

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

**КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж.БАЛАСАГЫНА**

Диссертационный совет Д 01.15.513

На правах рукописи
УДК 517.968

Акерова Джылдыс Абдрамановна

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ И ОСОБЕННОСТИ ИХ РЕШЕНИЙ**

**01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление**

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук**

Бишкек – 2016

Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной математики
НАН Кыргызской Республики

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
с.н.с. Байзаков А.Б.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Асанов А.

кандидат физико-математических наук,
доцент Эгемберидиев Ш.А.

Ведущая организация: Ошский технологический университет им.
академика М.М.Адышева, г.Ош, 723503,
м.р. Юго-Восток, ул. Н. Исанова 81

Защита диссертации состоится «13» мая 2016 г. в 16⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 01.15.513 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико–математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан “___” _____ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета, д.ф.-м.н., профессор

Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации.

Многие математические задачи приводятся к решению нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, и в связи с этим имеется большое количество работ, где доказывалось существование и единственность решений таких уравнений с различными начальными и краевыми условиями в некоторых областях, а также устойчивость решений (в теории автоматического управления). Вместе с тем, для практики бывает важно установить не только существование решения (инженеры обычно считают существование решения корректно поставленной задачи само собой разумеющимся и не требующим доказательства), но и некоторые его свойства, в первую очередь – положительность, монотонность.

Так, например, перемена знака решения практически зачастую обозначает его отсутствие вообще, поскольку в реальных задачах решения почти всегда подразумеваются положительными. (Отметим, что по сложившейся традиции в работах по оптимизации с экономическим содержанием все независимые переменные считаются неотрицательными, и это закладывается в алгоритмы решения таких задач).

Обзор литературы показывает, что работ, где устанавливаются свойства решений нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (кроме упомянутых асимптотических свойств и свойств устойчивости), значительно меньше, и в этих работах рассматриваются очень узкие классы задач и налагаются значительно более ограничительные и трудно проверяемые условия.

В связи с этим отметим, что А.Ж.Аширбаева, продолжая работы М.И. Иманалиева, П.С.Панкова и Т.М.Иманалиева, разработала способы строгой записи функциональных операторов в многомерных пространствах, давшие возможность формулировать и доказывать теоремы для более общих классов операторно-дифференциальных уравнений; Т.Т.Халилова, опираясь в основном на труды М.И.Иманалиева и А.Б.Байзакова, разработала общую методику исследования и доказательства существования и ветвления решений уравнений, в том числе упомянутых типов. Однако такая методика не применялась непосредственно к установлению свойств решений.

Поэтому задача разработки общей методики исследования и доказательства существования вместе с установлением свойств решений нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных является актуальной. Также такая методика необходима для получения количественных оценок снизу для возрастания энтропии в почти замкнутых системах, описываемых дифференциальными уравнениями с управлением.

Связь с научно-исследовательскими работами.

Работа выполнена в рамках проекта "Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач и в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений" ИТПМ НАН КР (2012-2014 годы), № гос. регистрации 0005756. Полученные результаты включены в годовой отчет по проекту.

Цель и задачи исследования.

Построить наиболее общие операторно-дифференциальные уравнения в частных производных, включающие в себя известные, ранее рассмотренные конкретные нелинейные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, а также новые типы уравнений, для которых можно доказать существование и знакоопределенность решений. Построить общие схемы для исследования существования и установления свойств решений нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных на основе известных принципов неподвижной точки.

Показать возможности разработанных методов для исследования задач по существованию и свойствам решений задачи различных конкретных нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, а также с интегральными функционалами, в том числе с управлением, для установления справедливости гипотезы о возрастании энтропии при уменьшении времени достижения цели.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие новые результаты:

Построены более общие операторно-дифференциальные уравнения в частных производных, включающие в себя известные, ранее рассмотренные конкретные нелинейные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных.

