Ош мамлекеттик университети

Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер Академиясынын Түштүк бөлүмүнүн жаратылыш байлыктары Институту

Жалал-Абад мамлекеттик университети

Диссертациялык кеңеш К 01.19.599

Кол жазманын укугунда
УДК: 517.955.8

Орозов Максатбек Омурбекович

Бисингулярдык козголгон эллиптикалык типтеги сызыктуу теңдемелер үчүн чектик маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасы

01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу

Физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациянын авторефераты

Ош – 2021

Диссертациялык иш Ош мамлекеттик университетинин математикалык анализ кафедрасында аткарылган

Илимий жетекчи: **Турсунов Дилмурат Абдиллажанович,** физика-математика илимдердин доктору, профессор, Ош мамлекеттик университетинин Кыргыз-Россия факультетинин деканы.

Расмий оппоненттери: **Байзаков Асан Байзакович,** физика-математика илимдердин доктору, профессор, Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын математика институту, «Колдонмо математика жана информатика» лабораториясынын башчысы.

Тампагаров Куштарбек Бекмуратович, физика-математика илимдердин доктору, доцент, Илимий-изилдөө медициналык-социалдык институтунун ректору.

Жетектөөчү мекеме: Фергана мамлекеттик университетинин математикалык анализ жана дифференциалдык теңдемелер кафедрасы,
Дареги: 112000, Өзбекистан, Фергана шаары, Мураббийлар көчөсү, 19.

Диссертацияны коргоосу 2021-жылдын « 8 октябрь» күнү саат 16^{30} да Ош мамлекеттик университети, Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын түштүк бөлүмүнүн жаратылыш ресурстары институту жана Жалал-Абад мамлекеттик университетине караштуу физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын коргоо боюнча түзүлгөн К 01.19.599 диссертациялык кеңештин жыйынында корголот.

Дареги: Кыргызстан, 723500, Ош шаары, Ленин көчөсү, 331, ауд. 203.

Диссертациянын коргоосунун онлайн трансляциялоонун ссылкасы: https://vc.vak.kg/b/k_0-37i-ped-2ps

Диссертация менен Ош мамлекеттик университетинин борбордук китепканасынан жана диссертациялык кеңештин oshsu.kg сайтынан таанышууга болот.

Диссертациялык кеңештин окумуштуу катчысы
ф.-м.и.к., доцент Бекешов Т.О.

ИШТИН ЖАЛПЫ МҮНӨЗДӨМӨСҮ

Диссертациянын темасынын актуалдуулугу. Баарыбызга белгилүү болгондой стационардык процесстердин математикалык моделдери эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер аркылуу мүнөздөлөт. Мисалы, Лапластын жана Пуассондун теңдемелери ар түрдүү стационардык физикалык талааларды мүнөздөйт, кванттык механикадагы белгилүү Шрёдингердин теңдемесинин стационардык аналогу жана Гельмгольцтун теңдемеси дагы эллиптикалык типтеги теңдемелер аркылуу туюнтулат, Навье-Стокстун теңдемелер системасынын стационардык аналогу болгон эллиптикалык типтеги теңдеме «кыймылсыз» агымды (устоявшегося течения) мүнөздөйт.

Биздин диссертация бисингулярдык козголгон сызыктуу бир тектүү эмес экинчи тартиптеги эки өзгөрүлмөлүү эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн алкакта коюлган чектик Дирихленин, Неймандын жана Робендин маселелеринин чыгарылыштарынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларын тургузууга арналган.

Эгерде сингулярдык козголгон маселенин тиешелүү козголбогон маселесинин чыгарылышы изилденип жаткан аймактын кандайдыр бир бөлүгүндө (мисалы, чек арасында) жылма эмес, б.а. дифференцирленбөөчү болсо, анда бул маселе А.М. Ильиндин термини боюнча бисингулярдык деп аталат.

Сингулярдык жана бисингулярдык козголгон эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер боюнча бир топ окумуштуулар изилдөөлөрдү жүргүзүшкөн, алар: Л.А. Люстерник (1957), М.И. Вишик (1957), Н. Левинсон (1950), В. Вазов (1944), О.А. Олейник (1952), В.Ф. Бутузов (1973), А.М. Ильин (1972), Е.Ф. Леликова (1975), Р.Р. Гадыльшин (1986), А.Р. Данилин (1998), Дж. Коул (1968), Ж.-Л.Лионс (1968), Н. Темме (2005), А.А. Ершов (2012), Д.А. Турсунов (2013) ж.б.

Так чыгарылышка ээ болгон бисингулярдык козголгон маселелердин классы өтө тар, дээрлик жокко эсе. Ошондуктан мындай маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасын тургузуу б.а. маселенин чыгарылышын кичине параметр нөлгө умтулгандагы абалын изилдөө актуалдуу болуп саналат. Биздин диссертацияда каралган маселелер мурда изилденген эмес, алгачкы жолу изилденип жатат.

Алкакта коюлган чектик маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык ажыралмалары чек аралык жана жалпыланган чек аралык функциялар методдорунун жардамында тургузулган. Асимптотикалык ажыралмалардын калдык мүчөлөрү дифференциалдык барабарсыздыктар методун жана максимум принцибин колдонуп бааланган.

Диссертациянын темасынын ири илимий программалар (долбоорлор) жана негизги илим изилдөө жумуштар менен байланышы. Жумуш Ош МУнун алдындагы фундаменталдык жана колдонмо изилдөөлөр Институтунда төмөнкү илимий проектердин алкагында аткарылган:

1) «Күйүү жана жарылуу маселелеринин ар түрдүү моделдерин жалпылоо жана сунуштар». Илимий проект Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим министрлиги тарабынан каржыланган, 2017- ж.

2) «Фазалык өтүү маселелери жана критикалык кубулуштар. Алардын теңдемелеринин математикалык аспектилери, ылдам өтүү жана асимптотикалар». Илимий проект Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим министрлиги тарабынан каржыланган, 2019- ж.

Изилдөөнүн максаты жана милдеттери. Изилдөөнүн максаты – бисингулярдык козголгон эллиптикалык типтеги сызыктуу бир тектүү эмес теңдемелер үчүн чектик маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасын тургузуу.

Изилдөөнүн милдеттери:

1. Теңдеменин потенциалы алкактын чек арасында дифференцирленбөөчү функция болгон учурда Дирихленин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасын тургузуу;

2. Тиешелүү козголбогон маселеси регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон бисингулярдык козголгон эллиптикалык типтеги сызыктуу теңдемелер үчүн Дирихленин, Неймандын жана Робендин чектик маселелеринин чыгарылыштырынын асимптотикаларын тургузуу.

Иштин илимий жаңылыгы. Алгачкы жолу диссертациялык жумушта:

- теңдеменин потенциалы алкактын чек-арасында дифференцирленбөөчү функция болгон учурда Дирихленин маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы тургузулду.

- тиешелүү козголбогон маселеси регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон Дирихленин, Неймандын жана Робендин маселелеринин чыгарылыштарынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмалары тургузулду.

