МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Диссертационный совет К 01.12.014

На правах рукописи
УДК 514.75

ПАПИЕВА ТОЛКУН МАМАТАЕВНА

ГЕОМЕТРИЯ ЧАСТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДАЕМЫХ ЗАДАННОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СЕТЬЮ ФРЕНЕ

специальность 01.01.04 – геометрия и топология

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош-2013

Диссертационная работа выполнена на кафедре “Алгебра и геометрия” Ошского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Гулбадан Матиева

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Йозеф Микеш, Чехия

кандидат физико-математических наук, доцент Молдобаев Жаныбек

Ведущая организация: Кыргызско-Турецкий Университет “Манас”

Защита состоится «_____»_____________2013 г. в _____часов на заседании диссертационного совета К 01.12.014 при Ошском государственном университете по адресу: 723500, г.Ош, ул.Ленина 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета по адресу: Кыргызстан, 723500, г.Ош, ул.Ленина 331.

Автореферат разослан «____»____________2013г.

Ученый секретарь диссертационного
совета к.ф.-м.н., доцент Д.А.Турсунов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Данное исследование относится к значительным главам современной дифференциальной геометрии – теории отображений гладких многообразий.

Проблемами точечных соответствий пространств одинаковой размерности занимались А.П.Норден, В.В.Рыжков, М.А.Акивис, В.Т.Базылев и их ученики, а также другие геометры.

Основы геометрии плоских многомерных сетей заложены в работах В.Т.Базылева. Работы В.Т.Базылева и его учеников также посвящены различным вопросам дифференцируемых отображений областей и поверхностей в n-мерном проективном, аффинном, евклидовом пространствах, вводится понятие графика отображения.

Теория дифференцируемых отображений евклидова пространства, имеет большой интерес не только для самой геометрии, она имеет широкое приложение в теоретической физике и в других областях математики.

Значительный интерес представляют дифференцируемые частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданной сетью, так как от выбора сети зависит не только математическое моделирование физических явлений и процессов, а также их рациональные решения. В работах Дж. Уизема двумерные и трехмерные сети и ее образы в различных отображениях применяются в решении многих задач теории линейных и нелинейных волн.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию частичных отображений евклидовых пространств E_4, E_n, порождаемых заданной циклической сетью Френе $\tilde{\Sigma}_4$, $\tilde{\Sigma}_n$ соответственно.

Цель работы:

– исследовать частичные отображения четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемые псевдофокусами на касательных к линиям заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4 \subset \Omega \subset E_4$;

– исследовать частичные отображения n-мерного евклидова пространства E_n, порождаемые псевдофокусами на касательных к линиям заданной n-мерной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_n \subset \Omega \subset E_n$;

– найти связь между векторами средних кривизн двумерных и трехмерных распределений, определяемых заданной циклической сетью Френе, а также связь между этими векторами и векторами кривизн линий заданной сети.

Методы исследования. В данной работе использованы следующие методы: метод внешних форм Картана, метод подвижного репера с использованием теоретико-группового метода дифференциально-геометрических исследований Г.Ф.Лаптева.

Научная новизна работы. Основные научные результаты:

– найдены необходимые и достаточные условия ортогональности образа заданной циклической сети Френе в каждом из рассматриваемых частичных отображениях;

– получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы рассматриваемые частичные отображения являлись движением;

– найден геометрический смысл полученных необходимых и достаточных условий;

– выявлена связь между векторами средних кривизн двумерных и трехмерных распределений, определяемых заданной циклической сетью Френе, а также связь между этими векторами и векторами кривизн линий заданной сети;

– доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии заданной циклической сети являлись двойными линиями рассматриваемых отображений.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты данной работы представляют, прежде всего, теоретический интерес. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по геометрии отображений погруженных многообразий и в теории сетей на многообразиях. Результаты диссертации также могут быть использованы в теории графов, компьютерной геометрии.

Основные положения, выносимые на защиту:

– нахождение необходимых и достаточных условий для того, чтобы образ заданной циклической сетью Френе в рассматриваемых отображениях была ортогональной;

– получение необходимых и достаточных условий для того, чтобы рассматриваемые частичные отображения являлись движением;

– выяснение геометрических смыслов полученных необходимых и достаточных условий;

– нахождение связи между векторами средних кривизн двумерных и трехмерных распределений, определеяемых заданной циклической сетью Френе, а также связи между этими векторами и векторами кривизн линий заданной сети;

– доказательство необходимых и достаточных условий для того, чтобы линии заданной циклической сети Френе являлись двойными линиями рассматриваемых отображений.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались: на международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы инженерной техники и современных технологий», посвященной 45-летию ОшТУ и открытию памятника М.М.Адышеву (Ош,2008), на III конгрессе всемирного математического общества тюркоязычных стран (Алматы, КазНУ им.Аль-Фараби, 2009), на юбилейной научной научной конференции, посвященной 60-летию академика А. А. Борубаева (Бишкек, 2010), а так же на научно-теоретическом семинаре кафедры алгебры и геометрии ОшГУ (руководитель – д.ф.-м.н. Г.Матиева) и на межвузовском семинаре «Актуальные проблемы математики и информатики» при ФМИТ ОшГУ (руководитель – д.ф.-м.н. К.Алымкулов).

Публикации по теме диссертации: Основное содержание диссертации опубликовано в 7 работах [1-7] и тезисе доклада [8].

Личный вклад автора в совместных работах:

В совместных работах [2], [3] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а доказательство теорем, полученные результаты – автору.

Структура и объем диссертации:

Диссертация состоит из введения, трех глав, состоящих из 12 разделов, списка использованных источников из 74 наименований и заключения. Нумерация разделов – двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела. Нумерация теорем и формул – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе. Объем текста ___ страниц.

Краткое содержание диссертации

В первой главе работы приводится обзор литературы и результатов других авторов, связанных с темой диссертации.