Построены общие схемы для исследования существования и свойств решений задачи Коши на оси для нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих определенные свойства, на основе известных принципов неподвижной точки, с помощью методов преобразования решений, дополнительного аргумента, приближенных методов. Впервые получена оценка снизу для приращения энтропии при управляемом преобразовании протяженного объекта в зависимости от времени.

Основные методы исследования.

Используются методы теории интегральных уравнений, а также общие результаты нелинейного функционального анализа, в том числе принципы неподвижной точки Банаха, Шаудера и в пространствах с конусом, методы математического анализа, включая формулу Тейлора с

остаточным членом в интегральной форме; методы интервального анализа, приближенные методы с использованием алгоритмического языка Pascal.

Теоретическая и методическая значимость полученных результатов.

Данная работа имеет теоретическую направленность. Разработанную методику можно применять для установления дополнительных условий, при которых решения уравнений динамических систем, существование которых уже доказано, имеют требуемые свойства. Предложенные методы доказательства существования решений уравнений с частными производными с заданными свойствами с использованием последовательных приближений или принципа сжимающих отображений можно использовать для построения таких приближенных решений. Построенную программу с соответствующей модификацией можно использовать для доказательства существования положительных решений других уравнений.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

Комплекс методов доказательства существования положительных решений общих операторно-дифференциальных уравнений в частных производных, включающих в себя различные типы нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе новый класс уравнений с интегрально-дифференциальными операторами, улучшения и обобщения полученных результатов.

Достаточные условия существования положительных решений для классов:

уравнений первого порядка с оператором дифференциально-интегрального типа;

уравнений с дифференциальным оператором гиперболического типа;

уравнений с дифференциальным оператором типа Больцмана;

уравнений с дифференциальным оператором по одной из переменных и интегральными функционалами и операторами;

уравнений второго порядка со смешанной производной;

начально-краевых задач для уравнений высокого порядка;

уравнений с оператором параболического типа.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на:

- Международной научной конференции, посвященной 70-летию академика М.И. Иманалиева (г.Бишкек, сентябрь 2001);
- Пятом конгрессе математиков Тюркского мира (с. Булан-Соготту, июнь 2014);
- Иссык-Кульском международном математическом форуме (с. Бозтери, июнь 2015);
- семинаре Института теоретической и прикладной математики НАН КР.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1]-[13]. В совместных работах [3], [6], [7], [9] постановки задач принадлежат соавторам, а получение основных результатов – автору.

Структура, объем и краткое содержание диссертации. Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, пяти глав, разбитых на разделы, выводов, списка использованных источников из 45 наименований и приложения. Нумерация разделов – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе. Объем текста 88 страниц.

Краткое содержание работы.

Используются следующие обозначения.

$u(t,x)$, $V(\tau,t,x)$ – искомые функции. Все другие функции предполагаются заданными.

$B(G)$ – пространство ограниченных функций на области $G \subset \mathbf{R}^n$.

$Lip(L/u)$ – класс функций, возможно – от нескольких переменных, удовлетворяющих условию Липшица по переменной “ u ” с константой “ L ”.

В определениях операторов записывается: функция каких переменных получается; на функцию скольких переменных действует оператор (по аналогии с записью интегралов); связанные переменные в этой функции.

В **первой главе** приведены обзор работ, примыкающих к данной работе, и дополнительные результаты, используемые в работе. Предлагается общая методика получения, обобщения и улучшения результатов о существовании и положительности решений динамических систем.

Приводится список известных дифференциальных операторов и обратных к ним.

Схемы установления свойств решений уравнений с операторами дифференциального и интегрального типов: использование обратного оператора; приведение к алгебраическому уравнению, к системе алгебраических уравнений; метод преобразования решений; метод дополнительного аргумента; метод рядов.

Предлагается также рассматривать операторно-дифференциальные уравнения вида $D(u,u)=f$, где $D(v,u)$ – оператор, интегральный по первой функциональной переменной и дифференциальный по второй функциональной переменной. Если оператор $D(v,u)$ имеет обратный $D^{-1}(v,f)$ по второй переменной, то есть решение уравнения $D(v,u)=f$ можно записать в виде $u = D^{-1}(v,f)$, то получаем уравнение $u = D^{-1}(u,f)$.

