

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО
ОТДЕЛЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Диссертационный совет К 01.19.599

На правах рукописи
УДК 517.956

Мамытов Айтбай Омонович

**Обратные задачи для одного класса дифференциальных и интегро-
дифференциальных уравнений в частных производных четвертого и
пятого порядков**

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош – 2022

Работа выполнена на кафедрах “Прикладная математика” Ошского технологического университета им. М.М. Адышева и “Бизнес информатика и математика в экономике” Ошского государственного университета

Научный руководитель: Асанов Авыт, доктор физико-математических наук, профессор Кыргызско-Турецкого университета “Манас”.

Официальные оппоненты: Искандаров Самандар, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики

Белеков Кенжебек Жолдошевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественно-математических дисциплин института повышения квалификации и переподготовки кадров им. М. Рахимовой при Кыргызском государственном университете им. И. Арабаева.

Ведущая организация: Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына, кафедра дифференциальных уравнений. Адрес: 720033, г. Бишкек, ул. Абдымомунова, 238.

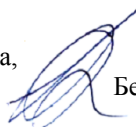
Защита состоится “9 февраля” 2022 года в 13⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета К 01.19.599 по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете, Жалал-Абадском государственном университете и Институте природных ресурсов Южного отделения НАН Кыргызской Республики по адресу: 723500, г. Ош ул. Ленина, 331, ауд. 203.

Идентификационный код онлайн трансляции защиты диссертации: <https://vc.vak.kg/b/k01-wvo-b11-2lm>

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета и на сайте диссертационного совета: oshsu.kg

Автореферат разослан 6 января 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент



Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Теория обратных задач - быстро развивающееся направление современной математической физики и областей ее применения. Один из основоположников квантовой механики В. Гейзенберг в своей книге «Физика и философия» утверждал, что основное уравнение материи, которое считается математической моделью всей материи, представляет собой сложную систему интегральных уравнений.

Интегральные, интегро-дифференциальные уравнения можно найти во всех областях науки, например, уравнение переноса, возникающее в процессе нейтронной торможении, которое играет важную роль в современной физике. Мы знаем, что колебания тонкой струны выражаются дифференциальными уравнениями с частными производными второго порядка. Если мы возьмем тонкую сплошную балку вместо струны, то ее колебательный процесс выражается дифференциальными уравнениями с частными производными четвертого порядка. Такие проблемы возникают при проектировании тяжелой техники.

Обратные задачи играют важную роль в процессе распознавания природных явлений, а аппарат интегральных уравнений широко используется в физике, механике, теории управления и прикладной математике. Термин «обратная задача» был предложен видными русскими математиками М.М. Лаврентьевым и В.Г. Романовым.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами. Работа в Институте математики НАН КР «Методы решения обратных задач и интегральных уравнений» (2011-2013). Рег. 0006226.

Цель и задачи исследования. Целью исследования является доказательство разрешимости обратных задач для одного класса дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков в частных производных.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

- найти достаточные условия разрешимости обратных задач для одного класса дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений четвертого порядка в частных производных;
- найти достаточные условия разрешимости обратных задач для одного класса дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений пятого порядка в частных производных.

Научная новизна работы

- найдены достаточные условия решения обратных задач для одного класса дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений четвертого порядка с частными производными;

- определены условия существования и единственности решений обратных задач для одного класса дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений пятого порядка с частными производными.

Практическая значимость полученных результатов. Результаты диссертации носят теоретический характер. Однако, учитывая, что обратные задачи для дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений широко используются при решении конкретных задач физики и техники, следует, что результаты данной работы могут быть использованы для решения некоторых прикладных задач. Мы надеемся, что полученные в диссертации результаты будут способствовать развитию теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений высокого порядка.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- достаточные условия для разрешимости задачи определения правой части уравнения для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка;

- достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения обратной задачи, с дополнительными условиями в отрезках для линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка;

- достаточные условия для разрешимости задачи восстановления ядра уравнения для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка;

- разрешимость задачи определения правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка;

- разрешимость обратной задачи определения ядра интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка;

- разрешимость обратной задачи определения правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка;

- разрешимость обратной задачи и алгоритм решения обратной задачи восстановления ядра и правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка.

Личный вклад соискателя. Все научные результаты, представленные в диссертации, принадлежат только автору. Задачи поставлены научным руководителем. В совместных работах [3]-[5] и [10] обсуждение результатов принадлежит К.Б. Матановой, Д.А. Турсунову и К.Г. Кожобекову, а научные результаты принадлежат автору.

Апробация результатов исследования. Результаты работы докладывались и обсуждались на Международных научных конференциях:

- Международная научная конференция «Современные проблемы математики», посвященная 70-летию академика А. Борубаева. - Бишкек: Институт математики НАН КР, 16-18 июня 2021 г.;

- Международная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы образования и науки в контексте регионального развития и цифровизации страны», посвященная 80-летию ОшГУ. - Ош: Ошский государственный университет, 28.05.2020;

- «III Борубаевские чтения», посвященные 35-летию Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики. - Бишкек: Национальная академия наук Кыргызской Республики, 2019;

- VI Конгресс Всемирного математического общества тюркоязычных государств (Астана, Казахстан, 2017);

- Международная научная конференция «Асимптотические, топологические и компьютерные методы математики», посвященной 80-летию Иманалиева (Бишкек, сентябрь 2016 г.).

