конечно-разностное регуляризованное решение обратной задачи  $(\hat{V}_i^{k, \delta}, \hat{S}_i^\delta)$  сходится к точному решению  $(V_i^k, S_i)$  обратной дифференциальной задачи со скоростью порядка  $O(h)$ .

По полученному конечно-разностному регуляризованному решению задачи  $S_i^\delta$  получим конечно-разностное регуляризованное решение (14)–(15):

$$\begin{aligned}\tau_i^\delta &= -\varepsilon_i \left[ \frac{1}{2} \frac{(b_i)_z}{b_i} + \frac{(\mu_i)_z}{\mu_i} + \frac{2(S_i^\delta)_z}{S_i} \right] = -\varepsilon_i \left[ \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_i \mu_i)_z}{\varepsilon_i \mu_i} + \frac{(\mu_i)_z}{\mu_i} + \frac{2(S_i^\delta)_z}{S_i} \right] = \\ &= -\varepsilon_i \left[ \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_i \mu_i - \varepsilon_{i-1} \mu_{i-1})}{h \varepsilon_i \mu_i} + \frac{(\mu_i - \mu_{i-1})}{h \mu_i} + \frac{2(S_i^\delta - S_{i-1}^\delta)}{h S_i^\delta} \right], \quad i = \overline{1, N}.\end{aligned}$$

В разделе 4.3. рассмотрена разработка конечно-разностного регуляризованного метода решения одномерной обратной задачи волновых процессов.

В результате в этой главе, разработан конечно-разностный алгоритм решения и конечно-разностный регуляризованный метод решения обратной задачи уравнения геоэлектрики с мгновенным и шнуровым источником, в которой определялась магнитная и диэлектрическая проницаемости. Составлен алгоритм решения данной задачи.

В главе V изложены численные алгоритмы, блок-схемы и программная реализация одномерных прямых и обратных задач для уравнения геоэлектрики, изученные в главах 3, 4.

В разделе 5.1. приведено численное решение одномерной прямой задачи геоэлектрики с мгновенным и шнуровым источниками в следующей постановке:

$$u_{0n}''(x_3, t) = \frac{1}{\varepsilon_0(x_3) \mu_0(x_3)} \left[ u_{0x_2x_2}''(x_3, t) \right] + \frac{\mu_{0x_2}'(x_3)}{\mu_0(x_3)} u_{0x_2}'(x_3, t) - \frac{\tau_0(x_3)}{\varepsilon_0(x_3)} u_{0x_2}'(x_3, t), \quad (16)$$

$$(x_3, t) \in R_+^2,$$

где  $\varepsilon_0(x_3), \mu_0(x_3)$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости,  $\tau_0(x_3)$  – электропроводимость среды,  $u_0(x_3, t)$  – распространение электромагнитных волн. Учитывая следующие условия:

$$u_0(x_3, t)|_{t < 0} \equiv 0, \quad u_{0x_2}'(x_3, t)|_{x_2=0} = -\frac{1}{2} \delta(t) + r_0 \theta(t), \quad t \in [0, T], \quad (17)$$

$$\varepsilon_0(x_3), \mu_0(x_3), \tau_0(x_3) \in \Lambda_0, \quad (18)$$

где  $\Lambda_0 = \{ \varepsilon_0(x_3) \in C^6(R_+), \varepsilon_{0x_2}'(0) = 0, 0 < M_1 \leq \varepsilon_0(x_3) \leq M_2, \|\varepsilon_0(x_3)\|_{C^2} \leq M_3 \}$ , здесь  $M_1, M_2, M_3$  – положительные постоянные.

$$x(x_3) > 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow \infty} x(x_3) = 0. \quad (19)$$

Приведем к прямой задаче с данными на характеристиках

$$\left. \begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t) - 2 \frac{S'(x)}{S(x)} u_x'(x, t) - \frac{\tau(x) \sqrt{\mu(x)}}{\sqrt{\varepsilon(x)}} u_x'(x, t), (x, t) \in \Delta(T), \\ u(x, t)|_{t=|x|} &= S(x), x \in [-T/2, T/2]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Напишем разностный аналог дифференциальной задачи (20), используя сеточные обозначения:

$$\left. \begin{aligned} u_{\bar{t}\bar{t}} &= u_{\bar{x}\bar{x}} - 2 \frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{2hS_i} \cdot \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} - \tau_i \sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}} \cdot \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h}, (x_i, t_k) \in \Delta_h(T), \\ u_i^i &= S_i, i = \overline{0, N}. \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть решение задачи (20) существует и  $u(x, t) \in C^4(\Delta(T))$ , и пусть выполнены условия (18), (19). Тогда решение конечно-разностной задачи (21)

сходится к точному решению дифференциальной задачи (20) со скоростью порядка  $O(h)$  и имеет оценку  $\bar{u}^{k+1} \leq O(h) \exp \left[ 2 \frac{\bar{S}}{\underline{S}} + h \cdot \overline{TAU} \cdot \sqrt{\frac{\bar{M}}{\underline{E}}} \right]$ .

