НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Ж. БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.12.001

На правах рукописи
УДК 517.98

Какишов Жылдызбек Каныбекович

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУШЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2012

Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук Иманалиев Таалайбек Мурзабекович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Сопуев Адахимжан кандидат физико-математических наук, доцент Туркманов Жылдызбек Канybекович
Ведущая организация:	Казахский национальный университет имени аль-Фараби Казахстан, 480091, г. Алматы, ул. Масанчи, 49/57

Защита диссертации состоится «___» _______ 2013 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 01.12.001 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата физико-математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, Чуйский проспект 265а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан “____” ___________ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета, д.ф.-м.н. Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. К необходимости изучения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием приводят многие задачи физики, техники, биологии, которые описывают реальные процессы, подвергающиеся в процессе своей эволюции кратковременным резким возмущениям. Наиболее систематические исследования дифференциальных уравнений с импульсным воздействием были выполнены в работах А.Халанай, Д.Векслер, А.М. Самойленко и Н.А. Перестюк.

Также, при исследованиях многих практических и теоретических задач динамических систем, в том числе с импульсным воздействием, необходимо учитывать наличие малых параметров, тем не менее, оказывающих существенное влияние на процесс. Начальная задача для систем сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с разрывными решениями вырожденной системы была изучена К.К.Какишовым. Начальная задача для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием была изучена Д.Д.Байновым и В.Ковачевым. При этом они использовали метод построения асимптотических разложений решений нелинейных сингулярно-возмущенных систем, в его наиболее эффективной версии, разработанной в Кыргызстане.

Основными требованиями в этом методе являются:

- отрицательность собственных значений линеаризованной системы, обеспечивающее экспоненциальную асимптотическую устойчивость для решений уравнений типа пограничного слоя и равномерную ограниченность решений интегральных уравнений для остаточных членов в асимптотических разложениях;

- малое расстояние между начальными условиями для решения и начальными значениями решений вырожденных уравнений, для обеспечения разрешимости нелинейных уравнений.

Таким образом, известный метод асимптотических разложений не давал возможности исследовать нелинейные задачи теории сингулярных возмущений, в том числе, условия существования решений для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, при общих предположениях относительно заданных функций, которые бы поддавались реальной проверке, что и обуславливает актуальность работы.

Связь темы диссертации с государственными программами. Работа выполнялась в рамках проекта по Институту фундаментальных наук КНУ им. Ж. Баласагына МОиН КР по теме: “Сингулярно-возмущенные дифференциальные, интегро-дифференциальные уравнения с импульсным воздействием”, № гос. регистрации 0004168, 2006-2008 гг.

Цель и задачи исследования. Цель диссертационной работы - развить асимптотические методы решения сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений и применить их к сингулярно-возмущенным нелинейным дифференциальным уравнениям с импульсным воздействием; изучить асимптотическое поведение решений задачи Коши для таких уравнений и приложить эти результаты к решению краевой задачи с управлением.

Научная новизна полученных результатов. С помощью метода дифференциальных неравенств развит на более широкие классы задач созданный в Кыргызстане метод построения асимптотических разложений.

На основе этого метода получены более общие условия существования асимптотических разложений решений начальных задач для сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений и их систем; получены асимптотические оценки решений начальных задач для нелинейных сингулярно–возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и их систем при общих предположениях на заданные функции.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Результаты работы могут быть применены для получения более общих условий существования асимптотических разложений решений различных задач теории сингулярных возмущений, в том числе - сингулярных возмущений динамических систем со скачками. Они подводят математическую основу для исследований, проведенных в рамках теоретической физики, поскольку доказательство существования решения является косвенным подтверждением адекватности математической модели.

Основные положения, выносимые на защиту:

- более общие условия существования решений вырожденных уравнений и базовых сингулярно-возмущенных уравнений, к которым сводятся различные задачи теории сингулярных возмущений – в скалярном случае требуется только отрицательность производной по неизвестной функции;
- более общие условия существования асимптотических разложений решений начальных задач для нелинейных скалярных и векторных сингулярно–возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и систем таких уравнений;
- алгоритм для строгой проверки условия устойчивости решений векторных сингулярно–возмущенных дифференциальных уравнений и его компьютерная реализация;
- асимптотическое разложение решения краевой задачи для нелинейного сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения с импульсным воздей-

ствием с управлением.