Алынган жыйынтыктардын практикалык маанилүүлүгү. Диссертация теориялык мазмунда болгону менен анын натыйжалары козголуулар теориясында, гидродинамикада, аэродинамикада, химиялык кинетикада, илимдин жана башка тармактарында колдонулушу мүмкүн. Бисингулярдык козголгон маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык ажыралмаларын тургузууга карата диссертацияда иштелип чыгылган алгоритмдер башка математикалык моделдер үчүн колдонулушун табышы мүмкүн. Изилдөөнүн натыйжалары козголуулар теориясы боюнча лекцияларды окууда «Математика», «Колдонмо математика жана информатика», «Математика жана компьютердик илимдер» багыттары боюнча магистрлерди,

бакалаврларды даярдоодогу атайын курстарды окутууда, андан сырткары дифференциалдык теңдемелердин сапаттык теориясы менен байланышкан математика аймагындагы башка теориялык маселелерди чыгарууда колдонушу мүмкүн.

Диссертациянын коргоого коюлуучу негизги жоболору

- Теңдеменин потенциалы алкактын чек арасында дифференцирленбөөчү функция болгон учурда Дирихленин маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы;

- Теңдеменин потенциалы $p(\rho)=\sqrt[n]{\rho-1}, n\in N$ болгон бисингулярдык козголгон экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн Дирихленин алкак үчүн коюлган маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы;

- Тиешелүү козголбогон маселеси регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон бисингулярдык козголгон экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн Дирихленин, Неймандын жана Робендин алкакта коюлган маселесинин чыгарылышынын жашашы, жалгыздыгы жана чыгарылыштын чектелгендиги;

- Тиешелүү козголбогон маселеси регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон бисингулярдык козголгон экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн Дирихленин, Неймандын жана Робендин алкакта коюлган маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы.

Изденүүчүнүн жеке салымы. Диссертацияда чагылдырылган бардык илимий жыйынтыктар авторго гана таандык. Илимий жетекчиси ф.-м.и.д. профессор Д.А. Турсунов менен авторлош болгон макалаларда маселенин коюлушу Д.А. Турсуновго, ал эми илимий жыйынтыктар авторго таандык. [2]-макалада илимий жыйынтыктарды талкуулоо А.А. Халматовго, илимий жыйынтыктар авторго таандык. Магистранттар авторлош болгон [7]- макалада илимий жыйынтыктарды талкуулоо М.И. Маматбуваева жана Ш.А. Раманкуловаларга, илимий жыйынтыктар авторго таандык.

Изилдөөнүн натыйжаларын апробациялоо. Жумуштун жыйынтыктары төмөнкү Эл аралык конференцияларда баяндалган жана талкууланган:

- «Дифференциалдык теңдемелердин жана ага жандаш математиканын бөлүмдөрүнүн заманбап маселелери» аттуу илимий конференция. – Фергана: Фергана мамлекеттик университети, 12-13- март, 2020-ж.

- ОшМУнун 80 жылдыгына арналган «Аймактарды өнүктүрүү жана өлкөнү санариптештирүү шарттарындагы билим берүүнүн жана илимдин актуалдуу маселелери» аттуу Эл аралык илимий-практикалык конференция. – Ош: ОшМУ, 28.05.2020-ж.;

- КР УИА математика институтунун түптөлүшүнүн 35 жылдыгына арналган «III Бөрүбаевдик окуу» Эл аралык илимий конференция. – Бишкек: КР УИА математика институту, 2019-ж.;

- Евразиялык математикалык журналдын 10 жылдыгына арналган «Анализдин, дифференциалдык теңдемелердин жана алгебранын актуалдуу көйгөйлөрү» конференциясы. – Нур-Султан: Л.Н. Гумилев атындагы ЕУУ, 16-19 окт. 2019-ж.;

- А. Самойленконун туулган күнүнүн 80 жылдыгына арналган «Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8» конференция. – Чолпон-Ата, 2018-ж.;

- «Дифференциалдык теңдемелердин актуалдуу маселелери жана алардын колдонулуштары» аттуу илимий конференция. – Ташкент: Өзбекистан Улуттук университети, 15-17-декабрь, 2017-ж.

Андан сырткары “Дифференциалдык теңдемелердин актуалдуу маселелери” аттуу илимий семинарларда талкууланган (семинардын жетекчиси: ф.-м.и.д. профессор, КР УИАнын корреспондент-мүчөсү К. Алымкулов, Ош ш., 2018-2021-жж.).

Диссертациянын натыйжаларынын басылып чыгарылышы. Изилдөөлөрдүн натыйжасында изденүүчү тарабынан: 7 макала [1]-[7] жана 5 докладдардын тезиси [8]-[12] жарыкка чыгарылган. Анын ичинде [1]-[3] макалалар Scopus жана Web of Science базаларында индексирленген журналдарда жарыкка чыккан. [4]- макала RSCI базасында индексирленген журналда жарыкка чыккан. [1]-[4]- макалалар жарыкка чыккан журналдардын РИНЦтеги импакт фактору 0,1 ден жогору. [1]-[4]- илимий макалаларга Кыргызпатенттен автордук күбөлүктөр алынган. Топтогон баллы – 328.

Диссертациянын түзүлүшү жана көлөмү. Жумуш мазмундан, шарттуу белгилөөлөрдүн тизмесинен, киришүү жана 10 параграфга бөлүнгөн төрт баптан, жыйынтыктардан, 64 колдонулган адабияттардын тизмесинен турат. Ар бир бап аягында корутунду менен аякталат. Диссертациянын жалпы көлөмү машина жазмасында терилген 131 бет.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН НЕГИЗГИ МАЗМУНУ

Киришүүдө теманын актуалдуулугу негизделген, жумушка жалпы мүнөздөмө, изилдөөнүн максаты жана маселеси, илимий жанылыгы, практикалык балуулугу, коргоого алынып чыгарылган негизги баяндамасы берилген.

Диссертациянын «АДАБИЯТТАРГА ЖАНА ДИССЕРТАЦИЯНЫН НАТЫЙЖАЛАРЫНА ОБЗОР» биринчи бапы эки параграфтан турат. «§ 1.1. Адабияттарга обзор» деп аталган § 1.1де диссертациянын темасы боюнча талдоо келтирилген. Бул параграфта сунушталып жаткан диссертациялык

жумуштун темасына жакын болгон башка авторлордун илимий жыйынтыктарына анализ жүргүзүлгөн.

«§ 1.2. Диссертациянын жыйынтыктарына обзор» деп аталган § 1.2 де диссертациянын илимий жыйынтыктарынын кеңири талдоосу келтирилген. Маселелердин коюлушу түшүнүктүү баяндалган жана теоремалар далилдөөсү келтирилген. Биринчи баптын корутундусунда жүргүзүлгөн анализдердин жыйынтыгында диссертациялык изилдөө актуалдуу, оригиналдуу, убагында аткарылгандыгы жана анык теориялык, практикалык кызыгууга ээ эгендиги белгиленген.

«ИЗИЛДӨӨНҮН МЕТОДОЛОГИЯСЫ ЖАНА МЕТОДДОРУ» аталыштагы экинчи бап эки параграфтан турат. «§ 2.1. Изилдөөнүн объектилери жана предметтери» деп аталган § 2.1де изилдөөнүн объектилери, предмети келтирилген:

Изилдөөнүн объектилери: 1) Теңдеменин потенциалы $p(\rho)=\sqrt[n]{\rho-1}, n\in N$ болгон бисингулярдык козголгон экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн Дирихленин алкак үчүн коюлган маселеси.

2) Тиешелүү козголбогон маселе регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон бисингулярдык козголгон сызыктуу бир тектүү эмес экинчи тартиптеги эки өзгөрүлмөлүү эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн Дирихленин, Неймандын жана Робендин маселелери.

Диссертациялык жумуштун изилдөөсүнүн предмети – Дирихленин, Неймандын жана Робендин чектик бисингулярдык маселелеринин чыгарылыштарынын, ε кичине параметри нөлгө умтулгандагы, бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларын тургузуу.