В разделе 5.2. изложено численное определение скорости в задаче геоэлектрики линией с потерями. Задача также приводится к задаче с данными на характеристиках. Заменяется конечно-разностным аналогом. Доказана сходимость приближенного решения к точному.

В разделе 5.3. рассмотрено численное решение прямой задачи (6) и обратной задачи (6)-(7) уравнения геоэлектрики. Изложена компьютерная реализация на предложенные алгоритмы. Получены графики решения, приведен анализ полученного решения.

Опишем алгоритм решения прямой задачи и обратной задачи геоэлектрики:

- по формуле  $S_i = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{a_i b_i} \cdot b_i e^{\text{int}(i)}}}$ ,  $i = \overline{0, N}$ , определяем  $S_i, i = \overline{0, N}$  - задачу с данными на характеристиках;
- значения  $S_i$  присваиваем  $V_i^i, i = \overline{0, N}$ , т.е. определяем значения  $V$  на характеристиках;
- по значениям  $V_i^i$  определяем  $V_i^{i+1}$  - по формуле Тэйлора;
- затем вычисляем  $V_i^{k+1}$  - прямая задача;
- из решения прямой задачи  $V_i^k$  определяем дополнительную информацию для обратной задачи:  $f^k = V_0^k, k = 0, 2N$  - это нулевой слой;
- вычисляем первый слой по формуле  $V_1^k = (f^{k+1} + f^{k-1})/2$ ;
- со второго слоя  $k=2$  обратная задача вычисляется по формуле 
$$\frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{h^2} = \frac{V_i^{k+1} - 2V_i^k + V_i^{k-1}}{h^2} - \left[ 2 \frac{S_i - S_{i-1}}{h S_{i-1}} + \frac{d_i}{a_i} \right] \cdot \left[ \frac{V_i^k - V_{i-1}^k}{h} \right] - \frac{d_i}{a_i} \cdot \left[ \frac{V_i^k - V_{i-1}^k}{h} \right], \quad (x_i, t_k) \in \Delta_h(2T),$$
;
- затем при определении последующего слоя обратной задачи, каждый раз мы по  $V_i^i = S_i, i h \in (0, Nh)$ , определяем значение  $S_i, i = \overline{0, N}$ , в исходном коде программы они обозначены через  $S_p, i = \overline{0, N}$ ;

так как приближенная сеточная функция  $S_p, i = \overline{0, N}$  определена, то по

$$b_i = \sqrt[3]{\frac{1}{S_i^4 a_i e^{2 \cdot \text{int}(i)}}}, \quad i = \overline{0, N} \quad \text{и} \quad d_i = \left\{ -2 \frac{S_i - S_{i-1}}{h S_{i-1}} - \frac{(\sqrt{a(x)b(x)})'}{\sqrt{a_i b_i}} - \frac{b_i - b_{i-1}}{h b_{i-1}} \right\} \cdot a_i, \quad i = \overline{0, N} \quad \text{можно}$$

вычислить сеточные приближенные функции  $b_p, d_p, i = \overline{0, N}$ , т.е. неизвестные функции  $\mu_i, \sigma_i$  - соответственно.

При решении прямой задачи уравнения геоэлектрики в качестве  $\mu(x)$  - магнитной проницаемости заданы одноволновая, двухволновая и ступенчатая

функции. А в качестве диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(x)$  и проводимости  $\sigma(x)$  взяты волновые функции и равные 1. Глубина вычисления  $T = 4$ .

Во всех графиках выведены графики функций:  $dpinf(t)=V(0,t)$  – дополнительная информация для обратной задачи,  $\mu(x)$  – магнитная проницаемость,  $\varepsilon(x)$  – диэлектрическая проницаемость,  $\sigma(x)$  – проводимость (см.П.1.).

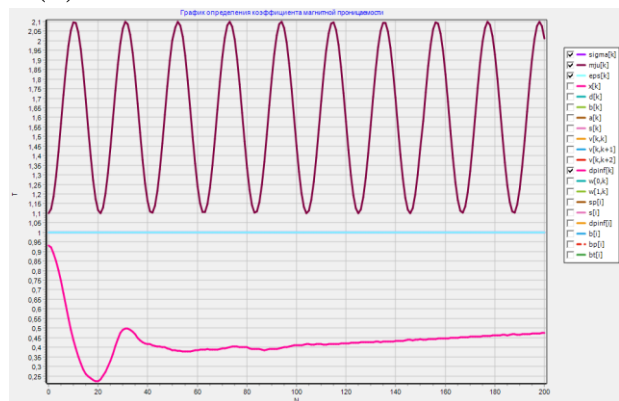


Рис. 1. Графики функций  $dpinf[\tau]$  – дополнительная информация для обратной задачи;  $\mu(x) := 2.1 - \cos^2(48 \cdot 1.57 \cdot \tau)$ ; при  $\sigma(x) := 1.0$ ;  $\varepsilon(x) := 1.0$ ;  $\tau = 0.002$ .