Личный вклад соискателя. Общая цель исследования была поставлена научным руководителем, д.ф.-м.н. Т.М.Иманалиевым. Задания на исследования отдельных типов уравнений были предложены д.ф.-м.н., профессором К.К.Какишовым. Все полученные результаты принадлежат лично соискателю.

Апробация результатов. Результаты работы сообщались:
на международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (г. Бишкек – с. Бозтери, 2006 г.),
на семинарах ИФН при КНУ им. Ж.Баласагына и ИТПМ НАН КР.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основное содержание настоящей работы полностью опубликовано в 10 статьях [1-6], [8-11], и тезисах доклада [7], приведенных в конце автореферата. В совместных статьях с К.К.Какишовым и Т.М.Иманалиевым постановка задач и обсуждение результатов принадлежит им, а получение результатов осуществлено автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов, списка использованной литературы из 94 наименований и двух приложений, всего 101 страница текста. Нумерация разделов – двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела. Нумерация теорем, формул, следствий, примеров – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе.

Основное содержание диссертации

Для краткости будем пользоваться следующим соглашением. Все функции и константы (в том числе матричные, векторные), участвующие в постановках задач, будем считать известными, кроме функций (или вектор-функций) y, z и v (также с индексами), являющихся неизвестными; все известные функции предполагаются непрерывными по своим переменным, ε - малый положительный параметр; $C^{[1]}$ – пространство функций, непрерывных и кусочно непрерывно-дифференцируемых; K^1 – пространство (вектор-)функций, имеющих конечное количество разрывов первого рода внутри соответствующей области из R, непрерывных и дифференцируемых слева; θ и δ - соответственно функции Хэвисайда и Дирака.

В главе 1 содержится обзор работ по тематике диссертации и используемый материал:

1.1 - по методам исследования сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с непрерывными решениями;

1.2 - по уравнениям с импульсным воздействием и других видов уравнений с разрывами заданных функций;

1.3 - основные положения интервального анализа.

В главе 2 изучены скалярные сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.

В 2.1 построена общая схема исследования скалярного уравнения

$$\varepsilon y'(x,\varepsilon) = f_0(x, y(x,\varepsilon)) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) f_k(x, y(x,\varepsilon)) + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} A_k \delta(p_k), (0 \le x \le 1) \qquad (1)$$

где $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < 1$ – некоторые числа, A_k – некоторые числа. Решение этого уравнения ищем в классе $K^1[0, 1]$, его элементы представляются в виде

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) y_k(x), \ y_0(x) \in C^1[0,1], y_k(x) \in C^1[x_k,1], k=1..N. \qquad (2)$$

Показано, что (2) удовлетворяет (1) тогда и только тогда, когда

$$y_k(x_k,\varepsilon) = A_k, \ k=1..N; \qquad (3)$$

$$\varepsilon y_0'(x,\varepsilon) = f_0(x, y_0(x,\varepsilon)), \ (0 \le x \le 1),$$

$$\varepsilon y_1'(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{1} f_k(x, y_0(x,\varepsilon) + y_1(x,\varepsilon)) - f_0(x, y_0(x,\varepsilon)), \ \ (x_1 \le x \le 1),$$

$$\varepsilon y_2'(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{2} f_k(x, \sum_{k=0}^{2} y_k(x,\varepsilon)) - \sum_{k=0}^{1} f_k(x, \sum_{k=0}^{1} y_k(x,\varepsilon)), \ \ (x_2 \le x \le 1),$$

……………………………………………………………………………………

$$\varepsilon y_N'(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x, \sum_{k=0}^{N} y_k(x,\varepsilon)) - \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x, \sum_{k=0}^{N-1} y_k(x,\varepsilon)), \ \ (x_N \le x \le 1). \qquad (4)$$

Накладывается основное условие

(α): существуют такие постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N > 0$, что $f_{0y}'(x,y) \le -\alpha_0$, $f_{ky}'(x,y) \le -\alpha_k$, $k=1..N$.

В 2.2 сформулированы и для полноты доказаны вспомогательные результаты, необходимые для дальнейшего:

Если $g(x,y) \in C^{1,1}([a,b] \times R)$ и $g_y'(x,y) \le -\alpha < 0$, $\alpha = const$, то уравнение $g(x,y) = 0$ имеет единственное решение $y = v(x) \in C^1[a,b]$ для всех $x \in [a, b]$.

