

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ
РЕСПУБЛИКИ

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Диссертационный совет К 01.19.599

На правах рукописи
УДК 517.928

НАРЫМБЕТОВ ТАЛАНТБЕК КАНАТБЕКОВИЧ

СУЩЕСТВОВАНИЯ И СВЯЗИ ОБЛАСТЕЙ
ПРЯЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ
УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Ош – 2022

Диссертация выполнена на кафедре “Высшая математика и технология обучения математике” Жалал-Абадского государственного университета

Научный руководитель: Алыбаев Курманбек Сарманович, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института “Фундаментальных, прикладных исследований и инновационных технологий” Жалал-Абадского государственного университета

Официальные оппоненты: Алымкулов Келдибай, член-корреспондент НАН КР, доктор физико-математических наук, профессор, директор института “Фундаментальных и прикладных исследований” Ошского государственного университета (Кыргызская Республика, г. Ош)

Алымбаев Асангул Темиркулович, доктор физико-математических наук, доцент, и.о. профессора кафедры “Математики и технологии её обучения” Кыргызского государственного университета им. И.Арабаева (Кыргызская Республика, г. Бишкек)

Ведущая организация: НАН КР, институт математики. Адрес: Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, ул. Чүй, 265-а.

Защита диссертации состоится “9” февраля 2022 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета К 01.19.599 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете, институте природных ресурсов южного отделения НАН Кыргызской Республики и Жалал-Абадском государственном университете по адресу 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331, ауд.

Идентификационный код онлайн трансляции защиты диссертации: <https://vc.vak.kg/b/k01-wvo-b1l-2lm>

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета и на страничке диссертационного совета сайта: www.oshsu.kg.

Автореферат разослан «6» января 2022 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, к.ф.-м.н., доцент:



Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Пусть рассматривается обыкновенная система дифференциальных уравнений

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = f(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), t), \quad (*)$$

$$y'(t, \varepsilon) = g(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), t), t \in [t_0, T]$$

или автономная система

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = f(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)), \quad (**)$$

$$y'(t, \varepsilon) = g(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)), t \in [t_0, T]$$

где $x(t, \varepsilon) \in C^1([t_0, T] \rightarrow R^n)$, $y(t, \varepsilon) \in C^1([t_0, T] \rightarrow R^m)$, $n, m \in N$,

f, g – непрерывные вектор-функции в некоторой области переменных (t, x, y) .

Системы (*) и (**) называются сингулярно возмущенными уравнениями (СВОДУ(R)) R – множество действительных чисел).

Системы полученные из (*) и (**) при $\varepsilon = 0$ называются невозмущенными (вырожденными) системами уравнений (НУ).

Системы (*) и (**) получаются при исследовании физических, механических явлений в теории возмущений, автоматического управления и регулирования, электротехнике, радиотехнике, гидродинамике и т.д.

В этом направлении можно отметить работы Л.С. Понтрягина, А.Н. Тихонова, А.Б. Васильевой, М.И. Иманалиева, К. Алымкулова, П.С. Панкова и др.

В теории СВОДУ(R) одним из основных задач является выявление множеств, к которым притягиваются решения уравнений при $\varepsilon \rightarrow 0$.

По предположению такими множествами могут быть решения НУ системы (*) и (**).

Истинность такого предположения для системы (*) решена А.Н.Тихоновым, а для системы (**) Л.С. Понтрягиным.

В названных работах задача решена применением устойчивости точек покоя (положений равновесия).

Для СВОДУ(C) (C – множество комплексных чисел) задача исследована в работах М.А. Шишковой, С. Каримова, Г.М. Анарбаевой, К.С. Алыбаева, Д.А. Турсунова, М. Азимбаева.

В этих работах рассматриваются СВОДУ(R) для которых не выполняются устойчивость положения равновесия, исследованы аналитическим продолжением в некоторую область комплексной плоскости. Доказано, решение СВОДУ(R) несмотря на устойчивое положения равновесия не отходит от него и в течении конечного времени остается в близи него. Исследования проведены, когда НУ имеет одно решение. К.Б. Тампагаров обобщил результаты работ С. Каримова, Г.М. Анарбаевой, К.С. Алыбаева, М. Азимбаева. Задача решена без использования устойчивости положения равновесия. В данной работе рассматриваются линейные и слаболинейные СВОДУ(C), НУ которых имеют только одно решение. Асимптотическое поведение решений при $\varepsilon \rightarrow 0$ описаны с помощью понятий регулярной и сингулярной областей, пограничного слоя и погранслошной линии.

А.Б. Мурзабаева рассмотрела некоторый класс СВОДУ(C), НУ которые имеют два решения и систему СВОДУ(C) из трёх уравнений первого порядка, систему НУ которой имеет четыре решений. Введено понятие область притяжения (ОП) решения СВОДУ(C) к решению НУ и доказано существование ОП.

Для общего случая существование ОП и связи ОП не исследованы. Решения таких задач является актуальным.

Решение этих и других задач, связанных с этими задачами составляет основное содержание работы.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими темами:

Диссертация выполнена по тематике научно-исследовательских работ кафедры “Высшая математика и технология обучения математике” Жалал-Абадского государственного университета.

Цель исследования:

Исследовать взаимосвязь решений СВОДУ (C) (систем) и НУ (систем).

Задачи исследования:

1. Рассмотреть СВОДУ (C) (системы) НУ (системы), которые имеют несколько решений.
2. Определить понятие ОП решений СВОДУ (C) к решениям НУ.
3. Исследовать взаимосвязь ОП и их зависимость от начальных значений.
4. Провести анализ связи полученных и ранних результатов.
5. Выявить новые явления в ходе исследований.