Во второй главе рассматривалась задача: заданием в области $\Omega \subset E_4$ циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ на касательных $(X, \vec{e}_i)$ $(i = 1,2,3,4)$ к линиям ω^i этой сети инвариантным образом определяются точки, так называемые псевдофокусами прямых $(X, \vec{e}_i)$. На каждой касательной имеем по одному псевдофокусу: $F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$, $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$, $F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$, $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$.

Когда точка $X \in \Omega$ смещается в области Ω, эти псевдофокусы описывают свои области $\Omega_1^4, \Omega_2^1, \Omega_3^2, \Omega_4^3$ в E_4 соотвественно. Определяются частичные отображения: $\varphi : \Omega \to \Omega_1^4$, $g : \Omega \to \Omega_2^1$, $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$, $f : \Omega \to \Omega_4^3$. Изучены некоторые свойства отображений φ, g, ψ, f.

В области Ω евклидова пространства E_4, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = (X, \vec{e}_i)(i, j, k = 1,2,3,4)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \qquad (1)$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_4, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя лемму Картана имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{i\ell}^k \Lambda_{jm}^\ell + \Lambda_{\ell j}^k \Lambda_{im}^\ell\right)\omega^m. \tag{5}$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

В разделе 2.1. определена циклическая сеть Френе Σ_4 в четырехмерном евклидовом пространстве и доказана

Теорема 2.1.1. Сеть Σ_4 является циклической сетью Френе тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{31}^1 = 0, \; \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0, \tag{6}$$

$$\Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0. \tag{7}$$

$$\Lambda_{22}^1 = -\Lambda_{12}^2 = 0, \; \Lambda_{22}^4 = -\Lambda_{42}^2 = 0, \tag{8}$$

$$\Lambda_{32}^1 = -\Lambda_{12}^3 = 0, \tag{9}$$

$$\Lambda_{33}^1 = -\Lambda_{13}^3 = 0, \; \Lambda_{33}^2 = -\Lambda_{23}^3 = 0, \tag{10}$$

$$\Lambda_{43}^2 = -\Lambda_{23}^4 = 0, \tag{11}$$

$$\Lambda_{44}^2 = -\Lambda_{24}^4 = 0, \; \Lambda_{44}^3 = -\Lambda_{34}^4 = 0, \tag{12}$$

$$\Lambda_{14}^3 = -\Lambda_{34}^1 = 0. \tag{13}$$

Из равенств (6), (8), (10), (12) следует, что на каждой касательной к линиям сети Френе Σ_4 существует только по одному псевдофокусу ($F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$, $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$, $F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$, $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$), а остальные ($F_1^2, F_1^3 \in (X, \vec{e}_1)$, $F_2^3, F_2^4 \in (X, \vec{e}_2)$, $F_3^1, F_3^4 \in (X, \vec{e}_3)$, $F_4^1, F_4^2 \in (X, \vec{e}_4)$) являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства.

Из равенств (7), (9), (11), (13) получим, что $\vec{\Lambda}_{21}, \vec{\Lambda}_{43} \in (X, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$; $\vec{\Lambda}_{32}, \vec{\Lambda}_{14} \in (X, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$.

Циклическая сеть Френе $\tilde{\Sigma}_3$ в трехмерном евклидовом пространстве была определена и аналогичная теорема была доказана в работе.[1]

В этом разделе рассмотрены двумерные и трехмерные распределения Δ_2 ,Δ_3, определяемые заданной циклической сетью Френе $\tilde{\Sigma}_4$ и доказана

Теорема 2.1.2. Если заданная сеть Σ_4 является циклической сетью Френе, то векторы средних кривизн двумерных и трехмерных распределений, определенных циклической сетью Френе удовлетворяют следующим условиям соответственно:

$$\vec{M}_2^{(2,4)} = \vec{M}_2^{(3,4)} + \vec{M}_2^{(1,2)},$$
$$\vec{M}_2^{(1,3)} = \vec{M}_2^{(1,4)} + \vec{M}_2^{(2,3)},$$
$$\vec{M}_3^{(1,2,3)} = \frac{1}{3}\Lambda_{33}^4\vec{e}_4 = \frac{1}{3}\vec{k}_{13},$$
$$\vec{M}_3^{(2,3,4)} = \frac{1}{3}\Lambda_{44}^1\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\vec{k}_{14},$$
$$\vec{M}_3^{(1,3,4)} = \frac{1}{3}\Lambda_{11}^2\vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{k}_{11}.$$

В разделе 2.2. рассмотрен псевдофокус $F_4^3 \in \left(X,\vec{e}_4\right)$. Когда точка X смещается в области Ω, точка $F_4^3 \in \left(X,\vec{e}_4\right)$ описывает свою область $\Omega_4^3 \subset E_4$, получено частичное отображение $f:\Omega \to \Omega_4^3$ такое, что $f\left(X\right) = F_4^3$.

Доказаны

Теорема 2.2.1. а) Линия ω^1 заданной циклической сети Френе Σ_4 является двойной линией отображения $f:\Omega \to \Omega_4^3$ тогда и только тогда, когда третья кривизна этой линии равна нулю;

б) линия ω^2 заданной циклической сети Френе Σ_4 является двойной линией отображения f тогда и только тогда, когда вторая и третья кривизны равны нулю соответственно;

в) линия ω^3 заданной циклической сети Френе Σ_4 является двойной линией отображения f тогда и только тогда, когда вторая кривизна этой линии равна нулю;

г) линия ω^4 заданной циклической сети Френе Σ_4 всегда является двойной линией отображения f.