Если оно относится к одному из типов, рассмотренных выше, то можно доказать существование и знакоопределенность решения.

Систематизированы методы улучшения, переноса на другие типы уравнений и обобщения полученных результатов, в том числе:

- замена ограничений на отдельные компоненты условия ограничениями на выражения, непосредственно используемые в доказательстве теоремы;
- введение пробных элементов, в том числе: подбор области, в которой выполняются условия принципов неподвижной точки, подбор нормы с весом (если более оптимальный пробный элемент оказывается слишком сложным для непосредственной проверки условия, то предлагается использовать доказательные вычисления на компьютере);
- аксиоматический подход: после получения какого-либо частного результата (доказательства теоремы) производится анализ для выявления тех существенных особенностей исследуемого объекта, которые привели к заключению теоремы, рассматривается более общий случай (например, вместо интегрального оператора в пространстве функций – общий вполне непрерывный оператор) и постулируются те условия (существенные особенности), которые были доказаны в частном случае;
- перенос результатов на более сложные виды уравнений, в том числе: с композицией операторов, каждый из которых хорошо изучен; переход от уравнений, содержащих необходимые компоненты искомой функции «в явном виде», к уравнениям, содержащим такие компоненты «в неявном виде»; переход от скалярных уравнений к системам уравнений (здесь необходимо оговаривать условия, которые в скалярном случае выполняются автоматически, а в векторно-матричном случае могут не выполняться).

Приводятся также необходимые сведения и гипотезы об энтропии, в том числе: для почти замкнутой системы существует такой отрезок времени T_0 (адиабатическое время системы), зависящий только от начального состояния системы, что для любого $T < T_0$ приращение энтропии ΔH в системе не меньше некоторой положительной величины при любом переходе от стационарного состояния A к стационарному состоянию B за время T ; существует также такая константа C_0 , что $\Delta H \geq \frac{C_0}{T^2}$.

Во второй главе получены первичные условия существования положительных решений для некоторых нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными.

В том числе, рассматривается уравнение

$$u_t(t, x) + \int_0^t u(t, s) ds u_x(t, x) = f(t), \quad f(t) \in \mathbf{C}, t \in \mathbf{R}_+, x \in \mathbf{R} \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = \varphi(x), \varphi(x) \in \mathbf{C}. \quad (2)$$

Эквивалентное этой начальной задаче уравнение

$$u(t, x) := J(t, x; u(\tau, s): \tau, s) = \varphi\left(x - \int_0^t \int_0^\tau u(\tau, s) ds d\tau\right) + \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

ТЕОРЕМА 1. Если $\varphi \in Lip \cap C^1(\mathbf{R}) \cap \mathbf{B}(\mathbf{R})$, $\varphi(x) > 0$, $f(t) \geq 0$, $f \in C(\mathbf{R}_+) \cap \mathbf{B}(\mathbf{R}_+)$, то задача (1)-(2) имеет положительное решение в $C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$.

ТЕОРЕМА 2. Если 1) $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) > 0$; 2) $\varphi(x) < 0.4$; $\psi < 0.3$, то начальная задача (2) и

$$u_t(0, x) = \psi(x), \psi(x) \in C \quad (3)$$

для уравнения

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = \Lambda(t; u(t, \xi): \xi) := \int_0^1 u^4(t, \xi) d\xi, t \in \mathbf{R}_+, x \in \mathbf{R} \quad (4)$$

имеет положительное решение при $t < 0.5$.

ТЕОРЕМА 3. Если $\varphi(x) \in C(\mathbf{R}) \cap \mathbf{B}$, $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) \equiv 0$, то начальная задача (2)-(3) для уравнения с интегрально-дифференциальным оператором

$$u_{tt}(t, x) - \int_0^1 \int_0^1 u^2(\tau, \xi) d\tau d\xi u_{xx}(t, x) = 0, t \in \mathbf{R}_+, x \in \mathbf{R} \quad (5)$$

имеет положительное решение.