Научная новизна полученных результатов:

- ОП определена как связь между решениями СВОДУ (C) и НУ;
- Установлены общие условия существования ОП;
- Доказано существование общей части ОП выражающей их взаимосвязи, рассмотрены случаи, когда не существуют общие части;
- Определены понятие расширения и сужения ОП в зависимости от начальных значений;
- Обобщены и систематизированы ранее полученные результаты.

Теоретическая значимость диссертационной работы:

Связь решений СВОДУ (C) и НУ определена через понятие ОП. Применением топологических методов доказано существование ОП и их связи. Методы разработанные в диссертации можно использовать при исследовании и построении асимптотики СВОДУ (C).

Практическая значимость диссертационной работы:

Кроме того, полученные результаты можно использовать при исследовании процессов имеющие различные состояния в возмущении, автоматического управления и регулировании, электротехнике, радиотехнике, гидродинамике.

Также результаты можно использовать при чтении лекций студентам, магистрантам, аспирантам и для дальнейшего развития теории СВОДУ(C).

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- Введение понятие ОП, как средство, связывающее решений СВОДУ(C), которые имеют несколько решений с решениями НУ.
- Установлены условия существования ОП.
- Установление взаимосвязи между ОП и результаты зависимости от начальных значений.
- Обобщение и систематизация ранее полученных результатов.
- Явление расширения и сужения ОП.
- Метод разработанный с использованием линии уровней гармонических функций.

Личный вклад соискателя: Основные результаты полученные, в диссертации принадлежат автору. В работах опубликованных совместно с научным руководителем К.С. Алыбаевым, постановка задачи принадлежит руководителю, а решение задачи автору. В совместной с К.Б. Тампагаровым, Мурзабаевой работе [5], соавторы

приняли участие в обсуждении и оформлении результатов, а основные результаты получены автором.

Аппробация результатов работы: Основные результаты работы обсуждены на следующих семинарах и конференциях: на семинаре “Асимптотические, топологические, компьютерные методы и технологии обучения математики” (2017-2021г.г.) (руководитель: ф.-м.и.д., проф. Алыбаев К.С.); семинаре математиков ВУЗов Южного Кыргызстана “Актуальные проблемы математики и их применения” (2018-2021г.г.) (руководитель: член-корреспондент НАН КР., профессор Алымкулов К.); Международная конференция “Теория управления, актуальные проблемы топологии и операторных уравнений” (Бишкек, июнь, 2017 г.); Международная конференция “Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры” (Казакстан, Нур-Султан, 2019-г.); International Conference Advanced in Applied Mathematics, ICAAM 2021. (Индонезия, 29.04.2021); Международная конференция посвященная 70 летию А.А.Борубаева “Современные проблемы математики” (Бишкек, 15-19 июня, 2021-г.); 76-Международная конференция Евразийского научного объединения “Интеграция современных наук” (Москва, 29-30 июня 2021-г.).

Полнота отражения результатов диссертации: Основные результаты диссертации опубликовано в 15 статьях, из них 11 статей опубликованы в системе РИНЦ. Общее количество баллов составляет – 209.

Структура и объем диссертации: Работа состоит из оглавления, списка условных обозначений и сокращенных записей предложений, введения, трех глав разбитых на параграфы, вывода, 90 наименований использованной литературы. Объем диссертации 114 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение охватывает актуальность темы, связь темы исследования диссертации с другими научно-исследовательскими темами, цели и задачи исследования, методы исследования, новизну полученных результатов, теоретическую значимость диссертационной работы, основные положения выносимые на защиту и апробации работы, а также краткое содержание основных результатов.

Первая глава “АНАЛИЗ РАННИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ”.

В данной главе приведены основные результаты исследований СВОДУ ($R \vee C$) связанных с данной работой. Результаты изложены по двум направлениям: в первом направлении приведены исследования и результаты по СВОДУ (R), а во втором по СВОДУ (C).

Первая глава состоит из двух параграфов. **Первый параграф** охватывает материалы предельного перехода, асимптотического разложения решений, релакционных колебаний в теории СВОДУ(R).

Отметим, предельный переход исследован для случая, когда НУ имеет одно решение.

Релакционные колебания исследованы при устойчивости положений равновесия.

Во втором параграфе приведены результаты исследований СВОДУ(C). Отмечено что, явление затягивание устойчивости положения равновесия, обнаруженного в теории СВОДУ (R) доказано рассмотрением СВОДУ (C). Рассматривая линейные и слабо нелинейные СВОДУ (C) введены новые понятия погранслоиная линии, регулярной и сингулярной областей. В рассматриваемых случаях НУ имеют только одно решение.

Проведен анализ исследований некоторых классов СВОДУ (C) (систем), НУ (системы) которые имеют два и четыре решения. Подчеркнем что, доказаны только существования ОП, а существование и связи ОП в общем случае не рассмотрены.

По результатам анализа СВОДУ (C) определены основные направления исследований.

Вторая глава “ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА”. Здесь рассматривается СВОДУ(C) первого порядка соответствующее НУ, которое имеет несколько решений. Определено понятие ОП решения СВОДУ(C) к решению НУ. Согласно принятому определению доказано существование ОП решения СВОДУ (C) к решению НУ. Установлена

взаимосвязь между различными ОП. Исследованы в зависимости ОП от начальных значений, и указаны явления расширения и сужения ОП. Приведены примеры.

Вторая глава состоит из семи параграфов.

В первом параграфе для СВОДУ (С) первого порядка

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = f(t, x(t, \varepsilon)), \quad (1)$$

где $t \in \mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ и \mathcal{D} – открытая, односвязная, ограниченная область; рассмотрена начальная задача

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, t_0 \in \mathcal{D}. \quad (2)$$

Пусть для правой части уравнения (1) выполняется условие:

Ш 1. $f(t, x) \in Q(H)$, где H – некоторая открытая область переменных t, x . Здесь и далее $Q(\mathcal{D} \cup H)$ – означает пространство аналитических функций в области \mathcal{D} или H .