Теорема 2.2.2. Образ данной циклической сети Френе в отображении $f:\Omega \to \Omega_4^3$ является ортогональной тогда и только тогда, когда имеют места равенства:

$$B_{431}^3 B_{432}^3 + \Lambda_{41}^3\Lambda_{42}^3\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 - \Lambda_{42}^1\left(\Lambda_{43}^3\right)^3 = 0;$$
$$B_{431}^3 B_{433}^3 - \Lambda_{43}^1\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 = 0;$$

[1] Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст]//Монография. – Ош, 2003. – 152с.

$$B^3_{431}\left[\left(\Lambda^3_{43}\right)^2+B^3_{434}\right]-\Lambda^1_{44}\left(\Lambda^3_{43}\right)^3=0;$$
$$B^3_{433}B^3_{432}+\Lambda^1_{42}\Lambda^1_{43}\left(\Lambda^3_{43}\right)^2=0;$$
$$B^3_{432}\left[\left(\Lambda^3_{43}\right)^2+B^3_{434}\right]+\Lambda^1_{42}\Lambda^1_{44}\left(\Lambda^3_{43}\right)^2=0;$$
$$B^3_{433}\left[\left(\Lambda^3_{43}\right)^2+B^3_{434}\right]+\Lambda^1_{43}\Lambda^1_{44}\left(\Lambda^3_{43}\right)^2=0;$$

геометрический смысл, которых заключается в следующем соответственно:

$$\left(\vec{e}_4 d_3\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_1\vec{k}_{13}\right)=\vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{\Lambda}_{13}\vec{k}_{13}\right);$$
$$\left(\vec{e}_4 d_3\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_2\vec{k}_{13}\right)=\vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{\Lambda}'_{42}\vec{k}'_{43}\right);$$
$$\left(\vec{e}_4 d_1\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_2\vec{k}_{13}\right)=\vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{\Lambda}_{12}\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{\Lambda}_{41}\vec{\Lambda}_{42}\right);$$
$$\left(-\vec{e}_4 d_1\vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}^{\,2}+\left(-\vec{e}_4 d_4\vec{k}_{13}\right)\right]=k^4_1\left(k^3_1\right)^3;$$
$$\left(-\vec{e}_4 d_2\vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}^{\,2}+\left(-\vec{e}_4 d_4\vec{k}_{13}\right)\right]=-\vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{\Lambda}_{42}\vec{k}_{14}\right);$$
$$\left(-\vec{e}_4 d_3\vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}^{\,2}+\left(-\vec{e}_4 d_4\vec{k}_{13}\right)\right]=-\vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{\Lambda}_{43}\vec{k}_{14}\right).$$

Теорема 2.2.3. Отображение $f:\Omega\to\Omega^3_4$ является движением тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\left(\Lambda^3_{41}\right)^2\left(\Lambda^3_{43}\right)^2=-\left(B^3_{431}\right)^2;$$
$$\left(B^3_{432}\right)^2=-\left(\Lambda^3_{43}\right)^2\left[\left(\Lambda^1_{42}\right)^2+\left(\Lambda^3_{42}\right)^2\right];$$
$$\left(\Lambda^1_{43}\right)^2=\frac{\left(\Lambda^3_{43}\right)^4-\left(B^3_{433}\right)^2}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2};$$
$$\left(\Lambda^1_{44}\right)^2=\frac{\left(\Lambda^3_{43}\right)^4-\left[\left(\Lambda^3_{43}\right)^2+B^3_{434}\right]^2}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}.$$

Выяснен геометрический смысл этих равенств.

В разделе 2.3. рассмотрен псевдофокус $F^1_2\in\left(X,\vec{e}_2\right)$ на касательной $\left(X,\vec{e}_2\right)$ к линии ω^2 заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$. Когда точка X смещается в области Ω, точка $F^1_2\in\left(X,\vec{e}_2\right)$ описывает свою область $\Omega^1_2\subset E_4$. Получается частичное отображение $g:\Omega\to\Omega^1_2$ такое, что $g\left(X\right)=F^1_2$.

Доказаны

Теорема 2.3.1.

а) Линия ω^1 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения g тогда и только тогда, когда векторы $d_1\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ коллинеарны;

б) линия ω^2 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения g;

в) линия ω^3 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения g тогда и только тогда, когда векторы $\vec{\Lambda}_{13} = d_3\vec{e}_1$, $\vec{e}_4$ коллинеарны;
г) линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения g тогда и только тогда, когда выполнены одно из условий: $\Lambda^2_{14} = -\Lambda^1_{24} = 0$, $\Lambda^3_{24} = -\Lambda^2_{34} = 0$.

Теорема 2.3.2. Образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ в отображении $g : \Omega \to \Omega^1_2$ является ортогональной тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$B^1_{211}\left[B^1_{212} + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2\right] + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 \Lambda^3_{21}\Lambda^3_{22} = 0;$$
$$B^1_{211}B^1_{213} - \left(\Lambda^1_{21}\right)^3\left(\Lambda^1_{23} + \Lambda^3_{21}\right) = 0;$$
$$B^1_{211}B^1_{214} + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 \Lambda^3_{21}\Lambda^3_{24} - \left(\Lambda^1_{21}\right)^3 \Lambda^1_{24} = 0;$$
$$B^1_{213}\left[B^1_{212} + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2\right] - \left(\Lambda^1_{21}\right)^3 \Lambda^3_{22} = 0;$$
$$B^1_{214}\left[B^1_{212} + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2\right] + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 \Lambda^3_{22}\Lambda^3_{24} = 0;$$
$$B^1_{213}B^1_{214} + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 \Lambda^1_{23}\Lambda^1_{24} - \left(\Lambda^1_{21}\right)^3 \Lambda^3_{24} = 0.$$

Найден геометрический смысл этих равенств.