Если $f(y) \in C^1(R)$, $-\gamma \le f'(y) \le -\alpha < 0$, $\alpha, \gamma = const$, и $f(0)=0$, то решение дифференциального уравнения $y'(x) = f(y(x)$ удовлетворяет неравенствам $|y(a)|\, e^{-\gamma(x-a)} \le |y(x)| \le |y(a)|\, e^{-\alpha(x-a)}$ для всех $x \in [a, b]$.

Если $f(x,y) \in C^{0,1}([a,b] \times R)$, $f_y'(x,y) \le -\alpha < 0$, $\alpha = const$, $f(x, 0) \equiv 0$, $|h(x)| < h_0$, то решение дифференциального уравнения $\varepsilon y'(x) = f(x,y(x)) + h(x)$с начальным условием, удовлетворяющим неравенству

$$|y(a)| < \frac{h_0}{\alpha}, \tag{5}$$

существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$|y(x)| \le \frac{h_0}{\alpha} \text{ для всех } x \in [a, b]; \tag{6}$$

Если $||H(x,y)||_{[a,b]\times[-1,1]} < h_0 = const$, то решение дифференциального уравнения $\varepsilon y'(x)=f(x,y(x))+h(x,\varepsilon\, y(x))$ с начальным условием, удовлетворяющим неравенству (5) при достаточно малых ε существует (возможно, неединственно) и удовлетворяет неравенству (6).

Если $\varphi(x,y) \in C^2([a, b]\times R)$, $\varphi(x, 0)\equiv 0$, $p>0$, то $|\varphi(x,y)-\varphi(a,y)| \le \|\varphi_{xy}''(x,y)||_{[a, b]\times[-p,p]}(x-a)|y|$ для всех $(x,y) \in [a, b]\times[-p, p]$.

«Основная лемма алгоритма построения асимптотических разложений» (она ранее использовалась в неявном виде):

Если $F(x,y) \in C^{1,1}([a, b]\times R)$, $V(x) \in C^1[a, b]$; $F(x, V(x)) \equiv 0$; $|P(\tau)| \le Ce^{-\alpha\tau}$, $\alpha>0$, то $\frac{1}{\varepsilon}|\mathrm{F}(x,V(x)+P(\frac{x-a}{\varepsilon}))-F(a,V(a)+P(\frac{x-a}{\varepsilon}))| \le C_1 = const$ при $\varepsilon \to 0$.

В 2.3 показано, что условие (α) обеспечивает существование решения вырожденного уравнения в классе K^1:

$$f_0(x,v(x)) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) f_k(x,v(x)) = 0, \tag{7}$$

а в 2.4 показано, что оно также обеспечивает существование решения уравнения (1) с начальным условием

$$y(0)=b, \tag{8}$$

и его представление в виде

$$y(x,\varepsilon) = v_0(x) + \Pi_0(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon\xi_0(x,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{N} \theta(x-x_k)(v_k(x) + \Pi_k(\frac{x-x_k}{\varepsilon}) + \varepsilon\xi_k(x,\varepsilon)),$$

где функции $v_k(x)$ выражают решение уравнения (7) на отдельных отрезках, функции $\Pi_0(\tau)$ и $\Pi_k(\tau_k)$ являются функциями типа пограничного слоя, $|\xi_0(x,\varepsilon)| \le C_{00}$ и $|\xi_k(x,\varepsilon)| \le C_{0k}$, $k=1..N$ соответственно, причем при $\varepsilon \to 0$ это решение сходится к разрывному решению уравнения (3) на $0<x\le 1$.

Рассмотрен пример, показывающий правильность построения метода.

В 2.5 показано, что разработанная методика построения асимптотики также может применяться и к уравнениям как с сингулярными, так и регулярными возмущениями, а в 2.6 - также - к краевым задачам, где величина скачка играет роль управления.

В главе 3 изучены системы сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, вида

$$z'(x,\varepsilon) = \gamma(x, y(x,\varepsilon), z(x,\varepsilon)), \qquad \varepsilon y'(x,\varepsilon) = f_0(x, y(x,\varepsilon), z(x,\varepsilon)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)f_k(x,y(x,\varepsilon),z(x,\varepsilon))+\varepsilon\sum_{k=1}^{N}A_k\delta(p_k),\ (0\le x\le 1), \tag{9}$$

с (8) и начальным условием для функции $z(x,\varepsilon)$:

$$z(0,\varepsilon)=b_0. \tag{10}$$

В 3.1 построена общая схема исследования задачи (9)-(10) в классе $C^{[1]}[0,1]\times K^1[0,1]$ в предположениях, что заданные функции – достаточно гладкие, имеют ограниченные первые производные, а также –

(α_2) существуют такие положительные постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$, что $f_{0y}'(x,y,z)\le -\alpha_0, f_{ky}'(x,y,z)\le -\alpha_k, k=1..N$.