А также на межрегиональных семинарах математиков южного Кыргызстана «Актуальные проблемы математики и их применения», руководитель семинара член-корр. НАН КР, профессора К. Алымкулова (г. Ош, 2019-2021 гг.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. По результатам исследований соискателем опубликованы: 10 статей [1]-[10] и один тезис доклада [11]. В том числе две статьи [1]-[2] опубликованы в журналах, индексируемых в базе RSCI. Импакт факторы, четырех журналов [1]-[4], в РИНЦе не менее 0,1. Две статьи опубликованы на кыргызском языке.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из оглавления, списка условных обозначений и определений, принятых в работе, введения, четырех глав, разбитых на 12 параграфов, выводов, списка использованной литературы. Список использованной литературы содержит 60 наименований. Объем текста 100 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИЙ» состоит из двух параграфов. В § 1.1 «Обзор литературы» дается обзор литературы по теме диссертации. В данном параграфе проведен анализ научных результатов работ других авторов, наиболее близких к теме предлагаемой диссертационной работы. В «§ 1.2. Обзор результатов диссертации» приведен подробный обзор научных результатов диссертации.

Вторая глава «МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» состоит из двух параграфов. В «§ 2.1. Объекты и предметы исследования» приведены объекты и предметы исследования.

Объектом исследования диссертации является обратная задача для одного класса дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков в частных производных.

Предмет исследования – нахождение достаточных условий, обеспечивающих разрешимость обратных задач для одного класса дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков в частных производных.

В § 2.2 приведены методы исследования разрешимости обратных задач, рассматриваемых в диссертации: принцип сжимающих отображений, однозначная разрешимость интегрального уравнения Вольтерра второго рода, норма интегрального оператора, резольвента ядра, функция Грина.

Научные результаты диссертации приведены в главах 3, 4.

В третьей главе под названием «ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА» исследованы разрешимости обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Глава 3 состоит из четырех параграфов, в первом параграфе третьей главы исследована разрешимость обратной задачи определения правой части дифференциального уравнения четвертого порядка, т.е. рассматривается следующая обратная задача

$$u_{tt}(t, x) = a_0 u_{ttxx}(t, x) + a_1 u_{txx}(t, x) + a_2(t, x) u_x(t, x) + a_3(t, x) u(t, x) + \varphi(t) f(t, x) + F(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(0, x) = \psi_1(x), \quad u_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(t, x_0) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad x_0 \in (0, 1), \quad (4)$$

где $0 < T$, $0 < a_0$, $a_1 < 0$, x_0 – заданные постоянные числа, $a_2(t, x)$, $a_3(t, x)$, $f(t, x)$, $F(t, x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $g(t)$ – известные функций,

$a_2, a_3, f, F \in C(\bar{\Omega})$, $\psi_1, \psi_2 \in C^2[0, 1]$, $g \in C^2[0, T]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, $g(0) = \psi_1(x_0)$, $g'(0) = \psi_2(x_0)$; $\varphi(t)$ и $u(t, x)$ – неизвестные функций.

Постановка задачи: найти функций $u \in C^{2,2}(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C[0, T]$ удовлетворяющие уравнению (1) и условиям (2)-(4).

Решение задачи. Введем обозначение $v(t, x) = u_{tt}(t, x)$, и из этого равенства определим функцию $u(t, x)$:

$$u(t, x) = \int_0^t (t-s)v(s, x)ds + \psi_2(x)t + \psi_1(x)$$

$$\text{отсюда } u_{xx}(t, x) = \int_0^t (t-s)v_{xx}(s, x)ds + \psi_2''(x)t + \psi_1''(x).$$

Учитывая обозначение $v(t, x) = u_{tt}(t, x)$ и выражения для $u(t, x)$, $u_{xx}(t, x)$, уравнение (1) запишется в виде:

$$\begin{aligned} v(t, x) = & a_0 v_{xx}(t, x) + a_1 \left(\int_0^t (t-s)v_{xx}(s, x)ds + \psi_2''(x)t + \psi_1''(x) \right) + \\ & + a_2(t, x) \left(\int_0^t (t-s)v_x(s, x)ds + \psi_2'(x)t + \psi_1'(x) \right) + \\ & + a_3(t, x) \left(\int_0^t (t-s)v(s, x)ds + \psi_2(x)t + \psi_1(x) \right) + \varphi(t)f(t, x) + F(t, x). \end{aligned}$$

Последнее равенство запишем относительно v_{xx} :

$$\begin{aligned} v_{xx}(t, x) = & -\frac{a_1}{a_0} \int_0^t (t-s)v_{xx}(s, x)ds - \frac{a_2(t, x)}{a_0} \int_0^t (t-s)v_x(s, x)ds - \\ & - \frac{a_3(t, x)}{a_0} \int_0^t (t-s)v(s, x)ds - \frac{\varphi(t)f(t, x)}{a_0} + \frac{1}{a_0} v(t, x) + F_1(t, x). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{где } F_1(t, x) = & -\frac{a_1}{a_0} (\psi_2''(x)t + \psi_1''(x)) - \frac{a_2(t, x)}{a_0} (\psi_2'(x)t + \psi_1'(x)) - \\ & - \frac{a_3(t, x)}{a_0} (\psi_2(x)t + \psi_1(x)) - \frac{F(t, x)}{a_0}. \end{aligned}$$