ТЕОРЕМА 4. Если 1) $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) \in Lip(0.3)$; $f(t, x) > 0$; $f(t, x) \in Lip(0.2/x)$; 2) $\varphi(x) < 0.4$, $f(t, x) < 0.3$, то начальная задача (2) для уравнения

$$u_t(t, x) + u(t, x)u_x(t, x) = (t, x) \int_0^1 \int_0^1 u(\tau, \sigma) \sqrt{u(\tau, \sigma)} d\sigma d\tau, t \in [0, 1], x \in \mathbf{R}, \quad (6)$$

имеет положительное решение.

Уравнение

$$u_t(t, x) = f(t, x, \int_0^1 \int_0^1 u(\tau, \sigma) \sqrt{u(\tau, \sigma)} d\sigma d\tau), t \in [0, 1], x \in \mathbf{R} \quad (7)$$

с начальным условием (2) эквивалентно интегральному уравнению

$$u(t, x) = \varphi(x) + \int_0^t f\left(s, x, \int_0^1 \int_0^1 u(\tau, \sigma) \sqrt{u(\tau, \sigma)} d\sigma d\tau\right) ds. \quad (8)$$

Обозначая $\gamma := \int_0^1 \int_0^1 u(\tau, \sigma) \sqrt{u(\tau, \sigma)} d\sigma d\tau$, получаем алгебраическое уравнение

$$\gamma = H(\gamma) := \int_0^1 \int_0^1 (\varphi(\sigma) + \int_0^\tau f(s, \sigma, \gamma) ds) \sqrt{\varphi(\sigma) + \int_0^\tau f(s, \sigma, \gamma) ds} d\sigma d\tau. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 5. Если 1) $\varphi(x) > 0$, $f(t, x, 0) > 0$, $f(t, x, v)$ возрастает по v ; 2) $\varphi(x) < 0.4$; 3) $f(t, x, 1) < 2.6$, то задача (7)-(2) имеет положительное решение.

Рассматривается уравнение

$$u_{tx}(t, x) = f(t, x, u(t, x)), t \in [0, 1], x \in [0, 1] \quad (10)$$

с условиями

$$u(t, 0) = u(0, x) = 0, t \in [0, 1], x \in [0, 1]. \quad (11)$$

Эта задача эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t, x) = \int_0^t \int_0^x f(s, \xi, u(s, \xi)) ds d\xi. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 6. Если 1) $f(0, 0, 0) > 0$; 2) эта функция возрастает по своим переменным; 3) существует такая положительная функция (пробный элемент) $U(t, x)$, что

$$\int_0^t \int_0^x f(s, \xi, U(s, \xi)) ds d\xi < U(t, x), t \in [0, 1], x \in [0, 1], \quad (13)$$

то задача (10)-(11) имеет положительное решение.

Поскольку для конкретных функций проверка (13) аналитически может быть слишком сложной, предлагается использовать компьютер. Для устранения необходимости оценки погрешности метода предлагается применять интервальный анализ.

Пусть n - натуральное, $h := 1/n$. Обозначим

$$V[i, j] := U[ih, jh], F[i, j] := f(ih, jh, V[i, j]), i = 0..n; j = 0..n.$$

Тогда из соотношения

$$\sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j h^2 F[p, q] < V[i-1, j-1], i = 1..n; j = 1..n \quad (14)$$

следует (13). В качестве примера доказана

ТЕОРЕМА 7. Уравнение

$$u_{tx}(t, x) = 0.2t + 2x + 0.1u^2(t, x), t \in [0, 1], x \in [0, 1] \quad (15)$$

с условиями (11) имеет положительное решение.

В качестве пробной функции была взята $U(t, x) = 0.3 + 2t + 3x$, $n = 20$.