Получена следующая цепочка систем уравнений для определения $z(x,\varepsilon)$ и $y_0(x,\varepsilon), y_1(x,\varepsilon), \ldots, y_N(x,\varepsilon)$ на соответствующих отрезках, при условии вида (3):

$$z'(x,\varepsilon)=\gamma(x, y_0(x,\varepsilon), z(x,\varepsilon)),\ (0\le x\le x_1),$$

$$\varepsilon y_0'(x,\varepsilon)=f_0(x,y_0(x,\varepsilon),z(x,\varepsilon)),\ (0\le x\le 1),$$

$$z'(x,\varepsilon)=\gamma(x, y_0(x,\varepsilon)+y_1(x,\varepsilon), z(x,\varepsilon)),\ (x_1<x\le x_2),$$

$$\varepsilon y_1'(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{1}f_k(x,y_0(x,\varepsilon)+y_1(x,\varepsilon),z(x,\varepsilon))-f_0(x,y_0(x,\varepsilon)),\ (x_1\le x\le 1),$$

…………………………………………………………………………………

$$z'(x,\varepsilon)=\gamma(x, \sum_{k=0}^{N}y_k(x,\varepsilon), z(x,\varepsilon)),\ (x_N<x\le 1),$$

$$\varepsilon y_N'(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}f_k(x,\sum_{k=0}^{N}y_k(x,\varepsilon))-\sum_{k=0}^{N-1}f_k(x,\sum_{k=0}^{N-1}y_k(x,\varepsilon)),\ (x_N\le x\le 1). \tag{11}$$

В 3.2 сформулированы и доказаны вспомогательные результаты, необходимые для дальнейшего:

Если $\gamma(x,y,z)\in C^{0,1,1}([a, b]\times R^2)$, $g(x,y,z)\in C^{1,1,1}([a, b]\times R^2)$, указанные производные равномерно ограничены и выполняется условие $g_y'(x,y,z)\le -\alpha<0$, $\alpha=$ $=const$, то система из дифференциального и алгебраического уравнений

$$\begin{aligned} &z'(x)=\gamma(x, y(x), z(x))\\ &g(x, y(x), z(x))=0 \end{aligned} \tag{12}$$

с начальным условием $z(a)=b_1$ имеет единственное решение $\{z=w(x)\in C^1[a, b], y=v(x)\in C^1[a, b]\}$ для всех $x\in[a, b]$.

Если заданные функции $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)\in C^{0,1,1}([a,b]\times R^2)$, $h(x,z)\in$ $\in C^{0,1}([a,b]\times R)$, указанные производные равномерно ограничены по модулю (числом L) и выполняются условия $f(x,0,z)=0$, $f'_y(x,y,z)\le -\alpha<0$, $\alpha=const$, $\int_a^b|g(x,0,0)|\,dx\le C_g=const$, то решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &z'(x)=g(x, y(x), z(x)),\\ &\varepsilon y'(x)=f(x, y(x), z(x))+h(x, z(x)) \end{aligned} \tag{13}$$

с начальными условиями

$z(a)=0, y(a)=0$ (14)

существует и удовлетворяет неравенствам

$$\| z \|_{[a,b]} \leq C, \| y \|_{[a,b]} \leq C, \quad (15)$$

где константа C зависит только от $\alpha, L, C_g,\ h_0 \equiv \| h(x,0) \|_{[a,b]}$.

В 3.3 доказано, что условие (α_2) обеспечивает существование решения вырожденной системы уравнений в классе $C^{[1]} \times K^1$:

$w'(x) = \gamma(x, v(x), w(x)),\ w(0)=b_0,$

$$f_0(x, v(x), w(x)) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) f_k(x, v(x), w(x)) = 0. \quad (16)$$

В 3.4 доказано, что условие (α_2) обеспечивает существование решения задачи (9)-(8)-(10) в классе $C^{[1]} \times K^1$ и его представление в виде