Пусть НУ уравнения (1)

$$f(t, \xi(t)) = 0 \quad (3)$$

имеет решения $\xi(t) = \xi_j(t), j = 1, 2, \dots, n$ и выполняется условие:

Ш 2. $\xi_j(t) \in Q(\mathcal{D}) (j = 1, 2, \dots, n)$.

Определено понятие ОП решения задачи (1)-(2) к решению НУ:

Определение 1. Если: 1. Существуют область $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}$ и решение $x(t, \varepsilon)$ задачи (1)-(2) определенное в \mathcal{D}_k .

2. $\forall t \in \mathcal{D}_k x(t, \varepsilon) \rightarrow \xi_k(t)$, (по ε), то область \mathcal{D}_k назовем областью притяжения решения $x(t, \varepsilon)$ к решению $\xi_k(t)$ по ε ($\varepsilon \rightarrow 0$).

Постановка задачи о существовании ОП: При каких условиях существуют $x(t, \varepsilon)$ – решение задачи (1)-(2) и ОП решения $x(t, \varepsilon)$ к решению $\xi_k(t)$ уравнения (3) согласно принятому определению?

Во втором параграфе, с введением новой неизвестной функции, СВОДУ(С) приведено к виду удобному для исследования и сформулированы некоторые условия.

Из множества $\{\xi_j(t)\}$ взято решение $\xi_k(t)$ и в уравнение (1) введено новая неизвестная функция

$$x(t, \varepsilon) = \xi_k(t) + y_k(t, \varepsilon), \quad (4)$$

где $y_k(t, \varepsilon)$ – новая неизвестная функция.

(4) подставляя в (1) получено уравнение:

$$\varepsilon y'_k(t, \varepsilon) = f(t, \xi_k(t) + y_k(t, \varepsilon)) + \varepsilon \varphi_k(t), \quad (5)$$

$$y_k(t_0, \varepsilon) = y^0, y^0 = x^0 - \xi_k(t_0). \quad (6)$$

где $\varphi_k(t) \equiv -\xi'_k(t)$.

Согласно Ш 1 функцию $f(t, \xi_k(t) + y_k)$ можно представить в виде (для удобства аргументы неизвестной функции опущены):

$$\begin{aligned} f(t, \xi_k(t) + y_k) &= f'_x(t, \xi_k(t))y_k + \frac{1}{2!}f''_{x^2}(t, \xi_k(t))y_k^2 + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!}f^{(n)}_{x^n}(t, \xi_k(t))y_k^n + \dots, \end{aligned}$$

где f'_x, f''_{x^2}, \dots – частные производные первого, второго и т.д. порядков функции f по переменной x . Введя новые обозначения

$$a_k(t) \equiv f'_x(t, \xi_k(t)),$$

$$g_k(t, y_k) \equiv \frac{1}{2!}f''_{x^2}(t, \xi_k(t))y_k^2 + \frac{1}{3!}f'''_{x^3}(t, \xi_k(t))y_k^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}_{x^n}(t, \xi_k(t))y_k^n + \dots$$

задача (5) – (6) записана в виде:

$$\varepsilon y'_k = a_k(t)y_k + g_k(t, y_k) + \varepsilon \varphi_k(t), \quad (7)$$

$$y_k(t_0, \varepsilon) = y_k^0. \quad (8)$$

В дальнейших исследованиях считается

$$|y_k^0| \leq M_1 \cdot \varepsilon.$$

Здесь и далее M_1, M_2, \dots означают положительные постоянные не зависящие от ε .

Пусть выполняются условия:

$$\text{Ш 3. } \forall t \in \mathcal{D} (|f^{(m)}_{x^m}(t, \xi_k(t))| \leq M_2), m = 2, 3, \dots$$

$$\text{Ш 4. } \forall t \in \mathcal{D} (\text{Im} a_k(t) > 0)$$

С использованием линии уровней некоторых гармонических функций, порождаемых аналитическими функциями, участвующие в уравнении определена топология области \mathcal{D} в комплексной плоскости.

Для этого использована функция $A_k(t) = \int_{t_0}^t a_k(s)ds$. Согласно Ш 1 $A_k(t) \in Q(\mathcal{D})$. Взято $t_0 = t_{10} + it_{20}$, $t = t_1 + it_2$. Поскольку $A_k(t) \in Q(\mathcal{D})$, то функции $\text{Re} A_k(t)$, $\text{Im} A_k(t)$ гармонические в области \mathcal{D} .

Определение 2. Множество $\{t \in \mathcal{D}, \text{Re} A_k(t) = p - \text{const}\}$ называется линией уровня функции $\text{Re} A_k(t)$ и обозначается (p_k) .

Линия уровня функции $\text{Im} A_k(t)$ определяется аналогично.

Рассмотрены линии уровня

$$(p_k) = \{t \in \mathcal{D}, \operatorname{Re} A_k(t) = p_k - \text{const}\}, \quad (9)$$

$$(q_k) = \{t \in \mathcal{D}, \operatorname{Im} A_k(t) = q_k - \text{const}\}.$$

Из условия Ш 4 вытекает, что линии уровня (9) в области \mathcal{D} являются простыми т.е. в любой точке области \mathcal{D} линии уровня (9) не разветляются. С другой стороны в точках пересечения линии уровня (p_k) и (q_k) являются ортогональными.

Приведен пример линии уровней. С использованием линии уровней (p_k) , (q_k) определены области.