Рассмотрен вопрос о существовании и положительности решения начально-краевой задачи вида

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^{2p} u(t, x)}{\partial x^{2p}} = \int_0^T \int_0^\pi K(x, s) f(\tau, s, u(\tau, s)) ds d\tau, \quad (16)$$

(p – натуральное) с начальными условиями (2)-(3), $0 \leq x \leq \pi$, и краевыми условиями

$$u(t, 0) = 0; \quad u(t, \pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (17)$$

выполняются условия согласования

$$\varphi(0) = 0, \varphi(\pi) = 0, \psi(0) = 0, \psi(\pi) = 0, K(0, s) \equiv 0, K(\pi, s) \equiv 0. \quad (18)$$

Известные функции разлагаются в ряды Фурье по синусам

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \sin jx, \psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \sin jx, K(x, s) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j(s) \sin jx.$$

Решение задачи ищется в виде (сначала – формального) ряда

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) \sin jx.$$

ТЕОРЕМА 8. Если 1) $\varphi(x) \in C^2[0, \pi], \psi(x) \in C^1[0, \pi]$, 2) $K(x, s) \in C$,
3) $f(\tau, s, u) \in C \cap \mathbf{Lip}(L/u)$, 4) p – нечетное, 5) $k_0 := \|K(x, s)\|_C$ достаточно мало:
 $\frac{1}{3a^2} k_0 L T \pi^2 < 1$, то задача (16)-(17)-(18) имеет решение.

ТЕОРЕМА 9. Если 1) выполняются условия Теоремы 8; 2) $\varphi_l > 0$;
3) $T < \frac{\pi}{4a}$; 4) $\alpha := \|\varphi'''(x) + \varphi_l \cos x\|_C$; $\beta := \|\psi''(x)\|_C$, $\xi := \|K_x'(x, s)\|_C$
достаточно малы, то задача (16)-(17)-(18) имеет положительное решение.

Рассматривается уравнение

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + f\left(t, x; \int_0^1 \int_0^1 u(\tau, \xi) d\tau d\xi\right) \quad (19)$$

с начальным условием (2).

Решение задачи (19)-(2) может быть получено из решения уравнения
 $V(t, x) = J(t, x; V(\tau, \xi): \tau, \xi := -\varphi''(x) -$
 $-f(t, x, \int_0^1 \int_0^1 \left(\varphi(\xi) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty \exp(-\gamma^2) V(\sigma, \xi - 2\gamma\sqrt{\tau - \sigma}) d\gamma d\sigma\right) d\tau d\xi)$
по формуле

$$u(t, x) = \varphi(x) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{t-\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4(t-\sigma)}\right) V(\sigma, s) ds d\sigma.$$

ТЕОРЕМА 10. Если 1) $\varphi(x) \in C^2 \cap \mathbf{B}$, $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$, 2) $\varphi''(x) \in C \cap \mathbf{B}$,
 $\varphi''(x) \leq -\varphi_2 \leq 0$, 3) $f(t, x, v) \in C \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{Lip}(L/v)$, $\|f(t, x, v)\| = f_0 < \varphi_2$,
то начальная задача (19)-(2) имеет положительное решение в области
 $[0, \theta L^{-1}] \times \mathbf{R}$, где $\theta < 1$.

Рассматривается уравнение (композиция дифференциальных операторов)

$$u_{tt}(t, x) + \int_0^t u(t, s) ds u_{tx}(t, x) = f(t), \quad f(t) \in \mathbf{C}, t \in \mathbf{R}_+, x \in \mathbf{R} \quad (20)$$

с начальными условиями (2)-(3). Эта начальная задача эквивалентна

$$u(t, x) = J(t, x; u(\tau, s): \tau, s): = \quad (21)$$

$$:= \varphi(x) + \int_0^t \left(\psi\left(x - \int_0^\eta \int_0^\tau u(\tau, s) ds d\tau\right) + \int_0^\eta f(\tau) d\tau \right) d\eta.$$

ТЕОРЕМА 11. Если $\psi \in \mathbf{Lip}(L) \cap C^1(\mathbf{R}) \cap \mathbf{B}(\mathbf{R})$, $\psi(x) \geq 0$, $\varphi(x) > 0$,
 $\varphi \in C(\mathbf{R}) \cap \mathbf{B}(\mathbf{R})$, $f(t) \geq 0$, $f \in C(\mathbf{R}_+) \cap \mathbf{B}(\mathbf{R}_+)$, то задача (20)-(2)-(3) имеет
положительное решение в $C^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$.