«§ 2.2. Изилдөөнүн методдору» деп аталган § 2.2-де алгач негизги түшүнүктөргө жана аныктамаларга токтолуп, анан диссертациялык жумушта колдонулган: кичине параметр методу; чек аралык функциялар методу; жалпыланган чек аралык функциялар методу; максимум принциби; дифференциалдык барабарсыздыктар методдору мисалдар менен баяндалган.

Диссертациянын негизги илимий жыйынтыктары 3, 4- баптарда келтирилген. «БАП 3. ТЕҢДЕМЕНИН ПОТЕНЦИАЛЫ АЛКАКТЫН ЧЕК-АРАСЫНДА ДИФФЕРЕНЦИРЛЕНБӨӨЧҮ ФУНКЦИЯ БОЛГОН УЧУРДА ДИРИХЛЕНИН МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ» аталыштагы үчүнчү бапта теңдеменин потенциалы алкактын ички чек арасында дифференцирленбөөчү функция болгон учурда Дирихленин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы тургузулган. 3-бап үч параграфтан турат, биринчи параграфта маселенин коюлушу баяндалат:

Төмөнкү чектик маселени изилдейбиз

$$\varepsilon\Delta v(\rho,\varphi,\varepsilon)-\sqrt[n]{\rho-1}v(\rho,\varphi,\varepsilon)=F(\rho,\varphi),\qquad (\rho,\varphi)\in D, \qquad (1)$$

$$v(1,\varphi,\varepsilon)=\psi_1(\varphi),\ \ v(a,\varphi,\varepsilon)=\psi_2(\varphi),\ \ \varphi\in[0,2\pi], \qquad (2)$$

мында $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,1<\rho<a,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$, $n\in N$, $F\in C^{\infty}(\bar{D})$, $\psi_k\in C^{\infty}[0,\ 2\pi]$, $k=1,\ 2$, $\sqrt[n]{\rho-1}$ – теңдеменин потенциалы, n – тамырдын көрсөткүчү.

Төмөнкү теорема жана лемма далилденди.

1-теорема. (1), (2)- маселенин чыгарылышы жашайт жана жалгыз болот.

1-лемма. Каралып жаткан (1), (2)- Дирихленин алкак үчүн маселеси бисингулярдык маселе, б.а. эки (кош) өзгөчөлүккө ээ.

Алгач n=2 жана n=3 болгон учурларды терең изилдеп анан жалпы жыйынтык чыгарылган.

§3.2де n=2 учур изилденген. Натыйжада төмөнкү лемма жана теорема далилденген.

2- теорема. n=2 болгон учурда (1), (2)- маселенин чыгарылышынын асимптотикалык ажыралмасын төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{2m+1}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{4m+2}\lambda^k z_k(t,\varphi)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{10m+6}\mu^k w_k(\tau,\varphi)+O(\varepsilon^{2m+1}),\ \varepsilon\to 0,$$

мында $t=(a-\rho)/\lambda,\ \lambda=\sqrt{\varepsilon}$, $\tau=(\rho-1)/\mu^2,\ \mu=\sqrt[5]{\varepsilon}$,

$$v_0(\rho,\varphi)=-\frac{f(\rho,\varphi)-f(1,\varphi)}{\sqrt{\rho-1}},\ v_{2k}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{2k-1}(\rho,\varphi)-\Delta v_{2k-1}(1,\varphi)}{\sqrt{\rho-1}},$$

$$v_{2k-1}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{2k-2}(\rho,\varphi)+-\dfrac{\tilde{v}_{2k-2,0}(\varphi)}{4(\rho-1)^{3/2}}+\dfrac{3\tilde{v}_{2k-2,1}(\varphi)\rho-2\tilde{v}_{2k-2,0}(\varphi)}{4\rho\sqrt{\rho-1}}}{\sqrt{\rho-1}},$$

$\tilde{v}_{2k-2,0}(\varphi)=\tilde{v}_{2k-2}(1,\varphi),\ \tilde{v}_{2k-2,1}(\varphi)=\dfrac{\partial\tilde{v}_{2k-2}(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1},\ v_{2k-1}\in C^{\infty}(\bar{D})$,

$v_{2k}\in C(\bar{D}), v_{2k}\in C^{\infty}(D)$,

$w_{10k}(t,\varphi)=O(t^{-1/2}),\ w_{10k+2}(t,\varphi)=O(t^{-2}),\ w_{10k+4}(t,\varphi)=O(t^{-1}),\ t\to\infty,\varphi\in[0,2\pi]$,

калган $w_n(t,\varphi)$ функциялар $t\to\infty$ болгондо экспоненциалдуу мүнөздө нөлгө умтулушат.

$$z_0(t,\varphi)=\left(\psi_2(\varphi)-v_0(a,\varphi)\right)e^{-\sqrt[4]{a-1}t},\ z_k(t,\varphi)=e^{-\sqrt[4]{a-1}t}P_k(t,\varphi),\ P_k\in C^{\infty}(D_1),$$

$D=\{(\rho,\varphi)\,|\,1<\rho<a,0\le\varphi\le 2\pi\},\ D_1=\{(t,\varphi)\,|\,0<t<\dfrac{a-1}{\lambda},0\le\varphi\le 2\pi\}$.

2-лемма. Төмөнкү чектик маселенин чыгарылышы жашайт жана жалгыз болот

$$z''(t)-\sqrt{t}z(t)=ct^{-k/2},\ t\in(0,\infty),\ k=0,1,3,\ z(0)=z^0,\ \lim_{t\to\infty}z(t)=0,$$

мында c, z^0 – белгилүү турактуулар.

Бул маселенин чыгарылышы төмөнкү көрүнүштө болот:

$$z(t)=\frac{z^0}{z_2(0)}z_2(t)+\frac{c}{c_1}\left(z_2(t)\int_0^t\frac{z_1(s)}{\sqrt{s^k}}ds+z_1(t)\int_t^\infty\frac{z_2(s)}{\sqrt{s^k}}ds\right),$$

мында $z_1(t)=\sqrt{t}I_{2/5}\left(4t^{5/4}/5\right)$, $z_2(t)=\sqrt{t}K_{2/5}\left(4t^{5/4}/5\right)$, $I_{2/5}(s),\ K_{2/5}(s)$ - Бесселдин модифицирленген функциялары. $z_1(t)$ жана $z_2(t)$ функциялардын касиеттеринен төмөнкү асимптотикалык баалар келип чыгат:

$$z(t)=O\left(t^{-(k+1)/2}\right),\ t\to\infty,\ \text{жана}\ z(t)=O\left(t^{2-k/2}\right),\ k=0,1,3,\ t\to0.$$

§ 3.3тө n=3 болгон учур изилденген. Төмөнкү теорема жана лемма далилденген.