Теорема 2.3.3. Отображение $g : \Omega \to \Omega^1_2$ является движением тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\left(B^1_{211}\right)^2 + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2\left(\Lambda^3_{21}\right)^2 = 0;$$
$$\left(\Lambda^3_{22}\right)^2 = \frac{\left(\Lambda^1_{21}\right)^4 - \left[\left(\Lambda^1_{21}\right)^2 + B^1_{212}\right]^2}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2};$$
$$\left(B^1_{213}\right)^2 = -\left(\Lambda^1_{21}\right)^2\left(\Lambda^1_{23}\right)^2;$$
$$\left(B^1_{214}\right)^2 = -\left(\Lambda^1_{21}\right)^2\left[\left(\Lambda^3_{24}\right)^2 + \left(\Lambda^1_{24}\right)^2\right],$$

геометрический смысл этих равенств заключается в следующем соответственно:

$$\left(-\vec{e}_2 d_1\vec{k}_{11}\right) + \left(k^1_1\right)^2\left(k^1_2\right)^2 = 0;$$
$$\left(k^2_1\right)^2 = \frac{\left(k^1_1\right)^4 - \left[\left(k^1_1\right)^2 + \left(-\vec{e}_2 d_2\vec{k}_{11}\right)\right]^2}{\left(k^1_1\right)^2};$$
$$\left(\vec{e}_2 d_3\vec{k}_{11}\right)^2 = -\left(k^1_1\right)^2\left(k^3_3\right)^2;$$
$$\left(\vec{e}_2 d_4\vec{k}_{11}\right)^2 = -\left(k^1_1\right)^2\left[\left(k^4_3\right)^2 + \left(k^4_2\right)^2\right].$$

В разделе 2.4. рассмотрен псевдофокус $F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$ на касательной $(X, \vec{e}_1)$ к линии ω^1 заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$. Когда точка X смещается в области Ω, точка $F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$ описывает свою область $\Omega_1^4 \subset E_4$, получено частичное отображение $\varphi: \Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $\varphi(X) = F_1^4$.

Доказаны

Теорема 2.4.1. а) Линия ω^1 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения φ;

б) линия ω^2 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения φ тогда и только тогда, когда третья кривизна этой линии равна нулю;

в) линия ω^3 является двойной линией отображения φ тогда и только тогда, когда выполнены одно из условий: а) $\vec{\Lambda}_{13} = d_3\vec{e}_1 \| \vec{e}_4$; б) $\vec{\Lambda}_{13} = d_3\vec{e}_1 \| \vec{e}_2$;

г) линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения φ тогда и только тогда, когда ее вторая кривизна равна нулю.

Теорема 2.4.2. Образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ в отображении $\varphi: \Omega \to \Omega_1^4$ является ортогональной тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$B_{142}^4 \left[\left(\Lambda_{14}^4 \right)^2 + B_{141}^4 \right] = \Lambda_{11}^2 \left(\Lambda_{14}^4 \right)^3;$$

$$B_{143}^4 \left[\left(\Lambda_{14}^4 \right)^2 + B_{141}^4 \right] = \Lambda_{11}^2 \Lambda_{23}^1 \left(\Lambda_{14}^4 \right)^2;$$

$$B_{144}^4 \left[\left(\Lambda_{14}^4 \right)^2 + B_{141}^4 \right] = \Lambda_{11}^2 \Lambda_{24}^1 \left(\Lambda_{14}^4 \right)^2;$$

$$B_{142}^4 B_{143}^4 = \Lambda_{13}^2 \left(\Lambda_{14}^4 \right)^3 - \Lambda_{12}^4 \Lambda_{13}^4 \left(\Lambda_{14}^4 \right)^2;$$

$$B_{142}^4 B_{144}^4 = \Lambda_{14}^2 \left(\Lambda_{14}^4 \right)^3;$$

$$B_{143}^4 B_{144}^4 = \Lambda_{23}^1 \Lambda_{14}^2 \left(\Lambda_{14}^4 \right)^2,$$

найден геометрический смысл этих условий.

Теорема 2.4.3. Для того, чтобы отображение $\varphi: \Omega \to \Omega_1^4$ было движением необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия:

$$\left[\left(\Lambda_{14}^4 \right)^2 + B_{141}^4 \right]^2 = \left(\Lambda_{14}^4 \right)^2 \left[\left(\Lambda_{14}^4 \right)^2 - \left(\Lambda_{11}^2 \right)^2 \right];$$

$$\left(B_{142}^4 \right)^2 = -\left(\Lambda_{12}^4 \right)^2 \left(\Lambda_{14}^4 \right)^2;$$

$$\left(B_{143}^4 \right)^2 = -\left(\Lambda_{14}^4 \right)^2 \left[\left(\Lambda_{13}^2 \right)^2 + \left(\Lambda_{13}^4 \right)^2 \right];$$

$$\left(B_{144}^4 \right)^2 = \left(\Lambda_{14}^4 \right)^2 \left[\left(\Lambda_{14}^4 \right)^2 - \left(\Lambda_{14}^2 \right)^2 \right].$$

Геометрический смысл этих равенств заключается в следующем:

$$\left[\left(k_1^4 \right)^2 + \left(-\vec{e}_1 d_1 \vec{k}_{14} \right) \right]^2 = \left(k_1^4 \right)^2 \left[\left(k_1^4 \right)^2 - \left(k_1^1 \right)^2 \right];$$

$$\left(\vec{e}_1 d_2 \vec{k}_{14}\right)^2 = -\left(k_3^2\right)^2 \left(k_1^4\right)^2;$$
$$\left(\vec{e}_1 d_3 \vec{k}_{14}\right)^2 = -\left(k_1^4\right)^2 \left[\left(k_3^3\right)^2 + \left(k_2^3\right)^2\right];$$
$$\left(\vec{e}_1 d_4 \vec{k}_{14}\right)^2 = \left(k_1^4\right)^2 \left[\left(k_1^4\right)^2 - \left(k_2^4\right)^2\right].$$

В параграфе 2.5. рассмотрен псевдофокус $F_3^2 \in \left(X, \vec{e}_3\right)$ на касательной $\left(X, \vec{e}_3\right)$ к линии ω^3 заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$. Когда точка X смещается в области Ω, точка $F_3^2 \in \left(X, \vec{e}_3\right)$ описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_4$, получено частичное отображение $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $\psi\left(X\right) = F_3^2$.