Из множеств $\{p_k\}$, $\{(q_k)\}$ взяты линии уровня (p_{0k}) , (q_{0k}) , (p_{k1}) , (p_{k2}) , (q_{k1}) , (q_{k2}) ($p_{0k} = 0$, $q_{0k} = 0$) и определена область Π_k (рисунок 1)

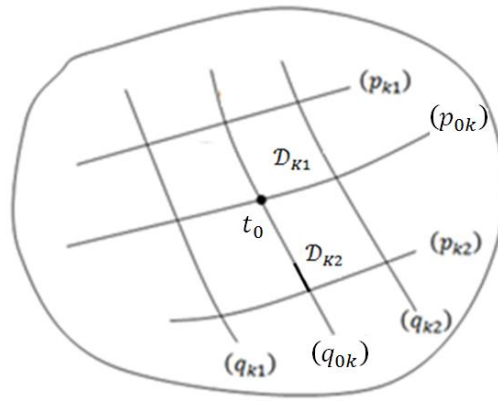


Рисунок 1. Определение области Π_k .

Замечание. Согласно Ш 4 функция $\operatorname{Re} A_k(t)$ строго монотонна по прямой $t_1 = \text{const}$ по t_2 . Учитывая это положение при построении области Π_k можно использовать прямые $t_1 = \text{const}$ (вместо (q_{k1}) , (q_{k2}) , (q_{0k})). При этом вместо (q_{0k}) используется прямая

$$\{t \in \mathcal{D}, t_1 = t_{10}, -\infty < \alpha_1 < t_2 < \alpha_2 < +\infty\}.$$

Линия (p_{0k}) область Π_k разделяет на части D_{k1} , D_{k2} . $\Pi_k = D_{k1} \cup (p_{0k}) \cup D_{k2}$ и $\forall t \in D_{k1} (\operatorname{Re} A_k(t) < 0)$, $\forall t \in (p_{0k}) \operatorname{Re} A_k(t) = 0$. $\Pi_k =$

В третьем параграфе доказана теорема о существовании решения СВОДУ(С) первого порядка с начальным условием и ОП этого решения к решению НУ.

Теорема 1 (Существование решение и ОП).

Если выполняются условия Ш 1 – Ш 4, то существует область $\mathcal{D}_{k0} \subset \mathcal{D}$, $y_k(t, \varepsilon)$ решение задачи (7)-(8) определенное в \mathcal{D}_{k0} и выполняется соотношение

$$\forall t \in \mathcal{D}_{k0} \ y_k(t, \varepsilon) \rightarrow 0, \text{ (по } \varepsilon \text{)}.$$

Если учесть обозначения (4), то из теоремы 1 вытекает: для $x(t, \varepsilon)$ – решения задачи (1)-(2) и решения $\xi_k(t)$ уравнения (3) справедливо соотношение $x(t, \varepsilon) \rightarrow \xi_k(t)$. Согласно определению 1 область \mathcal{D}_{k0} является областью притяжения. $\mathcal{D}_{k0} = \mathcal{D}_{k1} \cup (p_{0k})$.

В четвертом параграфе исследована зависимость ОП от начальных значений. Доказано возможность “расширения” и “сужения” ОП.

Теорема 2. Пусть выполняются Ш 1 – Ш 4. Тогда при $\tilde{t}_0 \in \mathcal{D}_{k2}$, область \mathcal{D}_{k1} расширяется до некоторой области $\tilde{\mathcal{D}}_{k1}$ т.е. $\mathcal{D}_{k1} \subset \tilde{\mathcal{D}}_{k1}$; при $\tilde{t}_0 \in \mathcal{D}_{k1}$, область \mathcal{D}_{k1} сужается до некоторой области $\tilde{\tilde{\mathcal{D}}}_{k1}$ т.е. $\tilde{\tilde{\mathcal{D}}}_{k1} \subset \mathcal{D}_{k1}$.

В пятом параграфе рассмотрена взаимосвязь ОП для различных решений СВОДУ(С), при заданном начальном условии, к решениям НУ. Взаимосвязь установлена доказательством существования общей части ОП.

Существование общей части ОП рассматривается как основная задача: при каких условиях существует $\bigcap_{k=1}^n \mathcal{D}_{k0} = \mathcal{D}_0$?

Задача сначала решена для $k = 1, 2$. Рассмотрены линии уровня (\tilde{p}_{10}) , (\tilde{p}_{20}) , которые проходят через точку t_0 . Других сведений по этим линиям не имеются.

Для внесения ясности по расположению этих линий уровней ставится условие:

Ш 5. $\forall t \in \mathcal{D}$ $((\tilde{p}_{10})$ и (\tilde{p}_{20}) не имеют общих точек, кроме точки t_0 .

При условии Ш 5 линии (\tilde{p}_{10}) , (\tilde{p}_{20}) в точке t_0 пересекаются или имеют общую касательную. Доказана теорема:

Теорема 3. Пусть выполняются условия Ш 1 – Ш 5, тогда существует $\mathcal{D}_{10} \cap \mathcal{D}_{20} = \mathcal{D}_0$.

В шестом параграфе на примере одного СВОДУ(С) рассмотрен случай, когда ОП является некоторая линия.

Уравнение

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = a(t) x(t, \varepsilon) + x^2(t, \varepsilon) + \varepsilon \varphi(t) \quad (10)$$

рассматривается с начальным условием

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \quad |x^0| \leq M_1 \varepsilon, \quad (11)$$

где $t \in \mathcal{D} \subset C$ и \mathcal{D} – односвязная, открытая, ограниченная область. НУ уравнения (10)

$$a(t)\xi(t) + \xi^2(t) = 0$$

имеет решения

$$\xi_1(t) \equiv 0, \quad \xi_2(t) = -a(t). \quad (12)$$

Сначала доказано существование двух областей притяжений. Затем показано, общей частью ОП является некоторая линия.