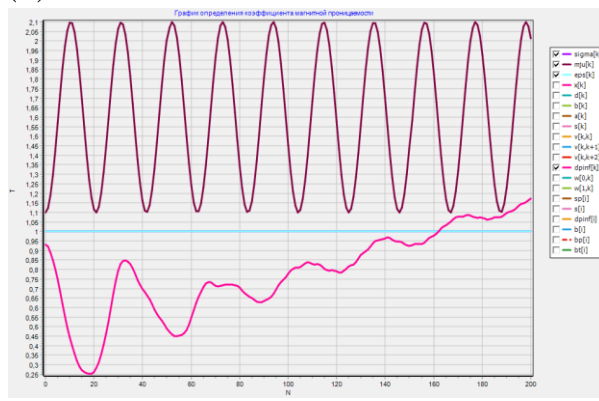


Рис.2. Графики функций  $dpinf[\tau]$  – дополнительная информация для обратной задачи;  $\mu(x) := 2.1 - \cos^2(48 \cdot 6.28 \cdot \tau)$ ; при  $\sigma(x) := 1.0$ ;  $\varepsilon(x) := 1.0$ ;  $\tau = 0.0005$ .

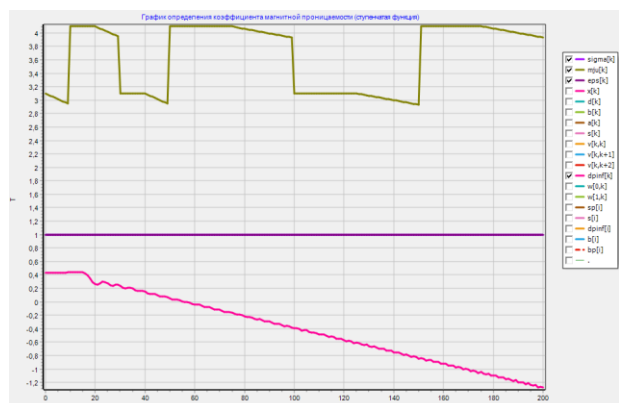


Рис. 3. Графики функций  $dpinf[\tau]$  – дополнительная информация для обратной задачи;  $\mu(x) :=$  Ступенчатая функция; при  $\sigma(x) := 1.0$ ;  $\varepsilon(x) := 1.0$ ;  $\tau = 0.0033$ .

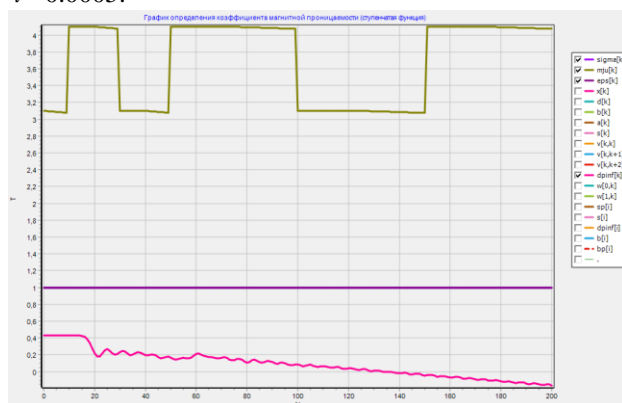


Рис.4. Графики функций  $dpinf[\tau]$  – дополнительная информация для обратной задачи;  $\mu(x) :=$  Ступенчатая функция; при  $\sigma(x) := 1.0$ ;  $\varepsilon(x) := 1.0$ ;  $\tau = 0.0005$ .

Численные расчеты показали, что уменьшив сеточные шаги в два, четыре, восемь раз, можно увеличить точность решения задачи для уравнения геоэлектрики 1.4 ÷ 1.8 раза.

При решении одномерной прямой задачи уравнения геоэлектрики исследованы и проанализированы следующие обстоятельства созданного нами алгоритма.

**А. Численная устойчивость алгоритма.** В ходе исследования выявлена численная устойчивость построенного численного алгоритма путем проведения следующих действий:

а. Последовательно уменьшали (увеличивали) шаги сетки и получили относительные погрешности решения прямой задачи в нескольких точках. Здесь относительные погрешности почти одинаковы, что и подтверждает устойчивость алгоритма.

б. Измельчив шаги сетки в каждой точке сетки, получили значения решения прямой задачи  $V(0,t)$ , и выяснили разность значений, т.е. абсолютные погрешности. Они также не различны, что подтверждается устойчивостью созданного алгоритма.

**Б. Глубина вычисления.** В прямой задаче уравнения геоэлектрики  $x \in [0, T]$ .

Шаги сетки по  $t$  и  $x$   $\tau = T/N$  и  $h = T/2N$ .

Вычисление производилось при  $T=4$ , как видно из множества графиков. Глубины вычисления можно увеличивать измельчая шаги сетки  $N$  (при этом, чтобы была устойчивость алгоритма), но в этом случае увеличивается и машинное время вычисления.

**В. Какие возможны функции  $\mu(x)$ ,  $\sigma(x)$ ,  $\varepsilon(x)$ .**

В качестве функции  $\mu(x)$ - магнитная проницаемость – задавали различные функции: косинусообразные, ступенчатые, а также в виде мгновенной. В большинстве случаев вычисление проходило нормально.