Доказаны

Теорема 2.5.1. а) Линия ω^1 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения ψ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: а) $k_2^1 = \Lambda_{21}^3 = -\Lambda_{31}^2 = 0$; б) $k_3^1 = \Lambda_{31}^4 = -\Lambda_{41}^3 = 0$;

б) линия ω^2 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения ψ тогда и только тогда, когда вторая кривизна этой линии равна нулю;

в) линия ω^3 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения ψ;

г) линия ω^4 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения ψ тогда и только тогда, когда третья кривизна этой линии равна нулю.

Теорема 2.5.2. Образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ в отображении $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$ является ортогональной сетью тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$B_{321}^2 B_{322}^2 = \left(\Lambda_{32}^2\right)^2 \Lambda_{31}^4 \Lambda_{42}^3;$$
$$B_{321}^2 \left[\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + B_{323}^2\right] = \left(\Lambda_{32}^2\right)^2 \Lambda_{31}^4 \Lambda_{43}^3;$$
$$B_{321}^2 B_{324}^2 = \Lambda_{31}^4 \left(\Lambda_{32}^2\right)^3 - \Lambda_{31}^2 \Lambda_{34}^2 \left(\Lambda_{32}^2\right)^2;$$
$$B_{322}^2 \left[\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + B_{323}^2\right] = -\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 \Lambda_{32}^4 \Lambda_{33}^4;$$
$$B_{322}^2 B_{324}^2 = \Lambda_{32}^4 \left(\Lambda_{32}^2\right)^3;$$
$$B_{324}^2 \left[\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + B_{323}^2\right] = \Lambda_{33}^4 \left(\Lambda_{32}^2\right)^3,$$

найден геометрический смысл этих условий.

Теорема 2.5.3. Отображение $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$ является движением тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\left(\Lambda_{32}^4\right)^2 = \frac{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4 - \left(B_{322}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2};$$

$$\left(\Lambda_{31}^{4}\right)^{2}=-\frac{\left(B_{321}^{2}\right)^{2}+\left(\Lambda_{31}^{2}\right)^{2}\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}};$$

$$\left(\Lambda_{33}^{4}\right)^{2}=\frac{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{4}-\left[\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}+B_{323}^{2}\right]^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}};$$

$$\left(B_{324}^{2}\right)^{2}=-\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}\left(\Lambda_{34}^{2}\right)^{2}.$$

Геометриячеcкий смысл этих равенств заключается в следующем:

$$\left(k_{2}^{2}\right)^{2}=\frac{\left(k_{1}^{2}\right)^{4}+\left(\vec{e}_{3}d_{2}\vec{k}_{12}\right)}{\left(k_{1}^{2}\right)^{2}};$$

$$\left(k_{3}^{1}\right)^{2}=-\frac{\left(-\vec{e}_{3}d_{1}\vec{k}_{12}\right)+\left(k_{2}^{1}\right)^{2}\left(k_{1}^{2}\right)^{2}}{\left(k_{1}^{2}\right)^{2}};$$

$$\left(k_{1}^{3}\right)^{2}=\frac{\left(k_{1}^{2}\right)^{4}-\left[\left(k_{1}^{2}\right)^{2}-\left(\vec{e}_{3}d_{3}\vec{k}_{12}\right)\right]^{2}}{\left(k_{1}^{2}\right)^{2}};$$

$$\left(k_{3}^{4}\right)^{2}=\frac{\left(\vec{e}_{3}d_{4}\vec{k}_{12}\right)^{2}}{\left(k_{1}^{2}\right)^{2}}.$$

В третьей главе обобщены основные результаты, полученные во второй главе для пространства E_n. Рассматривалась в области $\Omega\subset E_n$ n-мерная циклическая сеть Френе $\tilde{\Sigma}_n$. На каждой касательной $\left(X,\vec{e}_i\right)$ к линиям ω^iзаданной сети $\tilde{\Sigma}_n$ определяются инвариантным образом псевдофокусы $F_1^n\in\left(X,\vec{e}_1\right)$, $F_2^1\in\left(X,\vec{e}_2\right)$, $F_3^2\in\left(X,\vec{e}_3\right)$, ..., $F_n^{n-1}\in\left(X,\vec{e}_n\right)$.

Когда точка $X\in\Omega$ смещается в области Ω, эти точки описывают свои области $\Omega_1^n,\Omega_2^1,...\ \Omega_n^{n-1}$ в E_n. Определяются частичные отображения: заданной области $\Omega\subset E_n$ в каждую область, описываемые псевдофокусами. Изучены некоторые свойства частичных отображений $h:\Omega\to\Omega_1^n$, $\mu:\Omega\to\Omega_2^1$.

В разделе 3.1. определена циклическая сеть Френе Σ_n в n-мерном евклидовом пространстве и доказана

Теорема 3.1.1. Сеть Σ_n Френе для линии ω^1 заданного семейства является циклической сетью Френе тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\Lambda_{i1}^{j}=0\ \ \left(i<j,i=1,2,...n-2;\ j=3,4,...,i+1,...,n\right);$$

$$\Lambda_{i1}^{i+1}\neq 0\ \ \left(i=1,2,...n-2\right);$$

$$\Lambda_{\bar{i}2}^{\bar{i}+1}\neq 0;$$

$$\Lambda_{\bar{i}2}^{j}=0\ \ \left(\bar{i}<j,\bar{i}=2,3,...,n-1,n;\ \ j=4,...,\bar{i}+1,...,n\right);$$

$$\Lambda_{\tilde{i}3}^{\tilde{i}+1} \neq 0;$$
$$\Lambda_{\tilde{i}2}^{j} = 0 \ (j = 1,2,3,...,n);$$
$$\Lambda_{p-1,n}^{p} \neq 0;$$
$$\Lambda_{p-1,n}^{j} = 0 \ (p < j;\ p = 2,...,n-2;\quad j = 3,...,n).$$