3- теорема. n=3 болгон учурда (1), (2)- маселенин чыгарылышынын асимптотикалык ажыралмасын төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{3m+2}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{6m+4}\lambda^k z_k(t,\varphi)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{21m+15}\mu^k w_k(\tau,\varphi)+O(\varepsilon^{3m+2}),\ \varepsilon\to0,$$

мында $t=(a-\rho)/\lambda,\ \lambda=\sqrt{\varepsilon},\ \tau=(\rho-1)/\mu^3,\ \mu=\sqrt[7]{\varepsilon},\ v_0(\rho,\varphi)=-\dfrac{f(\rho,\varphi)-f(1,\varphi)}{\sqrt[3]{\rho-1}},$

$$v_{3k}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{3k-1}(\rho,\varphi)+h_{3k}(\rho,\varphi)}{\sqrt[3]{\rho-1}}=\sqrt[3]{(\rho-1)^2}\,\tilde{v}_{3k}(\rho,\varphi),\ \tilde{v}_{3k}\in C^\infty(\bar{D}),$$

$$v_{3k+1}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{3k}(\rho,\varphi)+h_{3k+1}(\rho,\varphi)}{\sqrt[3]{\rho-1}}=\sqrt[3]{\rho-1}\tilde{v}_{3k+1}(\rho,\varphi),\ \tilde{v}_{3k+1}\in C^\infty(\bar{D}),$$

$$v_{3k+2}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{3k+1}(\rho,\varphi)+h_{3k+2}(\rho,\varphi)}{\sqrt[3]{\rho-1}}=\tilde{v}_{3k+2}(\rho,\varphi),\ \tilde{v}_{3k+2}\in C^\infty(\bar{D}),$$

$$\forall k\in N_0:\ w_k\in C^\infty(D_0),\ |w_k(\tau,\varphi)|\le\frac{c}{\sqrt[3]{\tau}},\ \tau\to\infty,\ \varphi\in[0,2\pi],$$

$$z_0(t,\varphi)=\left(\psi_2(\varphi)-v_0(a,\varphi)\right)e^{-\sqrt[6]{a-1}\,t},\ z_k(t,\varphi)=e^{-\sqrt[6]{a-1}\,t}P_k(t,\varphi),\ P_k\in C^\infty(D_1).$$

бул жерде $h_{3k}(\rho,\varphi)=-\Delta v_{3k-1}(1,\varphi)$,

$$h_{3k+1}(\rho,\varphi)=-\frac{2(\tilde{v}_{3k,0}(\varphi)+\tilde{v}_{3k,1}(\varphi)(\rho-1))}{9\sqrt[3]{(\rho-1)^4}}+\frac{4\tilde{v}_{3k,1}(\varphi)}{3\sqrt[3]{\rho-1}}+\frac{2\tilde{v}_{3k,0}(\varphi)}{3\rho\sqrt[3]{\rho-1}},$$

$$h_{3k+2}(\rho,\varphi)=\frac{2(\tilde{v}_{3k+1,0}(\varphi)+\tilde{v}_{3k+1,1}(\varphi)(\rho-1))}{9\sqrt[3]{(\rho-1)^5}}-\frac{2\tilde{v}_{3k+1,1}(\varphi)}{3\sqrt[3]{(\rho-1)^2}}-\frac{\tilde{v}_{3k+1,0}(\varphi)}{3\rho\sqrt[3]{(\rho-1)^2}},$$

$$\tilde{v}_{s,0}(\varphi)=\tilde{v}_s(1,\varphi),\ \tilde{v}_{s,1}(\varphi)=\frac{\partial\tilde{v}_s(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1},$$

$$D=\{(\rho,\varphi)\,|\,1<\rho<a, 0\le\varphi\le 2\pi\},\ D_1=\{(t,\varphi)\,|\,0<t<\frac{a-1}{\lambda}, 0\le\varphi\le 2\pi\}.$$

3-лемма. Төмөнкү чектик маселенин чыгарылышы жашайт жана жалгыз болот

$$z''(t)-\sqrt[3]{t}z(t)=\frac{c}{\sqrt[3]{t^k}},\ t\in(0,\infty), 1\le k\le 5,\ z(0)=z^0,\ \lim_{t\to\infty}z(t)=0,\ c,\ z^0 - \text{const}.$$

Бул маселенин чыгарылышы төмөнкү көрүнүштө болот

$$z(t)=\frac{z^0}{z_2(0)}z_2(t)+\frac{c}{c_1}\left(z_2(t)\int_0^t\frac{z_1(s)}{\sqrt[3]{s^k}}ds+z_1(t)\int_t^\infty\frac{z_2(s)}{\sqrt[3]{s^k}}ds\right).$$

мында $z_1(t)=\sqrt{t}I_{3/7}\left(\frac{6}{7}t^{\frac{7}{6}}\right)$, $z_2(t)=\sqrt{t}K_{3/7}\left(\frac{6}{7}t^{\frac{7}{6}}\right)$, $I_{3/7}(s),\ K_{3/7}(s)$ – Бесселдин модифицирленген функциялары. $z_1(t)$ жана $z_2(t)$ функциялардын касиеттеринен төмөнкү асимптотикалык баалар келип чыгат:

$$z(t)=O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^{k+1}}}\right),\ t\to\infty,\ \text{жана}\ z(t)=z^0+O\left(t^{2-k/3}\right), 1\le k\le 5,\ t\to 0.$$

4-теорема. (1), (2)- маселенин чыгарылышынын асимптотикалык ажыралмасын төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{s}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{2s}\lambda^k z_k(t,\varphi)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{(2n+1)s+1}\mu^k w_k(\tau,\varphi)+O(\varepsilon^s),\ \varepsilon\to 0,$$

мында $s=n(m+1)-1,\ t=(a-\rho)/\lambda,\ \lambda=\sqrt{\varepsilon},\ \tau=(\rho-1)/\mu^n,\ \mu=\sqrt[2n+1]{\varepsilon}$,

$$v_0(\rho,\varphi)=-\frac{f(\rho,\varphi)-f(1,\varphi)}{\sqrt[n]{\rho-1}},$$

$$v_{nk}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{nk-1}(\rho,\varphi)-\Delta v_{nk-1}(1,\varphi)}{\sqrt[n]{\rho-1}}=\sqrt[n]{(\rho-1)^{n-1}}\,\tilde{v}_{nk}(\rho,\varphi),\ \tilde{v}_{nk}\in C^\infty(\bar{D}), k\in N;$$

$$v_{nk+j}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{nk+j-1}(\rho,\varphi)+h_{nk+j}(\rho,\varphi)}{\sqrt[n]{\rho-1}}=\sqrt[n]{(\rho-1)^{n-1-j}}\,\tilde{v}_{nk+j}(\rho,\varphi),\ \tilde{v}_{nk+j}\in C^\infty(\bar{D}),\ j=1,2,...,n-1$$

$$\forall k\in N_0:\ w_k\in C^\infty(D_0),\ |w_k(\tau,\varphi)|\le\frac{c}{\sqrt[n]{\tau}},\ \tau\to\infty,\ \varphi\in[0,2\pi],$$

$$z_0(t,\varphi)=\left(\psi_2(\varphi)-v_0(a,\varphi)\right)e^{-\sqrt[2n]{a-1}\,t},\ z_k(t,\varphi)=e^{-\sqrt[2n]{a-1}\,t}P_k(t,\varphi),\ P_k\in C^\infty(D_1).$$

бул жерде

$$h_{nk+j}(\rho,\varphi)=\frac{(n-1-j)(1+j)}{n^2}\frac{\tilde v_{nk+j-1,0}(\varphi)+(\rho-1)\tilde v_{nk+j-1,1}(\varphi)}{\sqrt[n]{(\rho-1)^{n+1+j}}}+$$

$$+\frac{2(n-1-j)}{n}\frac{\tilde v_{nk+j-1,1}(\varphi)}{\sqrt[n]{(\rho-1)^{1+j}}}+\frac{n-1-j}{n}\frac{\tilde v_{nk+j-1,0}(\varphi)}{\rho\sqrt[n]{(\rho-1)^{1+j}}};\ j=1,2,...,n-1,$$

$$\tilde v_{s,0}(\varphi)=\tilde v_s(1,\varphi),\ \tilde v_{s,1}(\varphi)=\frac{\partial\tilde v_s(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1},$$

$$D=\{(\rho,\varphi)\,|\,1<\rho<a,0\le\varphi\le2\pi\},\ D_1=\{(t,\varphi)\,|\,0<t<\frac{a-1}{\lambda},0\le\varphi\le2\pi\}.$$

“БАП 4. ПРЕДЕЛДИК МАСЕЛЕСИ РЕГУЛЯРДЫК ӨЗГӨЧӨ АЙЛАНАГА ЭЭ БОЛГОН БИСИНГУЛЯРДЫК ЧЕКТИК МАСЕЛЕЛЕР” аталыштагы 4- бапта тиешелүү пределдик маселеси регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон бисингулярдык Дирихленин, Неймандын жана Робендин чектик маселелери изилденген.