Затем последовательно задавали и для функции  $\sigma(x), \varepsilon(x)$  косинусообразные функции, где вычисление проходило удовлетворительно. В ходе вычислений выяснилось, что решение прямой задачи уравнения геоэлектрики не существенно зависит от значений функций  $\varepsilon(x)$  и  $\sigma(x)$  - диэлектрической проницаемости и проводимости.

Одномерная обратная задача для уравнения геоэлектрики реализована для функций указанных в таблице 5.2 (см. диссертацию), определена функция  $\mu(x)$ .

На всех рисунках (см. П.2.): сплошная - точная функция  $\mu(x)$ , однопунктирная -  $\tilde{\mu}(x)$  приближенное решение одномерной обратной задачи и  $dpinf(t)=V(0,t)$  – дополнительная информация для обратной задачи.

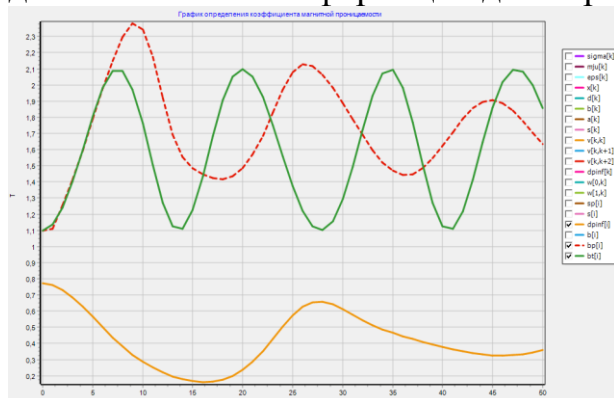


Рис.5.Графики функций  $dpinf[\tau]$ – дополнительная информация для обратной задачи;  $\mu(x) := 2.1 - \cos^2(48 \cdot 0.393 \cdot \tau)$ ; при  $\sigma(x) := 1.1 - \cos^2(0.393 \cdot \tau)$ ;  $\varepsilon(x) := 3.1 - \cos^2(0.785 \cdot \tau)$ ;  $\tau = 0.003$ .

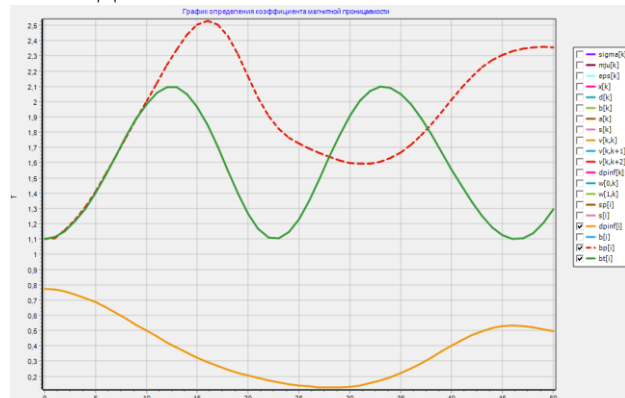


Рис. 6. Графики функций  $dpinf[\tau]$ – дополнительная информация для обратной задачи;  $\mu(x) := 2.1 - \cos^2(48 \cdot 0.393 \cdot \tau)$ ; при  $\sigma(x) := 1.1 - \cos^2(0.393 \cdot \tau)$ ;  $\varepsilon(x) := 3.1 - \cos^2(0.785 \cdot \tau)$ ;  $\tau = 0.002$ .

В полученных результатах выведены графики функции  $bt(t)$  и  $bp(t)$ , при  $t = x$  - точная и приближенная вычисленная функция.

Относительная погрешность решения обратной задачи уравнения Максвелла составляет 1:21%.

Устойчивость решения обратной задачи уравнения Максвелла проверялись следующим образом:

- Измельчали шаги сетки и проверялись значения в соответствующих точках сетки;
- К дополнительной информации обратной задачи задавались случайные числа и проверялись решения обратной задачи;
- Измельчая шаги сетки, увеличивали точность решения обратной задачи.

При решении одномерной обратной задачи уравнения геоэлектрики исследованы и проанализированы следующие возможности разработанного алгоритма и программы.

**А. Какие возможны функция  $\mu(x)$  - магнитная проницаемость, которая определяется при решении обратной задачи.**

Относительно функции  $\mu(x)$  мы взяли в виде косинусообразной, ступенчатой и мгновенной функции. Относительные погрешности составляют от 1% до 21%.

**Б. Допустимые ошибки в дополнительной информации для обратной задачи.**

При вычислении обратной задачи последовательно задавали ошибки в виде процентах: 1%, 2%, 3%, 5%, 7%, 8%, 10%. Анализ показал, что в дополнительной информации обратной задачи уравнения Максвелла ошибки должны составлять от 1% до 5%.