Учитывая, что для ядра $K(t, s) = \gamma(t-s)$, $\gamma > 0$ резольвента имеет вид $R(t, s) = \sqrt{\gamma} sh(\sqrt{\gamma}(t-s))$, $(t, s) \in \Omega$, выражение (5) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} v_{xx}(t, x) - \frac{1}{a_0} v(t, x) = & -\frac{1}{a_0} \int_0^t R(t, \tau) \left(a_2(\tau, x) \int_0^\tau (\tau-s) v_x(s, x) ds + \right. \\ & \left. + a_3(\tau, x) \int_0^\tau (\tau-s) v(s, x) ds + \varphi(\tau) f(\tau, x) - v(\tau, x) \right) d\tau - \\ & - \frac{a_2(t, x)}{a_0} \int_0^t (t-s) v_x(s, x) ds - \frac{a_3(t, x)}{a_0} \int_0^t (t-s) v(s, x) ds - \frac{\varphi(t) f(t, x)}{a_0} + F_2(t, x), \quad (6) \end{aligned}$$

$$\text{где } R(t, s) = \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} sh \left(\sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} (t-s) \right), \quad F_2(t, x) = \int_0^t R(t, \tau) F_1(\tau, x) d\tau + F_1(t, x).$$

Из граничных условий (3) и обозначения $v(t, x) = u_{tt}(t, x)$ следует, что:

$$v(t, 0) = v(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7)$$

Используя функцию Грина для краевой задачи $y''(x) - k^2 y(x) = f(x)$, $y(0) = y(1) = 0$ задачу (6)-(7) запишем в виде:

$$\begin{aligned} v(t, x) = & -\frac{1}{a_0} \int_0^1 G(x, \xi) \left(\int_0^t R(t, \tau) \left(a_2(\tau, \xi) \int_0^\tau (\tau-s) v_\xi(s, \xi) ds + a_3(\tau, \xi) \int_0^\tau (\tau-s) v(s, \xi) ds + \right. \right. \\ & \left. \left. + \varphi(\tau) f(\tau, x) - v(\tau, x) \right) d\tau + a_2(t, \xi) \int_0^t (t-s) v_\xi(s, \xi) ds + \right. \\ & \left. + a_3(t, \xi) \int_0^t (t-s) v(s, \xi) ds + \varphi(t) f(t, \xi) + a_0 F_2(t, \xi) \right) d\xi, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{sh(kx-k)sh(k\xi)}{ksh(k)}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ \frac{sh(kx)sh(k\xi-k)}{ksh(k)}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \quad 0 < k. \end{cases}$$

Для (8) применяя формулу Дирихле имеем:

$$\begin{aligned} v(t, x) = & -\frac{1}{a_0} \int_0^1 G(x, \xi) \left(\int_0^t \int_\tau^t R(t, \tau) a_2(\tau, \xi) (\tau-s) d\tau v_\xi(s, \xi) ds + \right. \\ & \left. \int_0^t \int_\tau^t R(t, \tau) a_3(\tau, \xi) (\tau-s) d\tau v(s, \xi) ds - \int_0^t R(t, \tau) v(\tau, \xi) d\tau + a_2(t, \xi) \int_0^t (t-s) v_\xi(s, \xi) ds + \right. \\ & \left. + a_3(t, \xi) \int_0^t (t-\tau) v(\tau, \xi) d\tau + \varphi(t) f(t, \xi) + a_0 F_2(t, \xi) \right) d\xi. \quad (9) \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$K_1(t, x, \xi, s) = -\frac{1}{a_0} G(x, \xi) a_2(t, \xi)(t-s) + \int_{\tau}^t R(t, \tau) a_2(\tau, \xi)(\tau-s) d\tau,$$

$$K_2(t, x, \xi, s) = -\frac{1}{a_0} G(x, \xi) \left(a_3(t, \xi)(t-s) - \int_s^t R(t, \tau) a_2(\tau, \xi)(\tau-s) d\tau \right),$$

$$m(t, x) = -\frac{1}{a_0} \int_0^1 G(x, \xi) f(t, \xi) d\xi, \quad F_3(t, x) = \int_0^1 G(x, \xi) F_2(t, \xi) d\xi,$$

тогда (9) примет вид:

$$v(t, x) = \int_0^t \int_0^1 \left(K_1(t, x, \xi, s) v_{\xi}(s, \xi) + K_2(t, x, \xi, s) v(s, \xi) \right) d\xi ds + m(t, x) \varphi(t) +$$

$$+ \int_0^t R(t, s) m(s, x) \varphi(s) ds + F_3(t, x), \quad (10)$$

Здесь считая, что $x=x_0$, равенство (10) запишем в виде:

$$m(t, x_0) \varphi(t) + \int_0^t R(t, s) m(s, x_0) \varphi(s) ds =$$

$$= g''(t) - \int_0^t \int_0^1 \left(K_1(t, x_0, \xi, s) v_{\xi}(s, \xi) + K_2(t, x_0, \xi, s) v(s, \xi) \right) d\xi ds - F_3(t, x_0). \quad (11)$$

Соотношение (11) дифференцируем по переменной x :

$$v_x(t, x) = \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial K_1(t, x, \xi, s)}{\partial x} v_{\xi}(s, \xi) + \frac{\partial K_2(t, x, \xi, s)}{\partial x} v(s, \xi) \right) d\xi ds +$$

$$+ m_x(t, x) \varphi(t) + \int_0^t R(t, s) m_x(s, x) \varphi(s) ds + \frac{\partial F_3(t, x)}{\partial x}. \quad (12)$$

В результате получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода (10), (11) и (12) относительно функции $\varphi(t), v(t, x), v_x(t, x)$.

$$\text{III}_1. \quad m(t, x_0) = -\frac{1}{a_0} \int_0^1 G(x_0, \xi) f(t, \xi) d\xi \neq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Доказана

Теорема 1. Если выполняется условие **III**₁, то решение обратной задачи (1)-(4) в пространстве $C^{2,2}(\Omega) \times C[0, T]$ существует и единственно.