$z(x,\varepsilon)=w(x)+\ \varepsilon\zeta(x,\varepsilon),$

$$y(x,\varepsilon) = v_0(x) + \Pi_0(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon\xi_0(x,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{N} \theta(x - x_k)(v_k(x) + \Pi_k(\frac{x - x_k}{\varepsilon}) + \varepsilon\xi_k(x,\varepsilon)),$$

где функции $v_k(x)$ выражают вторую компоненту решения уравнения (16) на отдельных отрезках, функции $\Pi_0(\tau)$ и $\Pi_k(\tau_k)$ являются функциями типа пограничного слоя, $|\zeta(x,\varepsilon)| \leq C_0$,$|\xi_0(x,\varepsilon)| \leq C_{00}$ и $|\xi_k(x,\varepsilon)| \leq C_{0k}$, $k=1..N$.

В главе 4 изучены векторно-матричные сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, вида

$$\varepsilon y'(x,\varepsilon) = f_0(x, y(x,\varepsilon)) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) f_k(x, y(x,\varepsilon)) + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} A_k \delta(p_k), (0 \leq x \leq 1) \quad (17)$$

с начальным условием вида (8), где A_k – некоторые векторы, $f_0(x,y),\ f_k(x,y) \in$ $\in C^2([0,1] \times R^m \to R^m)$ – вектор-функции, $k=1..N$, m – натуральное число.

В 4.1 построена общая схема исследования задачи (17)-(8) в предположениях, что заданные функции – достаточно гладкие, имеют ограниченные первые производные.

Получена следующая цепочка систем нелинейных дифференциальных уравнений для определения неизвестных дифференцируемых вектор-функций $y_0(x,\varepsilon),\ y_1(x,\varepsilon),\ \ldots,\ y_N(x,\varepsilon)$ на соответствующих отрезках:

$$\varepsilon y_0'(x,\varepsilon) = f_0(x, y_0(x,\varepsilon)),\ (0 \leq x \leq 1),$$

$$\varepsilon y_1'(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{1} f_k(x, y_0(x,\varepsilon) + y_1(x)) - f_0(x, y_0(x,\varepsilon)),\ \ (x_1 \leq x \leq 1),$$

$$\varepsilon y_2'(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{2} f_k(x, \sum_{k=0}^{2} y_k(x,\varepsilon)) - \sum_{k=0}^{1} f_k(x, \sum_{k=0}^{1} y_k(x,\varepsilon)),\ \ (x_2 \leq x \leq 1),$$

……………………………………………………………………………

$$\varepsilon y_N'(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N} f_k(x,\sum_{k=0}^{N} y_k(x,\varepsilon))-\sum_{k=0}^{N-1} f_k(x,\sum_{k=0}^{N-1} y_k(x,\varepsilon)),\ \ (x_N\le x\le 1). \quad (18)$$

Сформулировано следующее условие на вектор-функции, которые будут возникать в дальнейшем для оценок разности между решениями исходных и вырожденных уравнений:

(A) $f(x,0)\equiv 0$ и $(\exists\alpha>0)(\, f_1(x,y_1,\ldots,y_m)\, y_1+\ldots+f_m(x,y_1,\ldots,y_m)\, y_m\le-\alpha(y_1^2+\ldots+y_m^2))$ (здесь нижний индекс обозначает компоненту вектора).

В 4.2 получены следствия из результатов 2.2 для многомерного случая. Доказано следующее.

Если для вектор-функции $f(x,y)$ выполняется условие (А), то решение начальной задачи для системы уравнений $y'(x)=f(x,y(x))$ с начальным условием $y(a)=y_0$ удовлетворяет неравенству (по эвклидовой норме) $||y(x)||\le||y_0||e^{-\alpha(x-a)}$.

Если для вектор-функции $f(x,y)$ выполняется условие (А) и $h(x)\equiv\{h_1(x),\ldots,h_m(x)\}\in C([a,\ b]\to R^m)$, $||h(x)||<h_0$, то решение системы уравнений $\varepsilon y'(x)=$ $=f(x,y(x))+h(x)$ с начальным условием, удовлетворяющим неравенству $||y(a)||<$ $<\frac{h_0}{\alpha}$ существует и удовлетворяет неравенству $||y(x)||\le\frac{h_0}{\alpha}$ для всех $x\in[a,\ b]$.

В 4.3 исследована система вырожденных уравнений, соответствующая (17):

$$f_0(x,v(x))+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)\, f_k(x,v(x))=0. \quad (18)$$

Решение этой системы функциональных алгебраических уравнений ищется в виде:

$$y(x)=v(x)\equiv v_0(x)+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)v_k(x), \quad (19)$$

где $v_0(x),\ v_1(x),\ \ldots,\ v_N(x)$ – неизвестные непрерывные вектор-функции.