**В. Глубина вычисления по  $x$ .**

Переменная  $x \in [0, T]$ ,  $T$  – время, а шаг сетки по  $x$  равно  $h_x = \frac{T}{N}$ ,  $N$  – фиксированное положительное число. В численных расчётах мы относительно  $T$  взяли 4 условных единиц, т.е.  $T = 4$  у.е. Значение  $T$  можно увеличивать, но при этом необходимо увеличивать значение  $N$ , что и дает увеличение машинного времени.

**Г. Численная устойчивость алгоритма.**

Для проверки устойчивости алгоритма мы последовательно увеличивали шаги сетки  $h_z = 0,1; 0,2; 0,3$  и т.д., при этом относительная погрешность в одинаковых соответствующих точках не различна, мало отличается друг от друга, следовательно, созданный нами алгоритм устойчив.

Проверка устойчивости также проводилась следующим образом:

1) измельчали шаги сетки и сравнивались полученные результаты и погрешность в соответствующих точках;

2) дополнительной информации для обратных задач задавались малые ошибки и проводились расчеты.

**Д. Разрешающая способность алгоритма.**

Оценка между точным  $bt_i$  и приближенным  $bp_i$  решениями обратной задачи уравнения геоэлектрики имеет вид:

$$\max_{i=0, N} |bt_i - bp_i| \leq \frac{h_z}{2} \|V\|_{C^4(\Delta(T))}$$

Точность относительной погрешности  $\frac{|bt_i - bp_i|}{b_i} \cdot 100\%$  зависит от величины шага дискретизации  $h_x$  и от нормы решения прямой задачи  $\|V\|_{C^4(\overline{\Delta T})}$

Указанная зависимость изучена нами при различных расчетах составленной программы. Анализа показал, что уменьшение шага дискретизации положительно влияет на точность решения обратной задачи. Например, уменьшение шага  $h_x$  в 10 раз дает уменьшение относительной погрешности 8-10 раз. Увеличение значения при решении прямой задачи отрицательно влияет на точность решения обратной задачи уравнения геоэлектрики, что и подтверждает полученную оценку.

Алгоритм был проверен на реальных значениях коэффициентов уравнения геоэлектрики. Получены графики. Относительная погрешность составила  $\approx 21\%$ .

Таблица 1. Обратные задачи на реальные значения

№ п/п	№ Рис.	Вещество	Функции			Шаг сетки	Отн. погреш.
			$\sigma(x)$	$\mu(x)$	$\varepsilon(x)$		
1.	Рис.7	Кварц	$10^{-14}-10^{-15}$	$\approx 1$	3,5–4,5	0.005	21,08
2.	Рис.8	Стекло	$10^{-8}-10^{-17}$	$\approx 1$	4–16	0.005	21,49
3.	Рис.9	Слюда	$10^{-16}$	$\approx 1$	5,7–7	0.005	21,38

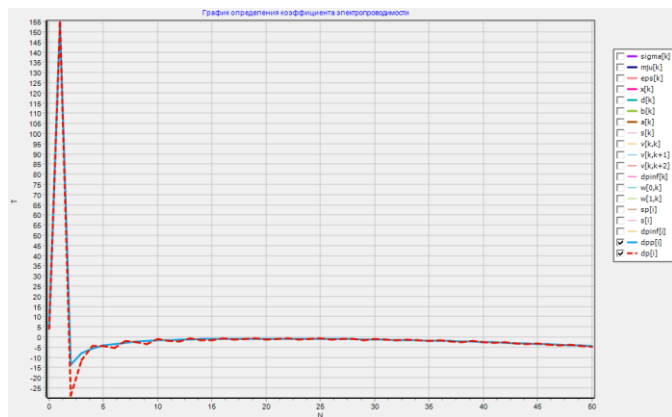


Рис. 7.  $\mu(x) := 1$ ;  $\sigma(x) := 1/\text{power}((10), 14)$ ;  $\varepsilon(x) := 4$ ;  $\tau = 0.005$ .

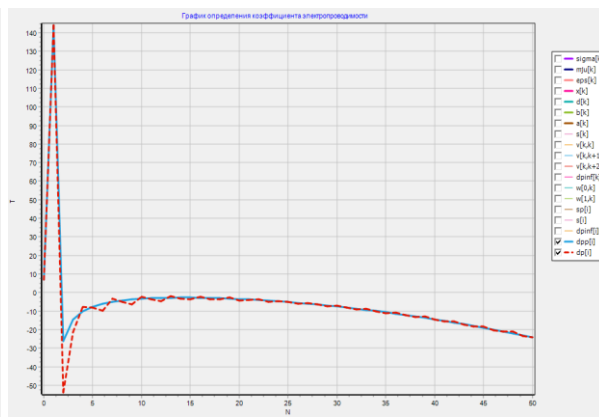


Рис.8.  $\mu(x) := 1$ ;  $\sigma(x) := 1/\text{power}((10), 11)$ ;  $\varepsilon(x) := 7$ ;  $\tau = 0.005$ .