§ 4.1де тиешелүү козголбогон маселе регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон учурда Дирихленин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы тургузулган, б.а. алкак үчүн Дирихленин төмөнкү маселеси изилденген:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right)+(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial v}{\partial\rho}-q(\varphi)v=F(\rho,\varphi),\quad(\rho,\varphi)\in D,\qquad(3)$$

$$v(a,\varphi,\varepsilon)=\psi_1(\varphi),\ v(b,\varphi,\varepsilon)=\psi_2(\varphi),\ \varphi\in[0,2\pi],\qquad(4)$$

мында $0<a<b$- белгилүү турактуулар, $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,\ 0\le\varphi<2\pi\}$, $q(\varphi)>0\ \varphi\in[0,2\pi]$,

$$v=v(\rho,\varphi,\varepsilon),F\in C^\infty(\bar D),\ q,\psi_k\in C^\infty[0,2\pi],\ k=1,2,\ \frac{\partial F(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}\ne0,\varphi\in[0,2\pi].$$

Төмөнкү теоремалар жана леммалар далилденген

5-теорема. (3)-(4)- маселенин чыгарылышы жашайт, жалгыз жана бул чыгарылыш чектелген.

4-лемма. Төмөнкү маселе

$$(\rho-a)q(\varphi)z'_\rho(\rho,\varphi)-q(\varphi)z(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\quad(\rho,\varphi)\in D,$$

$$z(b,\varphi)=\psi_2(\varphi),\ \varphi\in[0,2\pi],$$

мында $f\in C^\infty(\bar D),\ q,\ \psi_2\in C^\infty[0,2\pi],\ D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,\ 0\le\varphi<2\pi\}$,
жалгыз чыгарылышка ээ жана бул чыгарылыш төмөнкүдөй көрүнүштө болот

$$z(\rho,\varphi)=(\rho-a)q^{-1}(\varphi)\int_b^\rho f(s,\varphi)(s-a)^{-2}ds+\psi_2(\varphi)(\rho-a)/(b-a),$$

бул чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$z(\rho,\varphi)=Q_0(\varphi)(\rho-a)ln(\rho-a)+Q_1(\rho,\varphi),\ \text{мында}\ Q_1\in C^\infty(\bar D),Q_0\in C^\infty[0,2\pi].$$

5-лемма. (3)-(4)- маселе бисингулярдык маселе.

6-лемма. Төмөнкү маселенин чыгарылышы жашайт жана жалгыз болот:

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2}+tq(\varphi)\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}-q(\varphi)z(t,\varphi)=G(\mu t,\varphi),(t,\varphi)\in D_1,$$

$$z(0,\varphi)=\gamma(\varphi),\ z\left(\frac{b-a}{\mu},\varphi\right)\to 0,\ \mu\to 0,\varphi\in[0,2\pi],$$

мында $G-$ үзгүлтүксүз функция, $D_1=\{(t,\varphi)\,|\,0<t<(b-a)/\mu,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$.

7-лемма. Төмөнкү маселелердин чыгарылышытары үчүн

$$lw_0\equiv\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+tq(\varphi)\frac{\partial w_0}{\partial t}-q(\varphi)w_0=0,(t,\varphi)\in D_1,$$

$$w_0(0,\varphi)=\psi_1(\varphi)-u_0(a,\varphi),\ w_0((b-a)/\mu,\varphi)\to 0,\mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi];$$

$$lw_1=-c\frac{\partial w_0}{\partial t}+\frac{1}{t}G_0(\mu t,\varphi),\ (t,\varphi)\in D_1,$$

$$w_1(0,\varphi)=0,\ w_1((b-a)/\mu,\varphi)\to 0,\mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi];$$

$$lw_{2n}=-c\frac{\partial w_{2n-1}}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2 w_{2n-2}}{\partial\varphi^2},\ (t,\varphi)\in D_1,$$

$$w_{2n}(0,\varphi)=-u_n(a,\varphi),\ w_{2n}((b-a)/\mu,\varphi)\to 0,\mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi],n\in N;$$

$$lw_{2n+1}=-c\frac{\partial w_{2n}}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2 w_{2n-1}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{t}G_n(\mu t,\varphi),\ (t,\varphi)\in D_1,$$

$$w_{2n+1}(0,\varphi)=0,\ w_{2n+1}((b-a)/\mu,\varphi)\to 0,\mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi],n\in N.$$

төмөнкү асимптотикалык баалар орун алат:

$$w_0(t,\varphi)=O\left(e^{-t^2q(\varphi)/2}\right),\ w_{2n-1}(t,\varphi)=O\left(\frac{1}{t}\right),\ w_{2n}(t,\varphi)=O\left(\frac{1}{t^2}\right),n\in N,t\to\infty,\varphi\in[0,2\pi].$$

6-теорема. (3)-(4)- Дирихленин маселесинин чыгарылышы үчүн төмөнкү бир калыптагы асимптотикалык ажыралма орун алат

$$v(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{2n}\varepsilon^{k/2}w_k(t,\varphi)+O(\varepsilon^{n+1}),\ \varepsilon\to 0,(\rho,\varphi)\in\bar{D}.$$

жана төмөнкү пределдик барабардык туура болот

$$\lim_{\varepsilon\to 0}v(\rho,\varphi,\varepsilon)=v_0(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho\le b,\ 0\le\varphi\le 2\pi\},$$

мында $w_0(t,\varphi)=O\left(e^{-t^2q(\varphi)/2}\right)$,

$$w_{2k+1}(t,\varphi)=O(t^{-1}),\ \ w_{2k}(t,\varphi)=O(t^{-2}),\ t\to\infty,\varphi\in[0,2\pi],\ u_k\in C(\bar{D}),\ u_k\in C^\infty(D).$$

§ 4.2де тиешелүү козголбогон маселе регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон учурда Неймандын маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы тургузулган, б.а. алкакта Неймандын төмөнкү маселеси изилденген

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right)+(\rho-a)\frac{\partial v}{\partial\rho}-2v=f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}=\psi_1(\varphi),\quad \frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\psi_2(\varphi),\ \ \varphi\in[0,2\pi], \tag{6}$$

мында $0<a<b$ – белгилүү турактуу сандар, $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,\,0\le\varphi\le 2\pi\}$,

$$v=v(\rho,\varphi,\varepsilon),\ f\in C^\infty(\bar D),\ \psi_k\in C^\infty[0,2\pi],\,k=1,2,\ \ f_2(\varphi)\equiv\frac{\partial^2 f(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2}\Big|_{\rho=a}\ne 0.$$

Бул параграфта төмөнкү леммалар жана теоремалар далилденген.