Во втором параграфе этой главы исследована обратная задача:

$$u_{tt}(t, x) = a_0 u_{ttt}(t, x) + a_1 u_{xt}(t, x) + a_2(t, x) u_x(t, x) + a_3(t, x) u(t, x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) f_i(t, x) + F(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (13)$$

$$u(0, x) = \psi_1(x), \quad u_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (14)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (15)$$

$$u(t, x_i) = g_i(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1, \quad (16)$$

где $0 < T$, $0 < a_0$, $a_1 < 0$, x_i – заданные постоянные числа, $a_2(t, x)$, $a_3(t, x)$, $f(t, x)$, $F(t, x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $g(t)$ – известные функции, $a_2, a_3, f, F \in C(\Omega)$, $\psi_1, \psi_2 \in C^2[0, 1]$, $g_i \in C^2[0, T]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, $g_i(0) = \psi_1(x_i)$, $g_i'(0) = \psi_2(x_i)$; $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ и $u(t, x)$ – неизвестные функции.

Ш2. $\det(A(t)) \neq 0$, $\forall t \in [0, T]$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} m_1(t, x_1) & m_2(t, x_1) & \dots & m_n(t, x_1) \\ m_1(t, x_2) & m_2(t, x_2) & \dots & m_n(t, x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1(t, x_n) & m_2(t, x_n) & \dots & m_n(t, x_n) \end{pmatrix}, \quad m_i(t, x_j) = -\frac{1}{a_0} \int_0^1 G(x_j, \xi) f_i(t, \xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{sh(kx - k)sh(k\xi)}{ksh(k)}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ \frac{sh(kx)sh(k\xi - k)}{ksh(k)}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad k = \frac{1}{a_0} > 0.$$

Теорема 2. Если выполняется условие **Ш2**, то решение $u(t, x)$, $\varphi_i(t)$ $i = 1, 2, \dots, n$ обратной задачи (13)-(16) в пространстве $C^{2,2}(\Omega) \times C_n[0, T]$ существует и единственно.

В § 3.3 исследована обратная задача:

$$u_{tt}(t, x) = \alpha u_{xx}(t, x) + \beta u_{xt}(t, x) + \int_0^t K(t-s) u_{ss}(s, x) ds + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (17)$$

$$u(0, x) = \psi_1(x), \quad u_t'(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (18)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (19)$$

$$u(t, x_0) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad x_0 \in (0, 1) \quad (20)$$

где $\beta < 0$, $0 < \alpha$, $0 < T$, x_0 – заданные постоянные числа,

$f(t, x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $g(t)$ – известные функции, $f \in C(\Omega)$, $g \in C^3[0, T]$,

$\psi_k \in C^2[0, 1]$, $\psi_k(0) = \psi_k(1) = 0$, $(k = 1, 2)$, $\psi_1(x_0) = g(0)$, $\psi_2(x_0) = g'(0)$;

$K(t)$ и $u(t, x)$ – неизвестные функции.

$$\textbf{Ш3.} \int_0^1 G(x_0, \xi) F(0, \xi) d\xi \neq 0,$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{sh(kx-k)sh(k\xi)}{ksh(k)}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ \frac{sh(kx)sh(k\xi-k)}{ksh(k)}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

$$F(t, x) = \int_0^1 G(x, \xi) \left(\gamma \psi_2''(\xi) t + \gamma \psi_1''(\xi) - \frac{1}{\alpha} f(t, \xi) \right) + \\ + \int_0^1 G(x, \xi) \int_0^t \left(\gamma \psi_2''(\xi) s + \gamma \psi_1''(\xi) - \frac{1}{\alpha} f(s, \xi) \right) sh(\sqrt{\gamma}(t-s)) ds d\xi.$$

Теорема 3. Если выполняется условие **Ш3**, то решение $\{u(t, x), K(t)\}$ обратной задачи (9)-(12) в пространстве $C^{2,2}(\Omega) \times C[0, T]$ существует и единственно.

В § 3.4 исследован вопрос разрешимости обратной задачи об определении правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка, т.е. обратная задача об источнике:

$$u_{tt}(t, x) = \alpha u_{xxt}(t, x) - \beta u_{xx}(t, x) + \int_0^t K(t-s) u_{ss}(s, x) ds + \\ + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) h_i(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (21)$$

$$u(0, x) = \psi_1(x), \quad u_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (22)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (23)$$

$$u(t, x_i) = g_i(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

где $K(t)$, $f(t, x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $h_i(t, x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ — известные функции,

$$f \in C(\Omega), \quad \psi_1, \psi_2 \in C^2[0, 1], \quad g_i \in C^2[0, T], \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0,$$

$g_i(0) = \psi_1(x_i)$, $g_i'(0) = \psi_2(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), T, α, β — заданные положительные числа, $u(t, x)$, $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ неизвестные функции.

$$\text{Ш4. } \det A(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad A(t) = \{a_{ij}(t)\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{где } a_{ji}(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 G(x_j, \xi) h_i(t, \xi) d\xi, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{sh(kx-k)sh(k\xi)}{ksh(k)}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ \frac{sh(kx)sh(k\xi-k)}{ksh(k)}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad k = \frac{1}{a_0} > 0.$$

Теорема 4. Если выполняется условие **III₄**, то решение $\{u(t, x), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ обратной задачи (21)-(24) в пространстве $C^{2,2}(\bar{\Omega}) \times C_n[0, T]$ существует и единственно, здесь $C_n[0, T] = \underline{C[0, T] \times C[0, T] \times \dots \times C[0, T]}$.

п жолу

Заключение по главе 3. В третьей главе исследованы обратные задачи для одного класса дифференциальных и интегродифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка. В первом параграфе третьей главы доказана разрешимость обратной задачи об определении правой части дифференциального уравнения четвертого порядка.

В параграфе 3.2 найдены достаточные условия разрешимости обратной задачи с дополнительными условиями на внутренних отрезках для линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка.