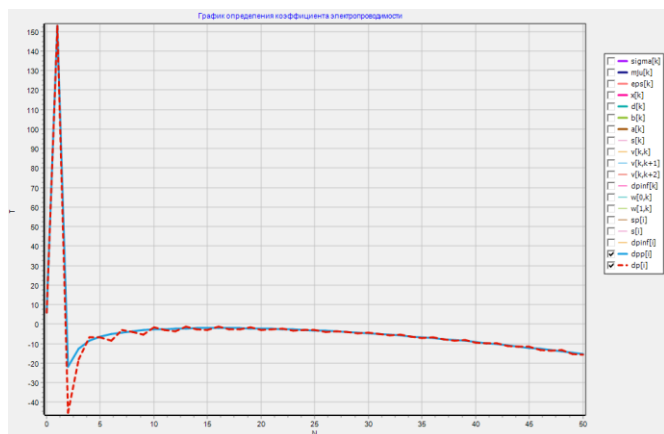


Рис. 9.  $\mu(x) := 1$ ;  $\sigma(x) := 1/\text{power}((10), 16)$ ;  $\varepsilon(x) := 6$ ;  
 $\tau = 0.005$ .

В данной главе составлен конечно-разностный алгоритм решения одномерной прямой и обратной задач, и разработана численная компьютерная реализация на языке Object Pascal (Delphi XE7), результаты которой получены в виде графиков. Проведен анализ численного решения определения неизвестных коэффициентов в обратной задаче геоэлектрики.

В выводах приведены полученные в диссертационной работе основные научно-практические результаты.

В приложении содержатся графики прямых и обратных задач, листинг разработанного программного кода, акт внедрения и свидетельства Кыргызпатента на программное приложение.

## ВЫВОДЫ

1. Доказана корректность двумерной прямой задачи уравнения геоэлектрики с плоской границей и шнуровым источником, т.е. существование и единственность решения.
2. Обоснован и разработан конечно-разностный метод решения одномерной обратной задачи уравнения геоэлектрики с мгновенным и шнуровым источниками, в которой определяется коэффициент магнитной проницаемости.
3. Создан и обоснован конечно-разностный регуляризованный метод определения коэффициента электропроводимости в одномерной обратной задаче уравнения геоэлектрики.
4. Разработаны устойчивые численные алгоритмы решения и численные реализации одномерных прямых и обратных задач для уравнения геоэлектрики, проанализированы и выяснены возможности применения разработанного автором алгоритма. Показана достоверность конечно-разностного решения одномерных обратных задач с помощью численного эксперимента на тестовых примерах для различных видов искомых коэффициентов задач.
5. Созданы комплексы программ для решения одномерных прямых и обратных задач для уравнения геоэлектрики, основанные на алгоритмах методов конечно-разностного и обращения разностных схем как для решения прямой задачи, так и для обратной задачи, т.е. для восстановления одного из параметров физического процесса. Результаты численных экспериментов показали хорошую точность и установлены относительные погрешности восстановления искомых функций.

## **ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

На основе полученных результатов можно осуществить:

1. Исследованный конечно-разностный метод широко можно применить для других классов прямых и обратных задач волновых процессов.
2. Построенные алгоритмы и реализации прямых и обратных задач можно использовать для реальных однородных и неоднородных сред.
3. Алгоритмы и программы прямых и обратных задач, предложенные автором, можно осуществить для широкого класса задач волновых процессов.
4. Результаты можно применить в учебном процессе, с целью ознакомления студентов с увлекательной проблематикой причинно-следственных явлений прямых и обратных задач и привлечь их к научным исследованиям в этой области.

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Анищенко, Ю. В.** Численное решение прямой задачи геоэлектрики с мгновенным и шнуровым источниками [Текст] / Ю. В. Анищенко. – Вестник КазНПУ. 2017. № 4(60). С. 109 – 114.
2. **Анищенко, Ю.В.** Математические модели электромагнитных процессов геоэлектрики [Текст] / Ю. В. Анищенко. – Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. 2017. № 1-1 (41). С. 88-94.
3. **Анищенко, Ю.В.** Конечно-разностный алгоритм решения двумерной прямой задачи геоэлектрики с мгновенным и шнуровым источниками [Текст] / Ю. В. Анищенко. – Вестник Кыргызского государственного университета строительства, транспорта и архитектуры им. Н.Исанова. 2017. № 1 (55). С. 163-168.
4. **Анищенко, Ю.В.** Об одном конечно-разностном алгоритме определения магнитной проницаемости в одномерной задаче уравнения геоэлектрики с мгновенным и шнуровым источниками [Текст] / Ю. В. Анищенко. – Известия ВУЗов (Кыргызстан). 2015. № 11. С. 12-18.
5. **Анищенко, Ю.В.** Существование решения прямой задачи геоэлектрики с плоской границей и шнуровым источником [Текст] / Ю. В. Анищенко, А.Дж. Сатыбаев. – Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. 2017. Т. 17. № 8. С. 18-22.
6. **Анищенко, Ю.В.** Разработка конечно-разностного регуляризованного метода решения одномерной обратной задачи геоэлектрики [Текст] / Ю. В. Анищенко, А.Дж. Сатыбаев. – Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. 2019. Т. 19. № 4. С. 3-8.
7. **Анищенко, Ю.В.** Единственность решения двумерной прямой задачи геоэлектрики с мгновенным и шнуровым источниками [Текст] / Ю.В. Анищенко, А.Дж. Сатыбаев. – Нука и новые технологии. 2014. №7. С. 25-29.
8. **Анищенко, Ю.В.** Численное решение и компьютерная реализация прямой и обратной задач уравнения геоэлектрики [Текст] / Ю. В. Анищенко, А.Дж. Сатыбаев. – Проблемы автоматизации и управления. 2020, №2(39).
9. **Анищенко, Ю.В.** Численное определение скорости в задаче геоэлектрики линией с потерями / Ю.В. Анищенко, А.Дж. Сатыбаев // В сборнике: Марчуковские научные чтения – 2017 Труды Международной научной конференции. 2017. С. 28-33.
10. Численный алгоритм решения двумерной прямой задачи геоэлектрики с плоской границей и шнуровым источником [Текст] / Сатыбаев А.Д., Жанибеков М.Ж., **Анищенко Ю.В.**, Маматкасымова А.Т. – Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. 2016. № 3-1 (39). С. 180-189.