Подстановка (19) в (18) дает

$$f_0(x,v_0(x)+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)v_k(x))+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)\, f_k(x,v_0(x)+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)v_k(x))=0.$$

Неизвестные вектор-функции $v_0(x),\ v_1(x),\ \ldots,\ v_N(x)$ соответственно должны удовлетворять следующей цепочке систем нелинейных функциональных алгебраических уравнений на соответствующих отрезках:

$f_0(x,v_0(x))=0,\qquad (0\le x\le x_1),$

$f_0(x,v_0(x)+v_1(x))+f_1(x,v_0(x)+v_1(x))=0,(x_1<x\le x_2),$

…

Вторая система уравнений содержит две неизвестных вектор-функции, то есть, вообще говоря, имеет бесконечное количество решений. Вместе с тем, сумма $v_0(x)+v_1(x)$ может быть определена однозначно. Поэтому требуется, чтобы первое равенство выполнялось на всем отрезке, и т.д. Таким образом, получена следующая цепочка систем:

$$f_0(x,v_0(x))=0, \qquad (0\le x\le 1),$$

$$f_0(x,v_0(x)+v_1(x))+f_1(x,v_0(x)+v_1(x))=0, \qquad (x_1\le x\le 1),$$

$$\sum_{k=0}^{2} f_k(x,\sum_{k=0}^{2} v_k(x))=0, \qquad (x_2\le x\le 1),$$

. . .

$$\sum_{k=0}^{N} f_k(x,\sum_{k=0}^{N} v_k(x))=0, \qquad (x_N\le x\le 1). \tag{20}$$

Установлено, что непосредственный перенос условия типа (α) на многомерный случай (замена требования отличия от нуля производной требованием отличия от нуля якобиана) невозможен: существует двумерное отображение, для которого якобиан не равен нулю, но не имеющее обратного: $f(u,v)=9u^2e^v-e^{3v}$, $g(u,v)=ue^{2v}-u^3$: якобиан равен $18u^2e^{3v}+3e^{5v}+27u^4e^{3v}>0$, но $\{f(\pm1,0),g(\pm1,0)\}=(8,0)$.

Поэтому наложено условие

(V) Система (20), $K=1..N$, имеет непрерывные решения - вектор-функции $v_0(x)$, $v_1(x)$, ..., $v_N(x)$ на соответствующих отрезках.

При выполнении этого условия система уравнений (17) имеет решение в классе $K^1([0,1]\to R^m)$, представимое в виде (19).

Введено обозначение

$$V_K(x)\equiv\sum_{k=0}^{K} v_k(x), K=0..N, \tag{21}$$

вектор-функция $V_K(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$ при $K=0$ и на отрезке $[x_K, 1]$ при $K>0$, тогда система (20) переписывается в виде

$$f_0(x,V_0(x))=0, \qquad (0\le x\le 1),$$

$$\sum_{k=0}^{1} f_k(x,V_1(x))=0, \qquad (x_1\le x\le 1),$$

$$\sum_{k=0}^{2} f_k(x,V_2(x))=0, \qquad (x_2\le x\le 1),$$

. . .

$$\sum_{k=0}^{N} f_k(x, V_N(x)) = 0, \qquad (x_N \le x \le 1). \tag{22}$$

Доказано, что при выполнении условий: 1) (V); 2) (A) для функций

$$F_0(x,y) = f_0(x, v_0(x)+y)\ ,\ F_K(x,y) = \sum_{k=0}^{K} f_k(x, v_k(x)+y)\ ,\ K = 1..N,$$

с константами $\alpha,\ \alpha_1, \ldots,\ \alpha_N$ соответственно,

начальная задача (17)-(8) имеет единственное решение в классе $K^1([0,1] \to R^m)$, представимое в виде

$$y(x,\varepsilon) = v_0(x) + \Pi_0(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon\xi_0(x,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{N} \theta(x-x_k)(v_k(x) + \Pi_k(\frac{x-x_k}{\varepsilon}) + \varepsilon\xi_k(x,\varepsilon)),$$

где вектор-функции $v_0(x),\ v_1(x),\ \ldots,\ v_N(x) \in C^1[0,\ 1]$ удовлетворяют системе (20), вектор-функции $\Pi_0(\tau)$ и $\Pi_k(\tau_k)$ удовлетворяют условиям