В § 3.3 доказана разрешимость обратной краевой задачи с определенным значением на отрезке.

В § 3.4 определены достаточные условия разрешимости одной обратной задачи об определении правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка.

Четвертая глава под названием «ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЯТОГО ПОРЯДКА» посвящена разрешимости обратных задач для одного класса интегродифференциальных уравнений пятого порядка с частными производными.

В первом параграфе четвертой главы исследуется разрешимость обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения с частными производными пятого порядка, а именно: существование и единственность решения $\{K(t), u(t, x)\}$ следующей обратной задачи:

$$u_{xxxx}(t, x) - u_{tt}(t, x) - u_{xxx}(t, x) + \int_0^t K(t-s)u_{ss}(s, x)ds + f(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Omega, \quad (25)$$

$$u(0, x) = \psi_1(x), \quad u_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (26)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = u_x(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (27)$$

$$u(t, x_0) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad x_0 \in (0, 1) \quad (28)$$

где $0 < T$, x_0 – заданные постоянные числа, $f(t, x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $g(t)$ – известные функции, $f \in C(\Omega)$, $g \in C^3[0, T]$, $\psi_1(x_0) = g(0)$, $\psi_2(x_0) = g'(0)$, $\psi_i \in C^3[0, 1]$, $\psi_i(0) = \psi_i(1) = 0, k = 1, 2, ;$ $K(t)$ и $u(t, x)$ – неизвестные функции.

Доказана

Лемма 1. Пусть $f \in C[0,1]$, тогда решение краевой задачи

$$z'''(x) - z(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad z(0) = z(1) = z'(0) = 0$$

с помощью функций Грина можно записать в виде:

$$z(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \text{ мында } G(x, \xi) = \begin{cases} G_R(x, \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ G_L(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

$$G_R(x, \xi) = e^{(x-\xi)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\xi) + \frac{\pi}{3}\right) e^{(x-\xi)/2} -$$

$$-\frac{e^x - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)}{e - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} \left[e^{(1-\xi)} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{(1-\xi)/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\xi) + \frac{\pi}{3}\right) \right],$$

$$G_L(x, \xi) = -\frac{e^x - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)}{e - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} \left[e^{(1-\xi)} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{(1-\xi)/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\xi) + \frac{\pi}{3}\right) \right].$$

Введем обозначение $v(t, x) = u_{tt}(t, x)$. Тогда для $u(t, x)$ получаем:

$$u(t, x) = \int_0^t (t-s) v(s, x) ds + \psi_2(x)t + \psi_1(x). \quad (29)$$

интеграл $\int_0^t K(t-s) v(s, x) ds$ можно записать в виде:

$$\int_0^t K(t-s) v(s, x) ds = \int_0^t K(s) v(t-s, x) ds. \quad (30)$$

Равенство (29) дифференцируем трижды по переменной x :

$$u_{xxx}(t, x) = \int_0^t (t-s) v_{xxx}(s, x) ds + \psi''_2(x)t + \psi''_1(x). \quad (31)$$

В результате этих вычислений интегро-дифференциальное уравнение (25) примет вид:

$$v_{xxx}(t, x) - v(t, x) = \int_0^t (t-s) v_{xxx}(s, x) ds + \psi''_2(x)t + \psi''_1(x) -$$

$$- \int_0^t K(s) v(t-s, x) ds - f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega. \quad (32)$$

Учитывая, что ядро $K(t-s) = t-s$ имеет резольвенту
 $R(t,s) = sh(t-s)$, равенство (32) запишем в виде:

$$v_{xx}(t,x) - v(t,x) = \psi'''(x)t + \varphi'''(x) - \int_0^t K(s)v(t-s,x)ds - f(t,x) + \\ + \int_0^t sh(t-s) \left(v(s,x) + \psi'''(x)s + \varphi'''(x) - \int_0^s K(\tau)v(s-\tau,x)d\tau - f(s,x) \right) ds. \quad (33)$$

Из граничных условий (27) и обозначения $v(t,x) = u_{tt}(t,x)$ для функций $v(t,x)$ получим условий:

$$v(t,0) = v(t,1) = v_x(t,0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (34)$$

Для задачи (33)-(34) применяя лемму 1, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $v(t,x)$:

$$v(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi) sh(t-s)v(s,\xi)d\xi ds - \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi)K(s)v(t-s,\xi)d\xi ds - \\ - \int_0^t \int_0^1 \int_0^s G(x,\xi) sh(t-s)K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\tau d\xi ds + F(t,x). \quad (35)$$

где $F(t,x) = \int_0^1 G(x,\xi) \left(\Psi(t,\xi) + \int_0^t sh(t-s)\Psi(s,\xi)ds \right) d\xi,$

$$\Psi(t,\xi) = \psi'''(\xi)t + \varphi'''(\xi) - f(t,\xi).$$

Соотношение (35) дифференцируем по t :

$$v_t(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi) ch(t-s)v(s,\xi)d\xi ds - K(t) \int_0^1 G(x,\xi)v(0,\xi)d\xi - \\ - \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi)K(s)v_t(t-s,\xi)d\xi ds - \\ - \int_0^t \int_0^1 \int_0^s G(x,\xi) ch(t-s)K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\tau d\xi ds + F_t(t,x) \quad (36)$$

Из (35) следует, что $v(0,x) = F(0,x)$.