В третьей главе с использованием предложенной методики
показано улучшение результатов второй главы.

Рассматривается уравнение, более общее, чем (1),

$$u_t(t, x) + \int_0^t K(t, s, u(t, s)) ds \, u_x(t, x) = f(t), K(t, s, u), t \in \mathbf{R}_+, x \in \mathbf{R} \quad (22)$$

с начальным условием (2).

ТЕОРЕМА 12. Если 1) $\varphi \in \mathbf{Lip}(L) \cap \mathbf{C}^1(\mathbf{R}) \cap \mathbf{B}(\mathbf{R})$, $\varphi(x) > 0$, $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}_+)$, $\int_0^t f(\tau) d\tau \geq 0$, $K(t, s, u) \in \mathbf{Lip}(L|_u) \cap \mathbf{C}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$,

то задача (22)-(2) имеет положительное решение в $\mathbf{C}^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$.

В условиях Теоремы 2 обозначается $\varphi_0 := \sup \varphi(x)$; $\psi_0 := \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) ds$.

ТЕОРЕМА 13. Если 1) $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) > 0$; 2) существуют такие положительные числа t_0 , u_0 , что $\varphi_0 + t_0 \psi_0 + t_0^2 u_0^4 \leq u_0$ и $4t_0^2 u_0^3 < 1$,

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall t < t_0)(\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds > 0).$$

то начальная задача (2)-(3) для уравнения (4) имеет положительное решение при $t < t_0$.

ТЕОРЕМА 14. Если 1) $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) \in \mathbf{Lip}(L_\varphi)$; $f(t, x) > 0$; $f(t, x) \in \mathbf{Lip}(L_f|_x)$;

2) числа $L_\varphi, L_f, \varphi_0 = \|\varphi(x)\|_C, f_0 = \|f(t, x)\|_C$ удовлетворяют соотношениям:

$$\varphi_0 + f_0 \leq 1; \text{ существует такое } \theta < 2/3, \text{ что } L_\varphi \theta + f_0 + L_f \theta \leq \theta,$$

то начальная задача (2) для уравнения (6) имеет положительное решение.

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} u(t, x) + \int_0^t u(t, s) ds \, \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^n \partial x} u(t, x) = f(t), f(t) \in \mathbf{C}, t \in \mathbf{R}_+, x \in \mathbf{R}, \quad (23)$$

$n \geq 2$, с начальными условиями

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(0, x) = \varphi_k(x), k = 0..n-1, \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(0, x) = \psi(x). \quad (24)$$

Эта начальная задача эквивалентна

$$u(t, x) = J(t, x; u(\tau, s): \tau, s) :=$$

$$:= \varphi_0(x) + \varphi_1(x)t + \frac{1}{2}\varphi_2(x)t^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi_{n-1}(x)t^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\eta)^{n-1} \left(\psi(x - \int_0^\eta \int_0^\tau u(\tau, s) ds d\tau) + \int_0^\eta f(\tau) d\tau \right) d\eta.$$

ТЕОРЕМА 15. Если 1) $\psi \in \mathbf{Lip}(L) \cap \mathbf{C}^1(\mathbf{R}) \cap \mathbf{B}(\mathbf{R})$, $\psi(x) \geq 0$,

2) $\varphi_0(x) > 0$, $\varphi_k(x) \geq 0, k = 1, \dots, n-1$, $\varphi_k \in \mathbf{C}(\mathbf{R}) \cap \mathbf{B}(\mathbf{R}), k = 0, \dots, n-1$,

3) $f(t) \geq 0, f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}_+) \cap \mathbf{B}(\mathbf{R}_+)$, то задача (23)-(24) имеет положительное решение в $\mathbf{C}^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$.