11. Development of a Finite-difference Regularized Solution of the One-Dimensional Inverse Problem of the Wave Process [Text] / [A.D. Satybaev, **Y.V. Anishchenko**, A.Z. Kokozova and other]. – American Journal of Applied Mathematics, Volume 8, Issue 2, April 2020, Pages: 64-73 DOI: 10.11648/j.ajam.20200802.13
12. Numerical solution of a two-dimensional direct problem of the wave process [Text] / A.D. Satybaev, A.Z. Kokozova, **Y.V. Anishchenko**, A.A. Alimkanov – AIP Conference Proceedings. 4. "International Conference on Analysis and Applied Mathematics, ICAAM 2018" 2018. P. 020045.
13. The uniqueness of the solution of the two-dimensional direct problem of a wave process with an instantaneous source and a flat boundary [Text] / A.D. Satybaev, **Y.V. Anishchenko**, A.Z. Kokozova, A.A. Alimkanov. – AIP Conference Proceedings. "International Conference on Analysis and Applied Mathematics, ICAAM 2018" 2018. P. 020063.
14. **Свид. 665** Кыргызская Республика, Программа решения одномерных обратных задач уравнения геоэлектрики [Текст] / **Ю.В. Анищенко**, А.Дж. Сатыбаев; Бишкек. ГСИСиИ при правительстве КР (Кыргызпатент). - №20200063.6; заявл. 30.12.20; опубл. 29.01.21, Бюл. № 1/2 (262). – 42 с.
15. **Свид. 671** Кыргызская Республика, Программа решения одномерных прямых задач уравнения геоэлектрики [Текст] / **Ю.В. Анищенко**, А.Дж. Сатыбаев; Бишкек. ГСИСиИ при правительстве КР (Кыргызпатент). - №20210006.6; заявл. 02.03.21; опубл. 15.04.21, Бюл. № 4/1 (267). – 70 с.

**Анищенко Юлия Владимировнанын «Чектүү айырма регуляризацияланган ыкмасы негизинде геоэлектрдик маселелерди чечүү үчүн моделдерди жана сандык алгоритмдерди иштеп чыгуу» темасындагы 05.13.18 – математикалык моделдоо, сандык ыкмалар жана программалар комплекси адистиги боюнча техника илимдеринин кандидату окумуштуулук даражасын изденип алуу учун жазылган диссертациясынын**

### **РЕЗЮМЕСИ**

**Ачкыч сөздөр:** Математикалык модель, геоэлектрдик теңдеме, түз жана тескери маселе, ченем-айырмалык усул, сандык алгоритм, чечимдин чиймеси.

**Изилдөөнүн объектиси:** Изилдөөнүн негизги объектиси катары геоэлектриктердин теңдемеси үчүн ар кандай тескери маселелердин формулалары тандалып алынган.

**Изилдөөнүн максаты:** Диссертациялык иш геоэлектрдик теңдеменин түздөн-түз маселелеринин сандык-айырмачылык ыкмасы менен сандык чечимин иштеп чыгууга, негиздөөгө жана колдонууга, тикелей маселелердин болжолдуу чечиминин уникалдуулугун жана туруктуулугун изилдөөгө арналган, геофизикада практикалык мааниге ээ болгон геоэлектриктердин бир өлчөмдүү тескери маселелеринин сандык чечимдерин куруу, алгоритмдерди түзүү жана аларды компьютердин жардамы менен ишке ашыруу.

**Изилдөө методдору:** Геоэлектриктердин теңдемеси үчүн түз жана тескери маселелерди чечүү үчүн чектүү айырма ыкмасы бар, тескери маселелерди чыгарууда айырма схемаларын инверсиялоо ыкмасы деп аталат.