Рассмотрены двумерные и трехмерные распределения Δ_2, Δ_3, определяемые заданной циклической сетью Френе $\tilde{\Sigma}_n$ и доказана

Теорема 3.1.2. Если данная сеть $\tilde{\Sigma}_n$ Френе в области $\Omega \subset E_n$ является циклической сетью Френе, то

а) векторы средних кривизн двумерных распределений $\Delta_2^{(\alpha_1,\alpha_1+1)} = \left(X, \vec{e}_{\alpha_1}, \vec{e}_{\alpha_1+1}\right)$ имеют вид:

$$\vec{M}_2^{(\alpha_1,\alpha_1+1)} = \frac{1}{2}\vec{k}_{1,\alpha_1+1},$$

где $\vec{k}_{1,\alpha_1+1}$ – первая кривизна линии ω^{α_1+1} сети $\tilde{\Sigma}_n$, $\alpha_1 = 1,2,...,n-1$;

б) векторы средних кривизн двумерных распределений $\Delta_2^{(\alpha_1,\alpha_1+\tilde{i})} = \left(X, \vec{e}_{\alpha_1}, \vec{e}_{\alpha_1+\tilde{i}}\right)$ $\left(\tilde{i} = 2,3,...,n-\alpha_1\right)$ имеют вид:

$$\vec{M}_2^{(\alpha_1,\alpha_1+\tilde{i})} = \frac{1}{2}\vec{k}_{1,\alpha_1+\tilde{i}},$$

в) векторы средних кривизн трехмерных распределений $\Delta_3^{(\alpha_1,\alpha_1+1,\alpha_1+2)}$, $\Delta_3^{(\alpha_1,\alpha_1+1,\alpha_1+\hat{i})}$ (где $\hat{i} = 3,4,...,n-\alpha_1$) имеют вид:

$$\vec{M}_3^{(\alpha_1,\alpha_1+1,\alpha_1+2)} = \frac{1}{3}\vec{k}_{1,\alpha_1+2};$$

$$\vec{M}_3^{(\alpha_1,\alpha_1+1,\alpha_1+\hat{i})} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{1,\alpha_1+1} + \vec{k}_{1,\alpha_1+\hat{i}}\right).$$

В разделе 3.2. рассмотрен псевдофокус F_1^n. Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_n$, псевдофокус описывает свою область $\Omega_1^n \subset E_n$. Определяется отображение $h: \Omega \to \Omega_1^n$ такое, что $h(X) = F_1^n$.

Доказаны

Теорема 3.2.1. Для того, чтобы образ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе в отображении $h: \Omega \to \Omega_1^n$ являлась ортогональной необходимо и достаточно, чтобы для всех значений индексов $i, j \ (i \neq j)$ выполнялось условие:

$$\left[\left(\Lambda_{1n}^{n}\right)^2 + B_{1ni}^{n}\delta_1^{i}\right]\cdot\left[\left(\Lambda_{1n}^{n}\right)^2 + B_{1nj}^{n}\delta_1^{j}\right]\delta_{ij} + \left(\Lambda_{1n}^{n}\right)^2 \Lambda_{1i}^{k}\Lambda_{1j}^{\ell}\delta_{k\ell} = 0,$$

(выяснен геометрический смысл этого равенства).

Теорема 3.2.2. Для того, чтобы отображение $h: \Omega \to \Omega_1^n$ являлось движением необходимо и достаточно чтобы (для всех значений индекса i) выполнялось условие:

$$\left[\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1ni}^n \delta_1^i\right]^2 + \left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 \left(\Lambda_{1i}^k\right)^2 = \left(\Lambda_{1n}^n\right)^4,$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{1n}^{\,2} + \left(-\vec{e}_1 d_i \vec{k}_{1n}\right)\right]^2 + \vec{k}_{1n}^{\,2} \vec{\Lambda}_{1i}^{\,2} = \left(k_1^n\right)^4.$$

В разделе 3.3. рассмотрен псевдофокус $F_2^1 \in \left(X, \vec{e}_2\right)$. Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус $F_2^1 \in \left(X, \vec{e}_2\right)$ описывает свою область $\Omega_2^1 \subset E_4$. Получается частичное отображение $\mu: \Omega \to \Omega_2^1$ такое, что $\mu\left(X\right) = F_2^1$.

Доказаны

Теорема 3.3.1. Образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_n$ в отображении μ является ортогональной тогда и только тогда, когда выполнено условие для всех $i, j \ \left(i \neq j\right)$:

$$\left[\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + B_{21i}^1 \delta_2^i\right] \cdot \left[\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + B_{21j}^1 \delta_2^j\right] + \left(\Lambda_{21}^1\right)^2 \Lambda_{2i}^k \Lambda_{2j}^k \delta_{k\ell} = 0,$$

геометрический смысл этого условия заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{11}^{\,2} + \left(-\vec{e}_2 d_i \vec{k}_{11}\right)\delta_2^i\right] \cdot \left[\vec{k}_{11}^{\,2} + \left(-\vec{e}_2 d_j \vec{k}_{11}\right)\delta_2^j\right] + \vec{k}_{11}^{\,2} \vec{\Lambda}_{2i} \vec{\Lambda}_{2j} = 0.$$

Теорема 3.3.2. Отображение $\mu: \Omega \to \Omega_2^1$ (где $\Omega \subset E_4$, $\Omega_2^1 \subset E_4$) является движением тогда и только тогда, когда выполнено условие (для всех значений i):

$$\left[\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + B_{21i}^1 \delta_2^i\right]^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\Lambda_{2i}^k\right)^2 = \left(\Lambda_{21}^1\right)^4,$$

геометрический смысл этого равенства заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{11}^{\,2} + \left(-\vec{e}_2 d_i \vec{k}_{11}\right)\right]^2 + \vec{k}_{21}^{\,2} \vec{\Lambda}_{2i}^{\,2} = \left(k_1^1\right)^4.$$

В разделе 3.4. в виде обобщения рассмотрен псевдофокус $F_i^j \ \left(i \neq j\right)$. Когда точка X смещается в области Ω псевдофокус $F_i^j \ \left(i \neq j\right)$ описывает свою область Ω_i^j в E_n. Получим отображение $h: \Omega \to \Omega_i^j$ такое, что $h\left(X\right) = F_i^j$.