Рассматривается система уравнений

$$u_t(t, x) = \int_0^1 \int_0^1 (Au^2(\tau, \xi) + Bv^2(\tau, \xi)) d\tau d\xi,$$

$$v_t(t, x) = \int_0^1 \int_0^1 (Cu^2(\tau, \xi) + Dv^2(\tau, \xi)) d\tau d\xi, \quad t \in [0, 1], x \in [0, 1], \quad (25)$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = \varphi(x), v(0, x) = \psi(x), x \in [0, 1]. \quad (26)$$

$$\text{Обозначено } \varphi_1 := \int_0^1 \varphi(\xi) d\xi, \varphi_2 := \int_0^1 \varphi^2(\xi) d\xi, \psi_1 := \int_0^1 \psi(\xi) d\xi, \\ \psi_2 := \int_0^1 \psi^2(\xi) d\xi.$$

ТЕОРЕМА 16. Если $\varphi(x), \psi(x) \in C[0, 1]$, $\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0, A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0, D \geq 0, A\varphi_1 < 1, C\psi_1 < 1$ и существуют такие $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0$, что

$$\varphi_2 + \varphi_1(A\alpha_0 + B\beta_0) + \frac{1}{3}(A\alpha_0 + B\beta_0)^2 \leq \alpha_0,$$

$$\psi_2 + \psi_1(C\alpha_0 + D\beta_0) + \frac{1}{3}(C\alpha_0 + D\beta_0)^2 \leq \beta_0,$$

то начальная задача (25)-(26) имеет положительное решение (обе компоненты положительны).

В четвертой главе некоторые результаты третьей главы перенесены на более широкие классы нелинейных операторно-дифференциальных уравнений.

Рассмотрено уравнение, более общее, чем (20), с оператором интегрального типа, преобразующим функции от двух переменных в функции от одной переменной

$$u_t(t, x) + Q(t; u(t, s); s) u_x(t, x) = f(t), \quad f(t) \in C, \quad (27)$$

с начальным условием (2).

ТЕОРЕМА 17. Если 1) $\varphi \in Lip \cap C^1(R) \cap B(R), \varphi(x) > 0, f \in C(R_+)$, $\int_0^t f(\tau) d\tau \geq 0$, оператор Q преобразует непрерывные функции в непрерывные и удовлетворяет условию Липшица по u по норме $\|\cdot\|_C$, то задача (27)-(2) имеет положительное решение в $C^1(R_+ \times R)$.

ТЕОРЕМА 18. Если 1) $\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0$; 2) $\varphi_0 := \sup \varphi(x); \psi_0 := \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) ds$ удовлетворяют условиям: существуют такие положительные числа t_0, u_0 и натуральное n , что $\varphi_0 + t_0\psi_0 + t_0^2 u_0^n \leq u_0$ и $nt_0^2 u_0^{n-1} < 1$,

$$3) (\forall x \in R) (\forall t < t_0) (\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds > 0),$$

4) оператор $K(t, x; u(\tau, \xi); \tau, \xi)$ переводит ограниченные непрерывные функции в непрерывные и для функций, определенных при $0 \leq t \leq t_0, x \in R$, удовлетворяет условиям:

$$K(t, x; u(\tau, \xi); \tau, \xi) \geq 0; |K(t, x; u(\tau, \xi); \tau, \xi)| \leq \|u\|_C^n,$$

$$|K(t, x; u_1(\tau, \xi); \tau, \xi) - K(t, x; u_2(\tau, \xi); \tau, \xi)| \leq n \max\{\|u_1\|_C^{n-1}, \|u_2\|_C^{n-1}\} \cdot \|u_1 - u_2\|_C,$$

то начальная задача (2)-(3) для операторно-интегрального уравнения

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = I(u)(t) := \int_0^1 K(t, s; u(\tau, \xi): \tau, \xi) ds, x \in \mathbf{R} \quad (28)$$

имеет положительное решение при $t < t_0$.