Если рассмотреть решения уравнения (10) при различных начальных условиях и одно из решений $\xi_1(t) \equiv 0$ или $\xi_2(t) = -a(t)$ НУ, то получим расширение или сужение ОП. В итоге показаны взаимосвязи ОП при различных начальных условиях.

В седьмом параграфе рассмотрены два примера СВОДУ(C) соответствующее НУ, у которых имеют по три решений.

В первом примере рассматривается уравнение

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - x^3(t, \varepsilon) + \varepsilon \varphi(t) \quad (13)$$

с начальным условием

$$x(0, \varepsilon) = x^0, \quad |x^0| \leq M_1 \varepsilon, \quad (14)$$

где $t \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} = \{t \in C, -\alpha < t_1 < \alpha, -\beta < t_2 < \beta, \alpha, \beta \in R\}$, $\varphi(t) \in Q(\mathcal{D})$.

НУ уравнения имеет вид $\xi(t) - \xi^3(t) = 0$.

Это уравнение имеет решения

$$\xi_1(t) \equiv 0, \quad \xi_2(t) = 1, \quad \xi_3(t) = -1.$$

Поставлена задача о существования ОП, для решений СВОДУ(C) к решениям НУ. Далее рассмотрены их взаимосвязи. В итоге доказано, две ОП совпадают и их общая часть с третьей ОП будет отрезком.

Во втором примере уравнение

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon) - a_1)(x(t, \varepsilon) - a_2)(x(t, \varepsilon) - a_3) + \varepsilon \varphi(t) \quad (15)$$

рассмотрено с начальным условием

$$x(0, \varepsilon) = x^0 \quad (16)$$

где $a_1, a_2, a_3 \in C$, $\varphi(t) \in Q(\mathcal{D})$,

$$\mathcal{D} = \{t \in C, -\alpha \leq t_1 \leq \alpha, -\beta \leq t_2 \leq \beta, \alpha, \beta \in R^+\}.$$

НУ уравнения (15) имеет решения

$$\xi_1 = a_1, \xi_2 = a_2, \xi_3 = a_3. \quad (17)$$

Поставлена задача доказательства существования ОП решения задачи (15)-(16) к решениям (17) и установление взаимосвязи ОП.

Доказано для решения задачи (15)-(16) существует три ОП к решениям (17) и их общая часть.

Третья глава названа “ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ СОСТОЯЩИХ ИЗ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА” и здесь рассматриваются системы состоящие из n уравнений СВОДУ(С) первого порядка, системы НУ которые имеют несколько решений. Доказано существование ОП решения СВОДУ(С) к решению систем НУ и общей части всех ОП. На примере одной системы доказано, что для решений систем СВОДУ(С) ОП существуют только к некоторым решениям систем НУ.

Третья глава состоит из шести параграфов.

В первом параграфе поставлена общая задача.

Пусть система уравнений

$$\varepsilon x'_k(t, \varepsilon) = f_k(t, x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), \dots, x_n(t, \varepsilon)), k = 1, \dots, n \quad (18)$$

рассматривается с начальным условием

$$x_k(t_0, \varepsilon) = x_k^0. \quad (19)$$

$t \in \mathcal{D} \subset \mathcal{C}$, \mathcal{D} – односвязная, открытая и ограниченная область.

Пусть выполняется: **Ш 6.** $f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q(H)$ ($k = 1, \dots, n$), где H – некоторая область переменных $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$.

В (18) полагая $\varepsilon = 0$ получим систему НУ

$$f_k(t, \xi_1(t), \dots, \xi_n(t)) = 0, k = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

Пусть система (20) имеет m_0 решений

$$\xi_1(t) = (\xi_{11}(t), \dots, \xi_{1n}(t)), \dots, \xi_{m_0}(t) = (\xi_{m_0 1}(t), \dots, \xi_{m_0 n}(t)). \quad (21)$$

Определение 3. Если существует область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и $x(t, \varepsilon)$ – решение задачи (18)-(19) определенное в \mathcal{D}_0 и выполняется $\forall t \in \mathcal{D}_0$ $(x(t, \varepsilon) \rightarrow \xi_j(t))$, то \mathcal{D}_0 называется областью притяжения решения $x(t, \varepsilon)$ к решению $\xi_j(t)$.

Поставлена задача: при каких условиях существует ОП $x(t, \varepsilon)$ – решения задачи (18)-(19) к решению $\xi_j(t)$?

Во втором параграфе для решения поставленной задачи, в системе (18) проведены преобразования и сформулированы некоторые условия.

После преобразований задача (18)-(19) приведена к виду:

$$\varepsilon z_j' = \Lambda_j(t)z_j + G_j(t, z_j) - B_0(t)z_j + \varepsilon \varphi_{j0}(t), \quad (22)$$

$$z_j(t_0, \varepsilon) = z_j^0 = B^{-1}(t_0)y_j(t_0, \varepsilon) = B^{-1}(t_0)(x(t_0, \varepsilon) - \xi_j(t_0)), \quad (23)$$

$$\text{где } \|z_j(t_0, \varepsilon)\| \leq M_1 \varepsilon, \Lambda_j(t) = \text{diag}(\lambda_{j1}(t), \dots, \lambda_{jn}(t)).$$

Если j – фиксированное будем считать

$$\Lambda_j(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)).$$

Пусть выполняются условия:

Ш 7. $\Lambda_j(t) \in Q(\mathcal{D}), B_0(t) \in Q(\mathcal{D}), \varphi_{j0}(t) \in Q(\mathcal{D}),$

$$\forall t \in \mathcal{D} (\text{Im} \lambda_m(t) > 0, m = 1, \dots, n).$$

Ш 8. $G_j(t, z_j) \in Q(H_0)$, где $H_0 = \{t \in \mathcal{D}, \|z_j\| \leq \delta, 0 < \delta < 1\};$

$$\forall (t, z_j) \in H_0 (\|G_j(t, z_j)\| \leq M_2 \|z_j\|^2)$$

$$\begin{aligned} \forall (t, \tilde{z}_j), (t, \tilde{\tilde{z}}_j) \in H_0 (\|G_j(t, \tilde{z}_j) - G_j(t, \tilde{\tilde{z}}_j)\| \leq \\ \leq M_3 \|\tilde{z}_j - \tilde{\tilde{z}}_j\| \max(\|\tilde{z}_j\|, \|\tilde{\tilde{z}}_j\|)) \end{aligned}$$

В третьем параграфе применением линии уровней гармонических функций, порождаемых аналитическими функциями заданной системы СВОДУ(С), в комплексной области построены области. Для построения использованы функции $\lambda_m(t), (m = 1, \dots, n)$. С помощью этих функций определены функции

$$F_m(t) = \int_{t_0}^t \lambda_m(\tau) d\tau.$$

Согласно Ш 2 функции $F_m(t) \in Q(\mathcal{D})$ и функции $\text{Re} F_m(t), \text{Im} F_m(t)$ являются гармоническими в \mathcal{D} .

$\forall t \in \mathcal{D} (\text{Im} \lambda_m(t) > 0)$, тогда линии уровня определяемые функциями $\text{Re} F_m(t), \text{Im} F_m(t)$

$$(p_m) = \{t \in \mathcal{D}, \text{Re} F_m(t) = p_m - \text{const}\},$$

$$(q_m) = \{t \in \mathcal{D}, \text{Im} F_m(t) = p_m - \text{const}\}$$

не имеют точек ветвления. Через произвольную точку области \mathcal{D} проходит только одна линия уровня $(p_m), (q_m)$. В точках пересечения (p_m) и (q_m) ортогональны.

Приведены примеры построения областей.

Пусть выполняются условия:

Ш 9. Линии уровня $p_{m0}\{t \in D, \operatorname{Re} F_m(t) = \operatorname{Re} F_m(t_0) = 0\} \lambda_m(t)$,
($m = 1, \dots, n$) не имеют общих точек, кроме точки t_0 .

На основе условий Ш 7., Ш 9. определен область \mathcal{D}_{01} (рисунок 2)

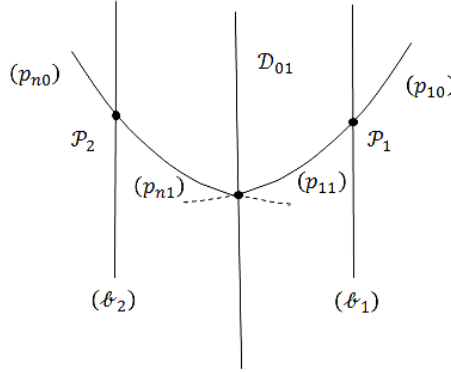


Рисунок 2. Область \mathcal{D}_{01} .

Ш 10. $\frac{d\operatorname{Re} F_m(t_1 + ih_1(t_1))}{dt_1} < 0, m = 2, \dots, n_j, t_{10} < t_1 \leq \alpha_2,$

$\frac{d\operatorname{Re} F_m(t_1 + ih_n(t_1))}{dt_1} < 0, m = 1, \dots, n - 1; \alpha_1 \leq t_1 \leq t_{10}, \alpha_1, \alpha_2$ – некоторые постоянные, $t_0 = t_{10} + it_{20}; t_2 = h_1(t_1), t_{10} \leq t_1 \leq \alpha_2$ уравнение линии (p_{11}) ;

$t_2 = h_n(t_1), \alpha_1 \leq t_1 \leq t_{10}$ уравнение линии (p_{n1}) ;

$(p_{m1}) = \{t \in D, \operatorname{Re} F_m(t) = \operatorname{Re} F_m(t_0) = 0\} \subset (p_{m0}), m = 1, \dots, n.$

В четвертом параграфе рассматривается задача существования ОП решения задачи (22)-(23).

Решение задачи выражается теоремой:

Теорема 4. (Существование ОП). Пусть выполняются Ш6 – Ш10. Тогда существует область $\mathcal{D}_{01} \subset \mathcal{D}$ и решение задачи (22)-(23) определенное в \mathcal{D}_{01} и выполняется

$$\forall t \in \mathcal{D}_{01} (z_j(t_0, \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ по } \varepsilon).$$

Из теоремы 4 вытекает существование $x(t, \varepsilon)$ – решения системы (18) удовлетворяющее условию $\|x(t_0, \varepsilon) - \xi_j(t_0)\| \leq M_{10}\varepsilon$ в области \mathcal{D}_{01} и \mathcal{D}_{01} есть ОП этого решения к решению $\xi_j(t)$.

В пятом параграфе доказано существование общей части ОП решений системы СВОДУ(С) к некоторым решениям системы НУ.

В шестом параграфе рассмотрен пример системы СВОДУ(C), система НУ которой имеет несколько решений.

Система

$$\begin{aligned} \varepsilon x'_k(t, \varepsilon) &= a_k(t)x_k(t, \varepsilon) + x_k^2(t, \varepsilon) + \varepsilon f_k(t, x_1, \dots, x_n), \\ k &= 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (24)$$

рассматривается с начальным условием

$$x_k(t_0, \varepsilon) = x_k^0, \quad (25)$$

где $t_0, t \in \mathcal{D} \subset C$ и \mathcal{D} – открытая, ограниченная, односвязная область.

Пусть выполняются условия:

Ш 11. $a_k(t) \in Q(\mathcal{D})$ и $\forall t \in \mathcal{D} (\operatorname{Im} a_k(t) > 0)$, $k = 1, \dots, n$.