Доказаны

Теорема 3.4.1. Линия ω^k заданной сети Френе является двойной линией отображения h тогда и только тогда, когда имеет равенство $\Lambda_{ik}^m = 0$.

Теорема 3.4.2. Образ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе в отображении $h: \Omega \to \Omega_i^j$ является ортогональной тогда и только тогда, когда выполнено условие (для всех значений индексов k, ℓ):

$$\left[\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2 + B_{ijk}^j \delta_i^k\right]\left[\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2 + B_{ij\ell}^j \delta_i^\ell\right]\delta_{k\ell} + \left(\Lambda_{ij}^j\right)^2 \Lambda_{ik}^m \Lambda_{i\ell}^t \delta_{mt} = 0,$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{ij}^{\,2}+\left(-\vec{e}_i d_k \vec{k}_{ij}\right)\right]\left[\vec{k}_{ij}^{\,2}+\left(-\vec{e}_i d_\ell \vec{k}_{ij}\right)\right]=-\vec{k}_{ij}^{\,2}\vec{\Lambda}_{ik}\vec{\Lambda}_{i\ell}.$$

Теорема 3.4.3. Отображение $h:\Omega\to\Omega_i^j$ является движением тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\left[\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2+B_{ijk}^j\delta_i^k\right]^2+\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2\sum_{m=1}^{n}\left(\Lambda_{ik}^m\right)^2=\left(\Lambda_{ij}^j\right)^4,$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{ij}^{\,2}+\left(-\vec{e}_i d_k \vec{k}_{ij}\right)\right]^2+\vec{k}_{ij}^{\,2}\vec{\Lambda}_{ik}^{\,2}=\left(k_i^j\right)^4.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во второй главе работы рассматривалась задача: заданием в области $\Omega\subset E_4$ циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ на касательных $\left(X,\vec{e}_i\right)$ $\left(i=1,2,3,4\right)$ к линиям ω^i этой сети инвариантным образом определяются точки, так называемые псевдофокусами прямых $\left(X,\vec{e}_i\right)$. На каждой касательной имеем по одному псевдофокусу: $F_1^4\in\left(X,\vec{e}_1\right)$, $F_2^1\in\left(X,\vec{e}_2\right)$, $F_3^2\in\left(X,\vec{e}_3\right)$, $F_4^3\in\left(X,\vec{e}_4\right)$. Когда точка $X\in\Omega$ смещается в области Ω, эти псевдофокусы описывают свои области $\Omega_1^4,\Omega_2^1,\Omega_3^2,\Omega_4^3$ в E_4 соотвественно. Определяются частичные отображения: $\varphi:\Omega\to\Omega_1^4$, $g:\Omega\to\Omega_2^1$, $\psi:\Omega\to\Omega_3^2$, $f:\Omega\to\Omega_4^3$. Изучить некоторые свойства отображений φ, g, ψ, f.

Доказаны

а) необходимые и достаточные условия для того, чтобы образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ в каждом из рассматриваемых отображениях была ортогональной;

б) необходимые и достаточные условия для того, чтобы каждое из рассматриваемых отображений являлось движением;

в) найден геометрический смысл полученных необходимых и достаточных условий;

г) необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия ω^i заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ являлась двойной линией каждого рассматриваемого отображения.

Найдена связь между векторами средних кривизн двумерных и трехмерных распределений, определяемых заданной сетью $\tilde{\Sigma}_4$, а также связь между этими векторами и векторами кривизн линий сети $\tilde{\Sigma}_4$.

В третьей главе диссертации выше изложенные результаты обобщены для n-мерного евклидова пространства.

Автор благодарит научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Матиевой Гулбадан за постановку задачи исследования, постоянное внимание и поддержку в работе.

Список опубликованных работ

1. Папиева Т.М. Циклическая сеть Френе в четырехмерном евклидовом пространстве [Текст] /Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 40. – Бишкек: Илим, 2009. – С. 294-298.
2. Papieva T.M. The double lines of a partial mapping of n - dimension Euclidean space generated by given set of smooth lines [Текст] / G. Matieva, T.M. Papieva //Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries. vol. 1. Almaty, June 30 – July 4, 2009. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009.
3. Папиева Т.М. Геометрия частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Т.М. Папиева //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С.180-184.
4. Папиева Т.М. Двойные линии частичного отображения евклидова пространства [Текст] /Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С.185-189.
5. Папиева Т.М. Двойные линии частичного отображения евклидова пространства [Текст] /Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 43. – Бишкек: Илим, 2010. – С.199-203.
6. Папиева Т.М. Циклическая сеть Френе в n- мерном евклидовом пространстве E_n [Текст] / Т.М. Папиева // Вестник КРСУ, 2010, том 10. № 9. – С. 40-43.
7. Папиева Т.М. Свойства частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе [Текст] / Т.М. Папиева //Вестник ОшГУ. № 2. вып. 1. – Ош, 2012. – С. 161-165.
8. Papieva T.M. The double lines of a partial mapping of n - dimension Euclidean space generated by given set of smooth lines [Текст] / Matieva G., T.M. Papieva // Abstracts of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – P. 67.