В (36) считая, что $x = x_0$ и учитывая условие (28) имеем:

$$\alpha K(t) = \int_0^t \int_0^1 G(x_0,\xi) ch(t-s)v(s,\xi)d\xi ds - \int_0^t \int_0^1 G(x_0,\xi)K(s)v_t(t-s,\xi)d\xi ds - \\ - \int_0^t \int_0^1 \int_0^s G(x_0,\xi) ch(t-s)K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\tau d\xi ds + F_t(t,x_0) - g'''(t) \quad (37)$$

где $\alpha = \int_0^1 G(x_0, \xi) F(0, \xi) d\xi$.

Решение полученной системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода (35), (36) и (37) относительно функций $K(t, s)$, $v(t, x)$, $v_i(t, x)$ существует и единственно.

$$\text{Ш5. } \int_0^1 G(x_0, \xi) F(0, \xi) d\xi \neq 0,$$

$$F(t, x) = \int_0^1 G(x, \xi) \left(\Psi(t, \xi) + \int_0^t sh(t-s) \Psi(s, \xi) ds \right) d\xi,$$

$$\Psi(t, \xi) = \psi'''_2(\xi)t + \psi'''_1(\xi) - f(t, \xi).$$

Доказана

Теорема 5. Если выполняется условие Ш5, то решение $\{u(t, x), K(t)\}$ обратной задачи (25)-(28) в пространстве $C^{2,2}(\Omega) \times C[0, T]$ существует и единственно.

В §4.2 исследована разрешимость следующей обратной задачи:

$$u_{xxx}(t, x) - u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) + \int_0^t K(t-s) u_{sss}(s, x) ds + f(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Omega, \quad (38)$$

$$u(0, x) = \psi_1(x), \quad u_t(0, x) = \psi_2(x), \quad u_{tt}(0, x) = \psi_3(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (39)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (40)$$

$$u(t, x_0) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad x_0 \in (0, 1), \quad (41)$$

где $0 < T$, x_0 – заданные постоянные числа, $f(t, x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, $g(t)$

– известные функции, $f \in C(\Omega)$, $g \in C^3[0, T]$, $\psi_i(x) \in C^3[0, 1]$,

$\psi_i(0) = \psi_i(1) = 0$, $\psi_1(x_0) = g(0)$, $\psi_2(x_0) = g'(0)$, $\psi_3(x_0) = g''(0)$; $K(t)$ и $u(t, x)$ – неизвестные функции.

$$\text{Ш6. } \int_0^1 G(x_0, \xi) F(0, \xi) d\xi \neq 0, \quad \text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} G_R(x, \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ G_L(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

$$G_R(x, \xi) = e^{(x-\xi)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\xi) + \frac{\pi}{3}\right) e^{(x-\xi)/2} -$$

$$- \frac{e^x - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)}{e - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} \left[e^{(1-\xi)} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{(1-\xi)/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\xi) + \frac{\pi}{3}\right) \right],$$

$$G_L(x, \xi) = - \frac{e^x - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)}{e - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} \left[e^{(1-\xi)} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{(1-\xi)/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\xi) + \frac{\pi}{3}\right) \right],$$

$$F(t, x) = \int_0^1 G(x, \xi) \left(\Psi(t, \xi) + \int_0^t \text{sh}(t-s) \Psi(s, \xi) ds \right) d\xi, \quad \Psi(t, \xi) = \psi_2'''(\xi)t + \psi_1'''(\xi) - f(t, \xi).$$

Доказана

Теорема 6. Если выполняется условие **Ш6**, то решение $\{u(t, x), K(t)\}$ обратной задачи (38)-(41) в пространстве $C^{2,2}(\Omega) \times C[0, T]$ существует и единственно.

В § 4.3 найдены достаточные условия для разрешимости следующей обратной задачи об определении правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка

$$u_{ttt}(t, x) = u_{xxtt}(t, x) - u_{xx}(t, x) + \int_0^t K(t-s) u_{sss}(s, x) ds + \varphi(t) h(t, x) + F(t, x), \quad (42)$$

$$u(0, x) = \psi_1(x), \quad u_t(0, x) = \psi_2(x), \quad u_{tt}(0, x) = \psi_3(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (43)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (44)$$

$$u(t, x_0) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad x_0 \in (0, 1). \quad (45)$$

где $K(t), F(t, x), \psi_i(x), h(t, x)$, — известные функции,

$$F \in C(\Omega), \quad \psi_i \in C^2[0, 1], \quad g \in C^3[0, T], \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0, \quad g(0) = \psi_1(x_0),$$

$$g'(0) = \psi_2(x_0), \quad g''(0) = \psi_3(x_0). \quad T, x_0 - \text{заданные положительные числа,}$$

$u(t, x), \varphi(t)$ неизвестные функции.

$$\textbf{Ш7.} \quad \int_0^1 G(x_0, \xi) h(t, \xi) d\xi \neq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\text{sh}(x-1) \text{sh}(\xi)}{\text{sh} 1}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ \frac{\text{sh}(x) \text{sh}(\xi-1)}{\text{sh} 1}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Доказана

Теорема 7. Если выполняется условие **Ш7**, то решение обратной задачи (42)-(45) в пространстве $C^{2,2}(\Omega) \times C[0, T]$ существует и единственно.