$||\Pi_0(\tau)|| \le C_0\ e^{-\beta_0\tau}$ и $||\Pi_k(\tau_k)|| \le C_k\ e^{-\beta_k\tau_k}$, $k=1..N, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N$ – положительные константы, соответственно,

вектор-функции $\xi_0(x,\varepsilon)$ и $\xi_k(x,\varepsilon)$ удовлетворяют условиям

$\|\xi_0(x,\varepsilon)|| \le C_{00}$ и $\|\xi_k(x,\varepsilon)|| \le C_{0k}, k=1..N$ соответственно,

причем при $\varepsilon \to 0$ это решение сходится к разрывному решению соответствующей системы вырожденных уравнений на полусегменте $0<x \le 1$.

В 4.5 рассматриваются два пути доказательства условия устойчивости (A) для конкретных вектор-функций: методы дифференциального исчисления (практически – только для случая $m=2$ и функция $f(x,y)$ – многочлен степени не выше второй), либо методы доказательных вычислений.

П р и м е р. $m=2$,

$f(x,y) \equiv \{-y_1 - xy_1 + a_0y_1^3 + a_1y_1^2 y_2 + a_2y_1y_2^2 + a_3y_2^3,$

$-y_2 + b_0y_1^3 + b_1y_1^2 y_2 + b_2y_1y_2^2 + b_3y_2^3\}$,

где $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ – заданные постоянные.

С применением интервального анализа доказано, что для системы уравнений

$\varepsilon y_1'(x) = h_{10}(x) - y_1(x) - xy_1(x) - 5y_1^3(x) + 2y_1^2(x)\, y_2(x) + 3y_1(x)y_2^2(x) +$

$+ \theta(x-0.5)(\ h_{11}(x) - y_1(x) - xy_1(x) - y_1^3(x)\ -7y_1(x)y_2^2(x) + 2\ y_2^3(x)),$

$\varepsilon y_2'(x) = h_{20}(x) - y_2(x) - 2y_1^3(x) + y_1(x)\, y_2^2(x)\ - 3y_2^3(x) +$

$+ \theta(x-0.5)(\ h_{21}(x) - y_2(x)\ -3y_1^3(x) + 2y_1^2(x)\, y_2(x)\ - y_2^3(x)) \qquad (0 \le x \le 1)$

выполняется условие (A).

Выводы. В диссертации найдены более общие и непосредственно проверяемые условия для применения разработанного в Кыргызстане метода построения асимптотических разложений решений сингулярно-возмущенных как скалярных, так и векторно-матричных обыкновенных дифференциальных уравнений.

С их помощью получены более широкие условия для разрешимости начальных задач для нелинейных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Получены асимптотические по малому параметру оценки решения таких задач.

Результаты диссертации, связанные с развитием асимптотического метода в решении начальных задач для нелинейных сингулярно-возмущенных уравнений, могут быть использованы для развития других разделов теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных и дифференциальных уравнений.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю доктору физико-математических наук Иманалиеву Таалайбеку Мурзабековичу за ценные советы и постоянное внимание при проведении настоящих исследований.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Какишов Ж.К. Асимптотические методы решения сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений при разрывной правой части, в случае, когда точка разрыва неизвестна [Текст] / Ж.К. Какишов // Вестник КГНУ, 2001. – Вып.7. – С.134 – 139.
2. Какишов Ж.К. Асимптотические методы решения сингулярно-возмущенных импульсных дифференциальных уравнений [Текст] / Ж.К. Какишов // Вестник КГНУ. – 2001. – Вып. 7. – С.139–143.
3. Какишов Ж.К. Асимптотические методы решения сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью со многими малыми параметрами при старшей производной [Текст] / К.К. Какишов, Ж.К. Какишов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С.134–139.
4. Какишов Ж.К. Асимптотические методы решения сингулярно-возмущенных систем импульсных дифференциальных уравнений [Текст] / К.К. Какишов, Ж.К. Какишов // Исследования по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С.149–154.
5. Какишов Ж.К. Асимптотические методы решения сингулярно-возмущенных импульсных дифференциальных уравнений [Текст] / К.К. Какишов, Ж.К. Какишов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып.33. – С.128–133.
6. Какишов Ж.К. Асимптотические методы решения сингулярно-возмущенных импульсных дифференциальных уравнений [Текст] / К.К. Какишов, Ж.К. Какишов // Вестник КГНУ. – Бишкек, 2005. – Вып. 3. – С.37-41.
7. Какишов Ж.К. Асимптотические методы решений сингулярно-возмущенных импульсных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями в критическом случае [Текст] / Ж.К. Какишов // Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики: тезисы докладов международной научной конференции. – Алматы, 2005. – С.104-105.
8. Какишов Ж.К. Асимптотические методы решений сингулярно-возмущенных импульсных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями в критическом случае [Текст] / Ж.К. Какишов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 34. – С.97–103.
9. Какишов Ж.К. Асимптотические методы решения сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействи-