РЕЗЮМЕ

**диссертационной работы Папиевой Толкун Маматаевны
на тему "Геометрия частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной циклической сетью Френе"
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.04 – "Геометрия и топология"**

Ключевые слова: частичное отображение, сеть Френе, циклическая сеть Френе, псевдофокус, распределение, вектор кривизны

Объект исследования: Объектом исследования являются частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданной циклической сетью Френе.

Предмет исследования: Свойства частичных отображений евклидова пространств, порождаемых псевдофокусами на касательных к линиям заданной циклической сети Френе.

Цель исследования:

– исследовать частичные отображения четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемые псевдофокусами на касательных к линиям заданной циклической сети Френе;

– исследовать частичные отображения n-мерного евклидова пространства E_n, порождаемые псевдофокусами на касательных к линиям заданной n-мерной циклической сети Френе;

– найти связь между векторами средних кривизн двумерных и трехмерных распределений, определяемых заданной циклической сетью Френе, а также связь между этими векторами и векторами кривизн линий заданной сети.

Методы исследования: В данной работе использованы следующие методы: метод внешних форм Картана, метод подвижного репера с использованием теоретико-группового метода дифференциально-геометрических исследований Г.Ф.Лаптева.

Научная новизна:

– найдены необходимые и достаточные условия ортогональности образа заданной циклической сети Френе в каждом из рассматриваемых частичных отображениях;

– получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы рассматриваемые частичные отображения являлись движением;

– найден геометрический смысл полученных необходимых и достаточных условий;

– выявлена связь между векторами средних кривизн двумерных и трехмерных распределений, определяемых заданной циклической сетью Френе, а также связь между этими векторами и векторами кривизн линий заданной сети;

– доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии заданной циклической сети являлись двойными линиями рассматриваемых отображений.

Папиева Толкун Маматаевнанын “Евклиддик мейкиндикте берилген Френенин циклдык торчосу тарабынан жаратылган бөлүктөп чагылтуулардын геометриясы” – деген темадагы 01.01.04 – “Геометрия жана топология” адистиги боюнча физика-математика илимдердин кандидаты илимий даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: бөлүктөп чагылтуу, Френенин торчосу, Френенин циклдик торчосу, псевдофокус, бөлүштүрүү, ийрилик вектору.

Изилдөөнүн обьектиси: Евклиддик мейкиндиктерди берилген Френенин циклдик торчосу тарабынан жаратылган бөлүктөп чагылтуулар.

Изилдөөнүн предмети: Евклиддик мейкиндиктердин берилген Френенин циклдик торчосунун сызыктарынын жанымаларындагы псевдофокустар тарабынан жаратылган бөлүктөп чагылтуулардын касиеттери.

Изилдөөнүн максаты:

– евклиддик төрт ченемдүү мейкиндикте берилген Френенин циклдик торчосунун сызыктарынын жанымаларындагы псевдофокустар тарабынан жаратылган бөлүктөп чагылтууларды изилдөө;

– n-ченемдүү Евклиддик мейкиндиктерди берилген Френенин циклдик торчосунун сызыктарынын жанымаларындагы псевдофокустар тарабынан жаратылган бөлүктөп чагылтууларды изилдөө;

– берилген Френенин циклдик торчосу тарабынан жаратылган эки жана үч ченемдүү бөлүштүрүүлөрдүн орточо ийрилик векторлорунун арасындагы байланышты жана бул векторлор менен берилген торчонун сызыктарынын ийрилик векторлорунун арасындагы байланышты табуу.

Изилдөөнүн методдору: Картандын сырткы формалар методу, кыймылдуу репер жана дифференциалдык-геометриялык изилдөөлөр, Г.Ф.Лаптевдин теориялык-группалык методу.

Изилдөөнүн илимий жаңылыктары:

– берилген циклдик торчосунун каралган чагылтуулардагы элестеринин ортогоналдык торчо болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары табылган;

– Ар бир каралган бөлүктөп чагылтуунун кыймыл болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген;

– Алынган зарыл жана жетиштүү шарттардын геометриялык маңызы табылган;

– Берилген Френенин циклдик торчосу тарабынан жаратылган эки жана үч ченемдүү бөлүштүрүүлөрдүн орточо ийрилик векторлорунун арасындагы байланышты жана бул векторлор менен берилген торчонун сызыктарынын ийрилик векторлорунун арасындагы байланыштар аныкталган;

– Берилген Френенин циклдик торчосунун сызыктарынын каралган бөлүктөп чагылтуулардын кошмок сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген.

SUMMARY

Dissertation “Geometry of partial mappings of Euclidean space, generated by given circular net Frenet” of Papieva Tolkun Mamataevna is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences by the specialty 01.01.04- “Geometry and topology”

Key words: partial mapping, net Frenet, circular net Frenet, pseudofocus, distribution, vector of curvature.

Object of research: Partial mappings of Euclidean space, generated by given circular net Frenet.

Subject of research: Properties of partial mappings of Euclidean space, generated by given circular net Frenet.

Research aim:

– to investigate partial mappings of 4-dimension Euclidean space E_4, generated by given circular net Frenet;

– to investigate partial mappings of *n*-dimension Euclidean space E_n, generated by given circular net Frenet;

– to find connection between vectors of mean curvature of 2-dimension and 3-dimension distributions, also between these vectors and vectors of curvature of the lines of given net.

Research Methods: In this study used the following methods: the external forms of Cartan's, moving frame method using group-theoretic methods of differential geometry researches G.F.Lapteva.

Scientific novelty:

– it is found necessary and sufficient conditions of orthogonality of the image of given circular net Frenet in each considered partial mapping;

– necessary and sufficient conditions of to be motion of considered partial mappings are proved;

– geometrical meaning of the above mentioned conditions is find;

– it is determined that connection between vectors of mean curvature of 2-dimension and 3-dimension distributions, also between these vectors and vectors of curvature of the lines of given net;

– it is proved necessary and sufficient conditions of duality of the lines of the given net in considered partial mappings.