В § 4.4 рассмотрена разрешимость обратной задачи о восстановление ядра и правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка:

$$u_{tt}(t, x) = u_{xxxx} - u_{xxx} + b(t, x)u + \int_0^t K(t-s)u(s, x)ds + \varphi(t)f(t, x) + F(t, x), \quad (46)$$

$$u(0, x) = \psi_0(x), \quad u_t(0, x) = \psi_1(x), \quad x \in [0, 1], \quad (47)$$

$$u(t, 0) = u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (48)$$

$$u(t, x_1) = g_1(t), \quad u(t, x_2) = g_2(t), \quad t \in [0, T], \quad x_1, x_2 \in (0, 1), x_1 \neq x_2, \quad (49)$$

где $b(t, x)$, $f(t, x)$, $F(t, x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, – достаточно гладкие известные функций, $\psi_0(0) = \psi'_0(0) = \psi'_0(1) = 0$, $g_i(0) = \psi_0(x_i)$, $g'_i(0) = \psi_1(x_i)$, $i = 1, 2$.

$$\text{III}_8. \det(d(t)) \neq 0, \quad t \in [0, T], \quad \text{где } d(t) = \begin{pmatrix} m(x_1) & c(t, x_1) \\ m(x_2) & c(t, x_2) \end{pmatrix},$$

$$m(x) = \int_0^1 G(x, \xi) \psi_0(\xi) d\xi, \quad c(t, x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(t, \xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{x-\xi} - \frac{2}{3} e^{-\frac{x-\xi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\xi) + \frac{\pi}{6}\right) - G_1(x, \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1; \\ -G_1(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

$$G_1(x, \xi) = \frac{e^x - 2e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)}{3 \left[e + 2e^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right]} \left(e^{1-\xi} + 2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\xi) - \frac{\pi}{6}\right) e^{-\frac{1-\xi}{2}} \right).$$

Доказана

Теорема 8. Если выполняется условие **III**₈, то решение обратной задачи (46)-(49) в пространстве $u \in C^{2,3}(\Omega)$, $K \in C[0, T]$ и $\varphi \in C[0, T]$ существует и единственно. Решение можно построить методом последовательных приближений.

Заключение по главе 4. В четвертой главе исследуются обратные задачи для одного класса интегро-дифференциальных уравнений в частных производных пятого порядка.

В § 4.1 и § 4.2 определены достаточные условия разрешимости обратных задач восстановления ядра для разных интегро-дифференциальных уравнений пятого порядка.

В § 4.3 доказана разрешимость обратной задачи определения правой части интегро-дифференциального уравнения вида $u_{xxxx}(t, x) = F$.

В §4.4 определены достаточные условия разрешимости обратной задачи восстановления ядра и положительной части интегро-дифференциального уравнения вида $u_{xxxx}(t,x)=F$ и разработан метод (алгоритм) решения подобных обратных задач.

ВЫВОДЫ

Исследование посвящено вопросам доказательства разрешимости обратных задач для одного класса дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков и получены следующие результаты:

- найдены достаточные условия для разрешимости задачи определения правой части уравнения для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка;
- найдены достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения обратной задачи, с дополнительными условиями в отрезках для линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка;
- найдены достаточные условия для разрешимости задачи восстановления ядра уравнения для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка;
- доказана разрешимость задачи определения правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка;
- доказана разрешимость обратной задачи определения ядра интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка;
- доказана разрешимость обратной задачи определения правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка;
- доказана разрешимость обратной задачи и алгоритм решения обратной задачи восстановления ядра и правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Все результаты диссертации являются новыми и имеют теоретический характер, но эти результаты можно применить в конкретных задачах физики и техники.

Мы рекомендуем использовать полученные в диссертации научные результаты при исследовании решения обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений высших порядков и при построении решения обратных задач.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Мамытов, А.О.** Об одной задаче определения правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных [Текст] / А.О. Мамытов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – Челябинск, 2021. – Т. 13, - № 3. – С. 31–38.

2. **Мамытов, А.О.** Разрешимость обратной начально-краевой задачи с известным значением на прямой [Текст] / А.О. Мамытов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – Челябинск, 2021. – Т. 13, - № 2. – С. 18–23.

3. **Мамытов, А.О.** Об одной обратной задаче для интегро-дифференциального уравнения пятого порядка [Текст] / А.О. Мамытов, К.Г. Кожобеков // Научные аспекты современных исследований. 78я Международная научная конференция Евразийского Научного Объединения. – Москва, 2021. – № 8(78). – С. 29–31.

4. **Мамытов, А.О.** Задача восстановления ядра и правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка [Текст] / А.О. Мамытов, А. Асанов, Д.А. Турсунов // Научные аспекты современных исследований. 78я Международная научная конференция Евразийского Научного Объединения. – Москва, 2021. – № 8(78). – С. 31–34.

5. **Мамытов, А.О.** Жогорку тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык тендемерлер үчүн баштапкы-чек аралык тескери маселенин чечилиши [Текст] / А.О. Мамытов, А. Асанов, Д.А. Турсунов // ОшМУнун жарчысы. «Математика. Физика. Техника». – Ош, 2021. – № 2. – С. 5–13.

6. **Мамытов, А.О.** Бешинчи тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык тендеме үчүн бир тескери маселенин чечилиши [Текст] / А.О. Мамытов // ОшМУнун жарчысы. «Математика. Физика. Техника». – Ош, 2021. – № 2. – С. 14–23.

7. **Мамытов, А.О.** Об одной задаче определения правой части линейного дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / А.О. Мамытов // Молодой ученый. – Казань, 2016. – № 11 (115). – С. 49-53.

8. **Мамытов, А.О.** Обратная задача для линейного дифференциального уравнения четвертого порядка с переопределением во внутренних точках [Текст] / А.О. Мамытов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2015. – № 7. – С. 10-15.

9. **Мамытов, А.О.** Определение правой части для одного класса линейного дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / А.О. Мамытов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2014. – № 7. – С. 37-42.

10. **Мамытов, А.О.** Об одной задаче определения правой части линейного дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / А.О. Мамытов, К.Б. Матанова // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2014. Вып. 47. – С. 147-151.

11. **Mamytov, A.O.** Solvability of the inverse initial-boundary value problem with a known value on the line [Text] / A.O. Mamytov // Problems of Modern Mathematics 70th anniversary of A.A. Borubaev, June 16-18, 2021. – P. 105.