8-лемма. Төмөнкү маселе жалгыз чыгарылышка ээ болот

$$(\rho-a)\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-2z(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\,(\rho,\varphi)\in D,\,\frac{\partial z(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\psi_2(\varphi),\ \varphi\in[0,2\pi],$$

мында $f\in C^\infty(\bar D),\ \psi_2\in C^\infty[0,2\pi],\ D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,\,0\le\varphi\le 2\pi\}$,

жана бул чыгарылыш төмөнкүдөй көрүнүштө болот

$$z(\rho,\varphi)=(\rho-a)^2\int_b^\rho\frac{f(s,\varphi)}{(s-a)^3}ds-\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)^2}f(b,\varphi)+\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)}\psi_2(\varphi)$$

же $\qquad z(\rho,\varphi)=f_2(\varphi)(\rho-a)^2\ln(\rho-a)+P(\rho,\varphi)$, мында $P\in C^\infty(\bar D)$.

9-лемма. Төмөнкү маселенин чыгарылышы жашайт жана жалгыз болот:

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2}+t\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}-2z(t,\varphi)=G(\mu t,\varphi)\ln\mu t,\,(t,\varphi)\in D_1,$$

$$\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\gamma(\varphi),\quad \frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=(b-a)\mu^{-1}}=0,\,\varphi\in[0,2\pi],$$

мында G – үзгүлтүксүз функция, $D_1=\{(t,\varphi)\,|\,0<t<(b-a)/\mu,\,0\le\varphi\le 2\pi\}$.

10-лемма. Төмөнкү чектик маселелердин чыгарылыштары үчүн

$$lw_1=-m\frac{\partial w_0}{\partial t},\ (t,\varphi)\in D_1,$$

$$\frac{\partial w_1(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi_1(\varphi)-\frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a},\frac{\partial w_1(t,\varphi)}{\partial t}\Bigg|_{t=\frac{b-a}{\mu}}=0,\ \ \varphi\in[0,2\pi];$$

$$lw_{2n}=-m\frac{\partial w_{2n-1}}{\partial t}-m^2\frac{\partial^2 w_{2n-2}}{\partial\varphi^2}+G_n(\mu t,\varphi)\ln(\mu t),\ (t,\varphi)\in D_1,$$

$$\frac{\partial w_{2n}(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\ \frac{\partial w_{2n}(t,\varphi)}{\partial t}\Bigg|_{t=\frac{b-a}{\mu}}=0,\ \varphi\in[0,2\pi],\,n\in N;$$

$$lw_{2n+1}=-m\frac{\partial w_{2n}}{\partial t}-m^2\frac{\partial^2 w_{2n-1}}{\partial\varphi^2},\ (t,\varphi)\in D_1,$$

$$\frac{\partial w_{2n+1}(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=0}=-\frac{\partial u_{2n}(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a},\quad \frac{\partial w_{2n+1}(t,\varphi)}{\partial t}\Bigg|_{t=\frac{b-a}{\mu}}=0,\ \varphi\in[0,2\pi],n\in N,$$

төмөнкү асимптотикалык баалар орун алат:

$t\to\infty$, $\mu\to 0$ болгондо $w_1(t,\varphi)$ функциясы экспоненциалдык мүнөздө кемийт, $w_{2n+1}(t,\varphi)=O\left(t^{-1}\right)$, $w_{2n}(t,\varphi)=O\left(ln\mu t\right), t\to\mu^{-1}(b-a), \mu\to 0, n\in N, \varphi\in[0,2\pi]$.

7-теорема. (5)-(6)- маселенин чыгарылышы үчүн төмөнкү бир калыптагы асимптотикалык ажыралма туура болот

$$v(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=1}^{2n}\varepsilon^{k/2}w_k(t,\varphi)+O(\varepsilon^{n+1}),\varepsilon\to 0,(\rho,\varphi)\in\bar{D}.$$

жана төмөнкү пределдик барабардык орун алат

$$\lim_{\varepsilon\to 0}v(\rho,\varphi,\varepsilon)=v_0(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho\le b,\ 0\le\varphi\le 2\pi\},$$

мында $\quad u_k\in C^1(\bar{D}),\ u_k\in C^\infty(D),\quad w_1(t,\varphi)=O\left(t^{-3}e^{-t^2/2}\right),$

$w_{2n+1}(t,\varphi)=O(t^{-1}),\ w_{2n}(t,\varphi)=O\left(ln\mu t\right), t\to(b-a)\mu^{-1}, \mu\to 0, n\in N,\ \varphi\in[0,2\pi]$.

§4.3тө тиешелүү козголбогон маселе регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон учурда Робендин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы тургузулган. Алкак үчүн Робендин төмөнкү маселеси изилденген

$$\varepsilon\Delta v+(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial v}{\partial\rho}-q(\varphi)v=f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D,\tag{7}$$

$$v(a,\varphi,\varepsilon)-p_1\frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}=\psi_1(\varphi),\quad \varphi\in[0,2\pi],\tag{8}$$

$$v(b,\varphi,\varepsilon)+p_2\frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\psi_2(\varphi),\ \ \varphi\in[0,2\pi],\tag{9}$$

мында $0<\varepsilon<<1$, $0<a,\ b,p_1,\ p_2$ – белгилүү туруктуулар, $b+p_2\neq a$,

$q(\varphi)>0\ \varphi\in[0,2\pi],\ \ D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,0\le\varphi\le 2\pi\},\ v=v(\rho,\varphi,\varepsilon),\ f\in C^\infty(\bar{D}),$

$$q,\psi_k\in C^\infty[0,2\pi],\ \ k=1,2,\ \ f'_\rho(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=a}\neq 0,\varphi\in[0,2\pi], v=v(\rho,\varphi,\varepsilon).$$

(7)-(9)- Робендин маселесинин, кичине параметр нөлгө умтулгандагы, чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузуу талап кылынат. Төмөнкү леммалар жана теоремалар далилденген.

11-лемма. Төмөнкү маселе жалгыз чыгарылышка ээ болот

$$(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-q(\varphi)z(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D,$$

$$z(b,\varphi)+p_2\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\psi_2(\varphi),\ \ \varphi\in[0,2\pi],$$

мында $f \in C^{\infty}(\bar{D})$, $\psi_2 \in C^{\infty}[0,2\pi]$, $0 < a,\ b, p_1, p_2$ – белгилүү турактуулар, $b+p_2 \neq a$, $q(\varphi) > 0\ \varphi \in [0,2\pi]$, $D = \{(\rho,\varphi) \mid a < \rho < b, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$,
жана бул чыгарылышты төмөнкүдөй жазууга болот

$$z(\rho,\varphi) = \frac{\rho - a}{q(\varphi)} \int_b^{\rho} \frac{f(s,\varphi)}{(s-a)^2} ds + \frac{\rho - a}{b - a + p_2}\left(\psi_2(\varphi) - \frac{p_2 f(b,\varphi)}{q(\varphi)(b-a)} \right)$$

же $\qquad z(\rho,\varphi) = \tilde{f}_1(\varphi)(\rho - a)\ln(\rho - a) + P(\rho,\varphi)$,

бул жерде $\tilde{f}_1(\varphi) = \dfrac{1}{q(\varphi)} \dfrac{\partial f_1(\rho,\varphi)}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a}$, $P \in C^{\infty}(\bar{D})$.