Ш 12. $f_k(t, x_1, \dots, x_n) \in Q(H)$, H – некоторая открытая, ограниченная, односвязная область переменных t, x_1, \dots, x_n .

Система НУ, системы (24) имеет вид:

$$a_k(t)\xi_k(t) + \xi_k^2(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (26)$$

Доказано, что система (26) имеет 2^n решений. Далее доказано существование ОП решений задачи (24)-(25) к решениям системы (26). На этом примере доказано существование ОП решений задачи (24)-(25) к $2n$ решениям системы (26).

ВЫВОДЫ

В данной работе рассмотрены СВОДУ(C) первого порядка и системы состоящие из n СВОДУ(C) первого порядка, НУ и системы НУ, которые имеют несколько решений.

Введено понятие ОП решения СВОДУ(C) (систем) к решению НУ (систем НУ). Доказано существование ОП и установление связи между ними определена, как основная задача.

По итогам исследований получены следующие результаты:

1. Введено понятие ОП решения СВОДУ(C) (систем) к решениям НУ (систем НУ).
2. Для решения задачи существования ОП применены линии уровня гармонических функций, порождаемых аналитическими функциями входящие в СВОДУ(C):

- с помощью линии уровней определена топология областей в комплексной плоскости;
 - линиями уровней области разделены на части и по некоторым свойствам выбраны отдельные части;
 - сформулированы условия существования общих частей выбранных отдельных частей;
 - деление областей, выбор отдельных частей, существование общих частей выбранных отдельных частей проиллюстрированы примерами.
3. Для общего случая доказано существование ОП для решения СВОДУ(C) (систем) к одному решению НУ (систем НУ):
 - при доказательстве использованы области определенные линиями уровней гармонических функций ;
 - доказательство существования решения проведено использованием принципа отображения пространства в себя.
 4. Исследована зависимость ОП от начальных значений и обнаружены явления “расширение”, “сужение” ОП.
 5. Рассмотрены связи ОП при различных начальных значениях.
 6. В общем случае доказано существование общей части областей притяжений.
 7. Обобщены результаты ранних исследований.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Полученные результаты можно продолжить по следующим направлениям:

- Применить метод, разработанный в данной работе, когда порождающие гармонические функции, аналитические функции имеют нули и полюсы;
- Построение асимптотического разложения решений СВОДУ(C) по малому параметру в ОП;
- Существование ОП, когда начальные значения заданы на границах областей.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Нарымбетов, Т.К.** Покрытие областей в R^2 [Текст] / К.С. Алыбаев, Т.К. Нарымбетов // Вестник ЖАГУ. – 2019. – №3 (42). – С. 133-142.
2. **Нарымбетов, Т.К.** Аналитические функции комплексного переменного с параметрами [Текст] / К.С. Алыбаев, Т.К. Нарымбетов // Международный научно-исследовательский журнал. – 2019. – № 12 (90). – С. 6-12.
3. **Нарымбетов, Т.К.** Сингулярно возмущенные уравнение первого порядка при нарушении устойчивости точки покоя [Текст] / К.С. Алыбаев, Т.К. Нарымбетов // Наука, новые технологии и инновации кыргызстана. – Бишкек, 2019. – №12. – С. 49-53.
4. **Нарымбетов, Т.К.** Asymptotic analysis of solutions of systems of three singularly perturbed first-order equations [Текст] / К.С. Алыбаев, Т.К. Нарымбетов // Вестник Института математики НАН КР, Бишкек 2020, №1, стр. 46-55.
5. **Нарымбетов, Т.К.** Boundary lines for attraction areas. [Текст] / К.Б. Тампагаров, А.Б. Мурзабаева, Т.К. Нарымбетов // Вестник Института математики НАН КР. – Бишкек, 2020. – №1. – С. 55-58.
6. **Нарымбетов, Т.К.** Асимптотический анализ решений слабо нелинейных сингулярно возмущенных уравнений первого порядка в комплексных областях [Текст] / К.С. Алыбаев, Т.К. Нарымбетов // Вестник Ошского государственного университета: Серия «Физика, математика, информационные технологии, экономика, технические науки». – Ош, 2020. – №1. – С. 96-103.
7. **Нарымбетов, Т.К.** Пограничные линии аналитических функций с параметром [Текст] / К.С. Алыбаев, Т.К. Нарымбетов // Международный научно-исследовательский журнал. – 2020. – №12 (102), часть 1. – С. 9-14.
8. **Нарымбетов, Т.К.** Анализ исследований сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях [Текст] / Т.К. Нарымбетов // Вестник Ошского государственного университета. – Ош, 2021. – №1 (1). – С. 74-89.
9. **Нарымбетов, Т.К.** Asymptotic analysis of solutions to singularly perturbed equations by the method of covering [Текст] / Т.К. Нарымбетов // International Conference Advanced in Applied Mathematics. – Icaam, 2021.
10. **Нарымбетов, Т.К.** Области притяжения решений невозмущенных систем уравнений [Текст] / К.С. Алыбаев, Т.К. Нарымбетов // Вестник ЖАГУ. – 2021. – №1 (46). – С. 5-8.

11. **Нарымбетов, Т.К.** Существование общих областей притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / Т.К. Нарымбетов // Вестник ЖАГУ. – 2021. – №1 (46). – С. 9-13.
12. **Нарымбетов, Т.К.** Взаимосвязь областей притяжений и их зависимость от начальных значений [Текст] / Т.К. Нарымбетов // Евразийское научное объединение: “Интеграция науки в современном мире” 76я Международная научная конференция. – 2021. – С. 45-48.
13. **Нарымбетов, Т.К.** Области притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений при различных значениях [Текст] / К.С. Алыбаев, Т.К. Нарымбетов // Евразийское научное объединение: “Интеграция науки в современном мире” 76я Международная научная конференция. – 2021. – С. 1-6.
14. **Нарымбетов, Т.К.** Гармоникалык функциялардын деңгээлин сызыктарын колдонуу аркылуу комплекстик тегиздикте областарды түзүү [Текст] / Т.К. Нарымбетов // Вестник ЖАГУ. – 2021. – № 2 (47). – С. 11-15.
15. **Нарымбетов, Т.К.** Гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктарына мисалдар [Текст] / Т.К. Нарымбетов // Вестник ЖАГУ. – 2021. – № 2 (47). – С. 16-20.