ем [Текст] / К.К. Какишов, Ж.К. Какишов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 34. – С.93-97.
10. Какишов Ж.К. Асимптотические методы решения сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений со многими малыми параметрами при производных [Текст] / К.К. Какишов, Ж.К. Какишов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2008. – Вып. 38. – С.54–59.
11. Kakishov J. Asymptotical method of solving singular perturbed differential and integro-differential equations with impulse impact [Текст] / T.Imanaliev, J. Kakishov. - Actual Problems of Control Theory, Topology and Operator Equations: Proceedings of international Jubilee conference. - Aachen (Germany): Shaker Verlag, 2009. – Pp. 97-103.

РЕЗЮМЕ

Какишов Жылдызбек Каныбекович. «Импульстук таасири болгон, сингулярдуу козголгон, сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелерди чыгаруунун асимптотикалык методдору» темасы боюнча, 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу деген адистик боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн диссертация

Урунттуу сөздөр: дифференциалдык теңдеме, импульстук таасир, сингулярдуу козголуу, асимптотикалык метод, Дирак дельта-функциясы, функциянын чукул өзгөрүшү, Хевисайд функциясы, ички четки катмар, туруктуулук шарты.

Сингулярдуу козголгон, сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы маселерди чыгаруунун жалпы асимптотикалык метод өнүктүрүлгөн. Анын негизинде импульстук таасири болгон, сингулярдуу козголгон, сызыктуу эмес скалярдык жана вектор-матрицалык дифференциалдык теңдемелер жана алардын системалары үчүн баштапкы маселердин жашоосунун жана кичине параметр боюнча чукул өзгөрүштөрү болгон асимптотикасынын кеңирээк, тикеден-тике текерилүүчү шарттары табылган. Мындай шарттардын акаруусу үчүн далил боло алуучу алгоритм түзүлгөн жана жүзөгө ашырылган.

Пайда болгон натыйжалар сингулярдуу менен регулярдуу козголуулары болгон дифференциалдык теңдемелерге жалпыланган жана импульстук таасири башкаруу катары болгон четки маселеге колдонулган.

РЕЗЮМЕ

диссертации Какишова Жылдызбека Каныбековича на тему: «Асимптотические методы решения сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, импульсное воздействие, сингулярное возмущение, асимптотический метод, дельта-функция Дирака, скачок функции, функция Хевисайда, внутренний пограничный слой, условие устойчивости.

Развит общий асимптотический метод решения начальных задач для нелинейных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений. На его основе найдены более широкие, непосредственно проверяемые условия для существования и наличия асимптотики по малому параметру со скачками решений начальных задач для скалярных и векторно-матричных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и их систем. Построен и реализован доказательный алгоритм для проверки выполнения таких условий.

Полученные результаты обобщены для уравнений с сингулярными и регулярными возмущениями и применены к краевой задаче, где импульсное воздействие является управлением.

Abstract

Kakishov Jyldyzbek Kanybekovich. Dissertation on the theme "Asymptotical methods to solve nonlinear singularly perturbed differential equations with impulse impact" submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: differential equations, impulse impact, singular perturbation, asymptotical method, Dirac delta-function, function jump, Heaviside function, inner boundary layer, stability condition

The general asymptotical method to solve initial value problems for nonlinear singularly perturbed differential equations is developed. On its base, more general, immediately testable conditions are found to provide the existence and presence of asymptotic with respect to a small parameter for solutions with jumps of initial value problems for scalar and vector-matrix singularly perturbed differential equations with impulse impact and systems of such equations. A validating algorithm is built and implemented to check up fulfilling of such conditions.

The results obtained are generalized for equations with both singular and regular perturbations and applied to a boundary value problem where the impulse impact is a kind of control.