**Алынган натыйжалар жана алардын илимий жаңылыгы:** геоэлектрдик теңдеменин түздөн-түз маселелерин чечүүгө мамиле сунушталат; уникалдуулук теоремалары, конвергенция теоремалары далилденип, түздөн-түз чыгарылган маселенин акыркы жана айырмачыл чечиминин туруктуулугуна баа алынды; геоэлектриктердин бир өлчөмдүү тескери теңдемелери үчүн, чектүү айырмачыл эритменин шарттуу туруктуулугунун баалары алынат жана так чечимге жакындашуусу көрсөтүлөт; геоэлектрдик теңдеменин бир өлчөмдүү тескери маселесин чечүү үчүн чектелген айырма регуляризацияланган ыкмасы сунуш кылынат; берилген тапшырмалар үчүн чечимдин сандык алгоритмдери компьютерде иштелип чыккан жана ишке ашырылган.

**Колдонуу чөйрөсү:** Бир өлчөмдүү түз жана тескери маселелерди чыгаруунун иштелип чыккан ыкмасы жана анын программалык комплекси түрүндөгү программалык камсыздоо сейсмикалык, электродинамикалык, электромагниттик талаалардын ж.б. маселелерин чечүүдө колдонулушу мүмкүн.

## РЕЗЮМЕ

диссертации Анищенко Юлии Владимировны на тему: «Разработка моделей и численных алгоритмов решения задач геоэлектрики на основе конечно-разностного регуляризованного метода» на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**Ключевые слова:** Математическая модель, уравнение геоэлектрики, прямая и обратная задача, конечно-разностный регуляризованный метод, численный алгоритм, графики решений.

**Объект исследования:** В качестве основного объекта исследования выбраны различные постановки обратных задач для уравнения геоэлектрики.

**Цель исследования:** Диссертационная работа посвящена разработке, обоснованию и приложениям численного решения прямых задач уравнения геоэлектрики конечно-разностным методом, исследование вопросов единственности и устойчивости приближенного решения прямых задач, построению численных решений одномерных обратных задач геоэлектрики на основе конечно-разностного регуляризованного метода, имеющих практическое значение в геофизике, созданию алгоритмов и их реализации с помощью компьютера.

**Методы исследования.** Для решения прямых и обратных задач для уравнения геоэлектрики, является конечно-разностный метод, при решении обратных задач называют его методом обращения разностных схем.

**Полученные результаты и их научная новизна:** предложен подход к решению двумерных прямых задач уравнения геоэлектрики; доказаны теоремы единственности, теоремы сходимости и получены оценка устойчивости конечно-разностного решения двумерной прямой задачи; для ряда одномерных обратных уравнения геоэлектрики получены оценки условной устойчивости конечно-разностного решения и показана сходимость к точному решению; разработан конечно-разностный регуляризованный метод решения одномерной обратной задачи уравнения геоэлектрики; разработаны численные алгоритмы решения и реализованы на компьютере на поставленные задачи.

**Область применения:** Разработанный метод решения одномерных прямых и обратных задач и ее математическое обеспечение в виде комплекса программ могут найти применение в решении практических задач сеймики, электродинамики, электромагнитных полей и т.д.

## SUMMARY

of the dissertation of Anishchenko Yuliya Vladimirovna on the theme: “Development of models and numerical algorithms for solving geoelectric problems based on the finite-difference regularized method” for the degree of candidate of technical sciences, specialty 05.13.18 – “Mathematical modeling, numerical methods and program complexes”

**Key words:** Mathematical model, geoelectric equation, direct and inverse problem, finite-difference regularized method, numerical algorithm, solution graphs.

**Object of research:** As the main object of research, various formulations of inverse problems for the equation of geoelectrics are selected.

**Purpose of the research:** The dissertation work is devoted to the development, substantiation and applications of the numerical solution of direct problems of the geoelectric equation by the finite-difference method, the study of the uniqueness and stability of the approximate solution of direct problems, the construction of numerical solutions of one-dimensional inverse problems of geoelectrics, which computer-assisted implementation.

**Research methods:** For solving direct and inverse problems for the equation of geoelectrics, there is a finite-difference method, when solving inverse problems it is called the method of inversion of difference schemes.

**The results obtained and their scientific novelty:** an approach to solving direct problems of the geoelectric equation is proposed; uniqueness theorems, convergence theorems are proved, and an estimate of the stability of the finite-difference solution of the direct problem is obtained; for a number of one-dimensional inverse equations of geoelectrics, estimates of the conditional stability of the finite-difference solution are obtained and convergence to the exact solution is shown; a finite-difference regularized method for solving the one-dimensional inverse problem of the geoelectric equation is proposed; numerical algorithms for the solution have been developed and implemented on a computer for the assigned tasks.

**Scope:** The developed method for solving one-dimensional direct and inverse problems and its software in the form of a complex of programs can be used in solving practical problems of seismic, electrodynamics, electromagnetic fields, etc.

**Анищенко Юлия Владимировна**

**Разработка моделей и численных алгоритмов решения задач геоэлектрики на  
основе конечно-разностного регуляризованного метода**

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Подписано к печати: 1.10.2021 г.  
Формат 60x84/16. Объем 1,28 п.л.  
Бумага офсетная. Тираж 25 экз.