**Нарымбетов Талантбек Канатбековичтин “Сингулярдык
козголгон теңдемелердин чечимдеринин тартылуу областарынын
жашашы жана байланышы” деген темада 01.01.02 –
дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана
оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика
илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу
үчүн жазылган диссертациясынын**

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: сингулярдык козголгон жана козголбогон теңдемелер, аналитикалык жана гармоникалык функциялар, тартылуу областы, деңгээл сызыктар, тартылуу областынын жалпы бөлүгү, кеңейтилиши, тарытылышы.

Изилдөөнүн объектиси: Бир нече чечимге ээ болгон козголбогон теңдеме жана алардын системасы. Аналитикалык функциялуу сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелер жана алардын системалары.

Изилдөөнүн максаты: Сингулярдык козголгон теңдеменин (системанын) чечимдеринин жана козголбогон теңдемелердин (системалардын) чечимдеринин ортосундагы байланышын тартылуу областы аркылуу аныктоо жана тартылуу областардын жашашын жалпы учурда далилдөө, алардын өз ара байланыштарын тургузуу.

Изилдөө методдору: Гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктарына негизделген топологиялык, мейкиндикти өзүнө-өзүн чагылдыруу жана удаалаш жакындаштыруу методдору.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы жана теориялык маанилүүлүгү: Комплекстик тегиздиктеги кадимки дифференциалдык теңдемелердин (системалардын) жана козголбогон теңдемелердин (системалардын) чечимдеринин ортосундагы байланыш – тартылуу областы түшүнүгү аркылуу аныкталды. Топологиялык методдорду колдонуу аркылуу тартылуу обласынын жашашы жана алардын ортосундагы байланыштар орнотулду. Диссертацияда иштелип чыгылган методдорду комплекстик тегиздикте сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелерди изилдөөлөрдө жана алардын чечимдеринин асимптотикасын тургузууда колдонсо болот.

Изилдөөнүн практикалык мааниси: Алынган жыйынтыктар козголуу, термелүү, автоматтык башкаруу жана жөндөө, электротехника, радиотехника, гидродинамикадагы түрдүү абалдагы процесстерди изилдөөдө колдонулушу мүмкүн.

РЕЗЮМЕ

**диссертации Нарымбетова Талантбека Канатбековича та тему:
“Существования и связи областей притяжений решений
сингулярно возмущенных уравнений” на соискание ученой
степени кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление**

Ключевые слова: сингулярно возмущенное и невозмущенное уравнения, аналитические и гармонические функции, область притяжения, линии уровня, общая часть области притяжения, расширение, сужение.

Объект исследования: Сингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы с аналитическими функциями, вырожденные уравнения и системы, которые имеют несколько решений.

Цель исследования: Определить связь между решениями сингулярно возмущенного уравнения (системы) и невозмущенного уравнения (системы) через область притяжения и доказать существование областей притяжения в общем случае, установление взаимосвязи между ними.

Методы исследования: Топологические методы, основанные на линиях уровней гармонических функций и метод отображения пространство в себя, последовательных приближений.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования: С помощью понятие области притяжения определена связь между решениями сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений (систем) и невозмущенных уравнений (систем) в комплексной плоскости. С применением топологических методов установлено существование области притяжения и связи между ними. Разработанные в диссертации методы могут быть использованы для исследования сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости и построения асимптотики решений.

Практическая значимость исследования: Полученные результаты могут быть использованы при исследовании процессов различного состояния в возмущении, колебании, автоматического управления и регулирования, в электротехнике, радиотехнике, гидродинамике.

SUMMARY

Narymbetov Talantbek Kanatbekovich's dissertations on the topic: “The existence and connections of the domains of attraction of solutions of singularly perturbed equations” for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in specialty 01.01.02 - differential equations, dynamic systems and optimal control

Key words: singularly perturbed, unperturbed equation, analytical and harmonic functions, region of attraction, level lines, common part of the region of attraction, expansion, contraction.

Object of research: Singularly perturbed ordinary differential equations and systems with analytic functions, degenerate equations, systems of which have several solutions.

Purpose of the research: To determine the connection between the solutions of the singularly perturbed equation (system) and solutions to the unperturbed equation (system) through the domain of attraction and to prove the existence of domains of attraction in the general case, establishing the relationship between them.

Research methods: Topological methods and based on the level lines of harmonic functions and the method of mapping space into itself, successive approximations.

Scientific novelty and theoretical significance of the research: Using the concept of the domain of attraction, the relationship between solutions of ordinary singularly perturbed differential equations (systems) and solutions of unperturbed equations (systems) in the complex plane is determined. Using topological methods, the existence of a region of attraction and a connection between them have been established. The methods developed in the thesis can be used to study ordinary differential equations in the complex plane and to construct the asymptotics of solutions.

Practical significance of the research: The results obtained can be used in the study of processes of various states in disturbance, oscillation, automatic control and regulation, in electrical engineering, radio engineering, hydrodynamics.



Подписано в печать: 04.01.2022

Заказ №7
Объем 1,5 п.л

Тираж 50 даана.
Формат 60х90 1/16.

“Кыргызбай ажы” компьютерные услуги.
г. Жалал-Абад ул. Чехова