12-лемма. Мейли $P(t,\varphi) \in C^{\infty}(\bar{D}_1)$, $\gamma(\varphi) \in C^{\infty}[0,2\pi]$ болсун. Анда төмөнкү маселе жалгыз чыгарылышка ээ болот:

$$z''_{tt}(t,\varphi) + tq(\varphi)z'_t(t,\varphi) - q(\varphi)z(t,\varphi) = P(t,\varphi),\ \ (t,\varphi) \in D_1,$$

$$z'_t(t,\varphi)\big|_{t=0} = \gamma(\varphi),\ \ z'_t(t,\varphi)\big|_{t=(b-a)/\mu} = 0,\ \varphi \in [0,2\pi],$$

жана бул чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$z(t,\varphi) = -z_1(t,\varphi) \int_t^{\frac{b-a}{\mu}} e^{\frac{q(\varphi)s^2}{2}} z_2(s,\varphi)P(s,\varphi)ds - z_2(t,\varphi)\int_0^t e^{\frac{q(\varphi)s^2}{2}} z_1(s,\varphi)P(s,\varphi)ds +$$

$$+\frac{z_2(t,\varphi)}{\alpha}\left(\gamma(\varphi) + \int_0^{\frac{b-a}{\mu}} e^{\frac{q(\varphi)s^2}{2}} z_2(s,\varphi)P(s,\varphi)ds \right),$$

мында $z_1(t,\varphi) = t$ *жана* $z_2(t,\varphi) = t \displaystyle\int_t^{\frac{b-a}{\mu}} e^{-\frac{q(\varphi)s^2}{2}} s^{-2}ds$ функциялары бир тектүү $lz = 0$ теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасы,

$$\alpha = -\frac{\mu}{b-a} e^{\frac{q(\varphi)(b-a)^2}{\varepsilon}} - q(\varphi) \int_0^{\frac{b-a}{\mu}} e^{-\frac{q(\varphi)s^2}{2}} ds.$$

8-теорема. (7)-(9) Робендин маселесинин чыгарылышы үчүн төмөнкү бир калыптагы асимптотикалык ажыралма туура болот

$$v(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k u_k(\rho,\varphi) + \sum_{k=0}^{2n} \varepsilon^{k/2} w_k(t,\varphi) + O(\varepsilon^{n+1}),\ \varepsilon \to 0, (\rho,\varphi) \in \bar{D}.$$

жана төмөнкү пределдик барабардык орун алат

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v(\rho,\varphi,\varepsilon) = v_0(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi) \in \{(\rho,\varphi) \mid a < \rho \le b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$$

КОРУТУНДУ

Диссертацияда төмөнкү маселелер изилденди:

1) Теңдеменин потенциалы $p(\rho)=\sqrt[n]{\rho-1}, n\in N$ болгон бисингулярдык козголгон экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн Дирихленин алкак үчүн коюлган маселе;

2) Тиешелүү козголбогон маселеси регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон бисингулярдык козголгон сызыктуу бир тектүү эмес экинчи тартиптеги эки өзгөрүлмөлүү эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн Дирихленин, Неймандын жана Робендин маселелери.

Алгачкы жолу диссертациялык жумушта:

- теңдеменин потенциалы алкактын чек-арасында дифференцирленбөөчү функция болгон учурда Дирихленин маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикасы тургузулду.

- тиешелүү козголбогон маселеси регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон Дирихленин, Неймандын жана Робендин маселелеринин чыгарылыштарынын бир калыптагы асимптотикасы тургузулду.

Автор диссертациялык жумушту талкуулоодо такай көңүл бөлгөндүгү жана пайдалуу кеңештери үчүн илимий жетекчиси ф.-м.и.д., профессор Д.А. Турсуновго терең ыраазычылыгын билдирет.

ПРАКТИКАЛЫК СУНУШТАР

Диссертациянын илимий натыйжалары козголуулар теориясында, гидродинамикада, аэродинамикада, физикада жана илимдин башка тармактарында колдонууга сунуштайбыз.

Бисингулярдык козголгон эллиптикалык типтеги дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык ажыралмасын тургузууга карата иштелип чыккан алгоритмдер практикада колдонулушун табат деген ойдобуз.

Биздин диссертацияны козголуулар теориясы боюнча лекцияларды окууда, «Математика», «Колдонмо математика жана информатика», «Физика-математикалык билим берүү» жана «Математика жана компьютердик илимдер» багыттары боюнча аспиранттарды, PhD докторлорду, магистрлерди жана бакалаврларды даярдоодогу атайын курстарды окутууда. Андан сырткары дифференциалдык теңдемелердин сапаттык теориясы менен байланышкан математиканын, физиканын, техниканын ж.б. илимдин тармактарынын аймактарында теориялык маселелерди чыгарууда колдонууга сунуштайбыз.

ЖАРЫЯЛАНГАН ЭМГЕКТЕРДИН ТИЗМЕСИ:

1. **Orozov, M.O.** Asymptotics of the Solution to the Roben Problem for a Ring with Regularly Singular Boundary [Текст] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 1. –P. 89–95. DOI: 10.1134/S1995080220010126.
2. **Orozov, M.O.** Asymptotics of the Solution to the Boundary-Value Problems with Non Smooth Coefficient [Текст] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov, *A.A. Halmatov* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 6. –P. 1115-1122. DOI: 10.1134/S1995080220060177.
3. **Орозов, М.О.** Асимптотическое решение задачи Дирихле для кольца, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую окружность [Текст] / Д.А.Турсунов, М.О. Орозов // Вестник Томск. гос. университета. Матем. и мех. – 2020. – № 63. – С. 37–46. DOI 10.17223/ 19988621/63/4.
4. **Orozov, M.O.** Asymptotic solution of the perturbed first boundary value problem with a non-smooth coefficient [Текст] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov, // Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics. – 2020. –V. 12. –No. 3. –P. 41–47. DOI: 10.14529/ mmph200306.
5. **Орозов, М.О.** Асимптотическое решение первой краевой задачи с точкой поворота [Текст] / М.О. Орозов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2019. – № 12. – С. 91-95. DOI: 10.26104/NNTIK.2019.45.557
6. **Орозов, М.О.** Асимптотика решения смешанной краевой задачи, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую окружность [Текст] / Д.А. Турсунов, М.О. Орозов // Вестник ОшГУ. – 2020. – № 1.1. – С. 154-160. https://elibrary.ru/item.asp?id=43068376
7. **Орозов, М.О.** Существование и единственность решения бисингулярно возмущенной задачи Дирихле для кольца [Текст] / М.О. Орозов, М.И. Маматбуваева, Ш.А. Раманкулова // Вестник ЖАГУ. – 2020. –Т. 45. – № 2. – С. 33-38. https://elibrary.ru/item.asp?id=44593392
8. **Орозов, М.О.** Асимптотическое решение задачи Дирихле, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет сингулярность [Текст] / М.О. Орозов // Сб. тезисов докладов Межд. науч. конф. «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики». – Фергана, 12-13 март, 2020. – С. 127-129.
9. **Орозов, М.О.** Асимптотика решение бисингулярной задачи Неймана для круга [Текст] / Д.А.Турсунов, М.О. Орозов // Тезисы докладов Республиканской науч. конф. с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». – Ташкент, 15-17 декабря, 2017. – С.111-112.
10. **Орозов, М.О.** Асимптотика решение задачи Дирихле для кольца негладким коэффициентом [Текст] / Д.А. Турсунов, М.О. Орозов // Сб. тезисов Межд.