Мамытов Айтбай Омоновичтин «Төртүнчү жана бешинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин бир классы үчүн тескери маселелер» деген темадагы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: тескери маселе, дифференциалдык теңдеме, интегро-дифференциалдык теңдеме, Гриндин функциясы, резольвента, Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин системасы.

Изилдөө объектиси: төртүнчү жана бешинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин бир классы үчүн тескери маселелер.

Изилдөө предмети: төртүнчү жана бешинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин бир классы үчүн тескери маселелердин чечилишин камсыз кылуучу жетиштүү шарттарды табуу.

Иштин максаты. Төртүнчү жана бешинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин бир классы үчүн тескери маселелердин чечилишин далилдөө.

Изилдөөнүн методдору жана аппараты: өзгөртүп түзүү методу, резольвента методу, Гриндин функциясы, кысып чагылтуу принциби, Вольтерранын интегралдык теңдемесинин методу.

Алынган натыйжалар жана алардын жаңылыгы. Төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин чечилишинин жетиштүү шарттары табылды. Бешинчи тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин чыгарылыштарынын жашашын жана жалгыздыгын камсыздоочу шарттар аныкталды.

Колдонуу даражасы же колдонуу боюнча сунуштар. Илимий натыйжаларды тескери маселелердин чечилишин изилдөөдө жана аны тургузууда колдонууга сунуштайбыз.

Колдонуу жааты. Изилденген тескери маселелер геофизикада, астрономияда, медициналык визуалдаштырууда, компьютердик томографияда, спектралдык анализде ж.б. тармактарда колдонулушу мүмкүн.

РЕЗЮМЕ

Диссертации Мамытова Айтбая Омоновича на тему: «Обратные задачи для одного класса дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого и пятого порядков» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: обратная задача, дифференциальное уравнение, интегрально-дифференциальное уравнение, функция Грина, резольвента, система интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Объект исследования: обратные задачи для одного класса дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого и пятого порядков.

Предмет исследования: нахождение достаточных условий, обеспечивающих разрешимость обратных задач для одного класса дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого и пятого порядков.

Цель работы. Доказательство разрешимости обратных задач для одного класса дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого и пятого порядков.

Методы исследования и аппаратура: метод преобразования, метод резольвенты, функция Грина, принцип сжатия при отражении, метод интегральных уравнений Вольтерра.

Полученные результаты и их новизна. Найдены достаточные условия для решения обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных пятого порядка определены условия существования и единственности решения обратных задач.

Степень использования или рекомендации по использованию. Предлагаем использовать научные результаты при исследовании разрешимости и построении решения обратных задач.

Область применения. Исследованные обратные задачи могут применяться в геофизике, астрономии, медицинской визуализации, компьютерной томографии, спектральном анализе и в других отраслях.

SUMMARY

Mamytova Aitbaya Omonovich Dissertation «Inverse problems for one class of differential and integro-differential equations in partial derivatives of the fourth and fifth orders» for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences (specialty 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control)

Key words: inverse problem, differential equation, integro-differential equation, Green's function, resolvent, system of integral equations of Volterra's of the second kind.

Object of research: inverse problems for one class of differential and integro-differential equations in partial derivatives of the fourth and fifth orders.

Subject of study: finding sufficient conditions to ensure the solvability of inverse problems for one class of differential and integro-differential equations in partial derivatives of the fourth and fifth orders.

Purpose of work. It is proof of the solvability of inverse problems for one class of differential and integro-differential equations in partial derivatives of the fourth and fifth orders.

Research methods and equipment: transformation method, resolvent method, Green's function, compression principle in reflection, method of the Volterra's integral equations.

The results obtained and their novelty. Sufficient conditions for solving inverse problems for differential and integro-differential equations in partial derivatives of the fourth order are found. Conditions of existence and uniformity of solution of the inverse problem for integro-differential equations in partial derivatives for the fifth order are determined.

Degree of use or recommendations for use. We propose to use scientific results in the study of solvability and construction of solutions to inverse problems.

Application area. Researched inverse problems can be applied in geophysics, astronomy, medical imaging, computed tomography, spectral analysis, and in other branches of science.



ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ, ЕДИНИЦ, ТЕРМИНОВ, СОКРАЩЕНИЙ

- $\mathbf{N}=\{1,2,3,\dots\}$ – множество натуральных чисел;
- \mathbf{R} – множество действительных чисел;
- $\Omega = \{(t, x) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$, $0 < T \in \mathbf{R}$;
- \forall – квантор обобщения;
- \exists – квантор существования;
- \in – «принадлежить»;
- \Rightarrow – «следует»;
- $C(D)$ – множество непрерывных функций в области D ;
- $C^k(D)$ – множество дифференцируемых функций до k -го порядка (k - включительно) в области D ;
- $C_n^k(D)$ – пространство n мерных вектор функций, элементы принадлежащих пространству $C^k(D)$;
- $C_{n \times n}^k(D)$ – пространство $n \times n$ мерных вектор функций, элементы принадлежащих пространству элементтери $C^k(D)$;
- $\|A(t, x)\| = \|a_{ij}(t, x)\| = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^n \sup_{(t, x) \in \Omega} |a_{ij}(t, x)| \right\}$ – норма непрерывной матрицы функций $A(t, x)$ в области Ω .

Подписано к печати: 04.01.2022 г.
Формат 60х90 1/16. Объем: 1,5 п.л.
Заказ № 60. Тираж 100 экз.

Компьютерные услуги “Book-дизайн”
г. Ош, ул. Сулайманова, 3.