научн. конф. “Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры” (EMG-2019). – Нур-Султан, 2019. – С. 147-148.
11. **Orozov, M.O.** Asymptotic expansions of solutions to Robin problem for elliptic equation with singularities [Текст] / D.A.Tursunov, M.O. Orozov // Abstracts of International conference «Mathematical analysis, Differential Equation and Applications» MADEA-8. – Cholpon-Ata, 2018. – P. 128-129.
12. **Orozov, M.O.** Asymptotics of the solution of the Dirichlet problem for a disk [Текст] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov // Abstracts Int. scientific. conf. "III Borubaev Readings" dedicated to the 35th anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. – Bishkek, 2019. – P. 33.

Орозов Максатбек Омурбековичтин «Бисингулярдык козголгон эллиптикалык типтеги сызыктуу теңдемелер үчүн чектик маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасы» деген темадагы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: кичи параметр, асимптотикалык катар, сингулярдык козголгон маселе, бисингулярдык маселе, регулярдык өзгөчө айлана, Дирихленин маселеси, Робендин маселеси, Неймандын маселеси.

Изилдөө объектиси: 1) Бисингулярдык козголгон сызыктуу бир тектүү эмес экинчи тартиптеги эки өзгөрүлмөлүү эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн алкакта Дирихленин маселеси.

2) Тиешелүү козголбогон маселе регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон бисингулярдык козголгон сызыктуу бир тектүү эмес экинчи тартиптеги эки өзгөрүлмөлүү эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн алкакта Дирихленин, Неймандын жана Робендин маселелери.

Изилдөө предмети. Дирихленин, Неймандын жана Робендин чектик маселелеринин чыгарылыштарынын, ε кичи параметри нөлгө умтулгандагы, бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларын тургузуу.

Иштин максаты. Бисингулярдык козголгон эллиптикалык типтеги сызыктуу теңдемелер үчүн чектик маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасын тургузуу.

Изилдөөнүн методдору жана аппараты: кичине параметр методу, чек аралык функциялар методу, жалпыланган чек аралык функциялар методу, максимум принциби, дифференциалдык барабарсыздыктар методу.

Алынган натыйжалар жана алардын жаңылыгы. Теңдеменин потенциалы алкактын чек-арасында дифференцирленбөөчү функция болгон учурда Дирихленин маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы тургузулду. Пределдик маселеси регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон Дирихленин, Неймандын жана Робендин маселелеринин чыгарылыштарынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмалары тургузулду

Колдонуу даражасы же колдонуу боюнча сунуштар. Жумуш теориялык мазмунда болгону менен, анын натыйжалары козголуулар теориясында, гидродинамикада, аэродинамикада жана илимдин башка тармактарында колдонулушу мүмкүн.

Колдонуу жааты. Ушул сыяктуу маселелер гидродинамикада, физикада, аэродинамикада, океанологияда, астрономияда ж.б. илимдин аймактарында жана техникада кездешет.

РЕЗЮМЕ

Диссертации Орозова Максатбека Омурбековича на тему: «Асимптотика решения бисингулярно возмущенных краевых задач для линейных уравнений эллиптического типа» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: малый параметр, асимптотический ряд, сингулярно возмущенная задача, бисингулярная задача, регулярная особая окружность, задача Дирихле, задача Робена, задача Неймана.

Объект исследования: 1) Задача Дирихле в кольце для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка с двумя переменными. 2) Задачи Дирихле, Неймана и Робена в кольце для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка с двумя переменными, когда соответствующая невозмущенная задача имеет регулярную особую окружность.

Предмет исследования. Построение равномерных асимптотических разложений решений краевых задач Дирихле, Неймана и Робена при стремлении малого параметра ε к нулю.

Цель работы. Построение асимптотики решения краевых задач для бисингулярно возмущенных линейных уравнений эллиптического типа.

Методы исследования и аппаратура: метод малого параметра, метод пограничных функций, обобщенный метод пограничных функций, принцип максимума, метод дифференциальных неравенств.

Полученные результаты и их новизна. Построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле, в случае, когда потенциал уравнения не дифференцируема на границе кольца.

Построены равномерные асимптотические разложения краевых задач Дирихле, Неймана и Робена, в случае, когда предельная задача имеет регулярную особую окружность.

Степень использования или рекомендации по использованию. Хотя работа является теоретической, ее результаты могут быть применены в теории возмущений, гидродинамике, аэродинамике и в других отраслях науки.

Область применения. Подобные задачи встречаются в гидродинамике, физике, аэродинамике, океанологии, астрономии и др. областях науки и техники.

SUMMARY

Orozov Maksatbek Omurbekovich Dissertation «Asymptotics of the solution of bisingularly perturbed boundary value problems for linear equations of elliptic type» for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences (specialty 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control**)**

Key words: small parameter, asymptotic series, singularly perturbed problem, bisingular problem, regularly singular circle, Dirichlet problem, Robin problem, Neumann problem.

Object of research. 1) The Dirichlet problem in a ring for a bisingularly perturbed linear inhomogeneous partial differential equation of second order elliptic type in two variables. 2) Problems of Dirichlet, Neumann and Robin in a ring for a bisingularly perturbed linear inhomogeneous partial differential equation of second order elliptic type in two variables, when the corresponding unperturbed problem has a regularly singular circle.

Subject of study. Construction of uniform asymptotic expansions of solutions of the Dirichlet, Neumann and Robin boundary value problems as the small parameter ε tends to zero.

Purpose of work. Construction of the asymptotics of the solution of boundary value problems for bisingularly perturbed linear equations of elliptic type.

Research methods and equipment: small parameter method, boundary function method, generalized boundary function method, maximum principle, differential inequality method.

The results obtained and their novelty. A uniform asymptotic expansion of the solution to the Dirichlet problem is constructed in the case when the potential of the equation is not differentiable on the boundary of the ring.

Uniform asymptotic expansions of the Dirichlet, Neumann and Robin boundary value problems are constructed in the case when the limit problem has a regularly singular circle.

Degree of use or recommendations for use. Although the work is theoretical, its results can be applied in perturbation theory, hydrodynamics, aerodynamics and other branches of science.

Application area. Similar problems are encountered in hydrodynamics, physics, aerodynamics, oceanology, astronomy, and other fields of science and technology.

ШАРТУУ БЕЛГИЛЕР, СИМВОЛДОР, БИРДИКТЕР, ТЕРМИНДЕР ЖАНА КЫСКАРТУУЛАРДЫН ТИЗМЕСИ

- **N**, **Z**, **R** – натуралдык, бүтүн жана чыныгы сандардын көптүктөрү, тиешелүү түрдө
- $\mathbf{N_0}=\mathbf{N}\cup\{0\}$.
- $\forall$ – жалпылоо квантору.
- $\exists$ – жашоо квантор.
- $\in$ – «тиешелүү» же «таандык».
- ~ – «эквивалент».
- $\Rightarrow$ – «келип чыгат».
- $C^{\infty}(D)$ – D аймагында чексиз дифференцирленүүчү жана туундулары менен чектелген функциялардын көптүгү.
- $0<\varepsilon<<1$ – кичине параметр,
- $0<\lambda$, μ –ε дөн көз каранды болгон кичине параметрлер.
- $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ – уюлдук координаталар системасындагы Лапластын оператору.

O, o – салыштыруу же Ландаунун символдору.

Басмага берилди:

Көлөмү : 1,5 б.т. Буйрутма № ____

Форматы 60х90 1/16. Нускасы 120 даана.

ОшМУ нун "Билим" редакциялык-басма бөлүмү

Ош ш., Ленина к., 331.