Рассматривается уравнение

$$u_t(t, x) = Q(u(\tau, \xi): \tau, \xi), t \in [0, 1], x \in [0, 1], \quad (29)$$

где $u \in C^{1,0}([0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n)$, $Q: C([0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^n$, с начальным условием вида (2), где n -вектор-функция $\varphi \in C([0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n)$.

Эта начальная задача эквивалентна уравнению

$$u(t, x) = \varphi(x) + tQ(u(\tau, \xi): \tau, \xi), t \in [0, 1], x \in [0, 1].$$

С обозначением $\alpha := Q(u(\tau, \xi): \tau, \xi) \in \mathbf{R}^n$, получена система нелинейных алгебраических уравнений $\alpha = Q(\varphi(\xi) + \alpha\tau: \tau, \xi)$.

ТЕОРЕМА 4.4.2. Если 1) $\varphi(x) > 0$, 2) функционал $Q(u(\tau, \xi): \tau, \xi)$ – непрерывный и возрастающий по функции u ; $Q(0) \geq (0, 0, \dots, 0)$; 3) существует такое $\alpha_0 \in \mathbf{R}^n > (0, 0, \dots, 0)$, что $Q(\varphi(\xi) + \alpha_0\tau: \tau, \xi) \leq \alpha_0$, то начальная задача (29)-(2) имеет положительное решение.

В пятой главе, как приложение теории дифференциальных уравнений с частными производными, решена задача о минимальном приращении энтропии при выпрямлении пластичного стержня в зависимости от времени.

Предполагается, что имеется пластичный изогнутый однородный стержень. В начальный момент времени он имеет заданную форму в горизонтальной плоскости, выражаемую гладкой функцией, и неподвижен, требуется привести его (параллельными сдвигами) за время T с минимальным увеличением энтропии к прямолинейной форме, также чтобы он был неподвижен.

Математическая постановка задачи: задано начальное условие (2) ($0 \leq x \leq X$), $\varphi \in C^1[0, X]$, показывающее начальную форму стержня с линейной плотностью m . Также $u_t(0, x; v) = 0$ (неподвижность стержня в начальный момент), уравнение $u_{tt}(t, x; v) = \frac{v(t, x)}{m\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}}$ ($0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X$)

и конечные условия $u_x(T, x; v) = 0$ ($0 \leq x \leq X$) (прямолинейность стержня в конечный момент), $u_t(T, x; v) = 0$ ($0 \leq x \leq X$) (неподвижность стержня в конечный момент).

Требуется минимизировать функционал, показывающий количество энергии, перешедшей в тепло, то есть выделившейся при торможении: знак функции ускорения каждой элементарной части стержня $u_{tt}(t, x)$ противоположен знаку функции скорости этой части $u_t(t, x)$:

$$I(v(t, x): t, x) :=$$

$$:= \int_0^T \int_0^X |u_t(t, x; v)| \cdot \frac{1}{2} (\operatorname{sgn} u_t(t, x; v) - \operatorname{sgn} u_{tt}(t, x; v)) \cdot |v(t, x)| dx dt.$$

Доказано, что

$$\Delta H \geq \frac{m}{2T^2\Theta} \int_0^X \sqrt{1 + (\varphi'(s))^2} \left(\varphi(s) - \frac{\int_0^X \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} \varphi(x) dx}{\int_0^X \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx} \right)^2 ds,$$

чем подтверждена гипотеза, упомянутая в Главе 1.

В Приложении приведены программы с подпрограммами на языке pascal и результаты расчетов для задачи о поиске пробной функции для доказательства существования положительного решения.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук Асану Байзаковичу Байзакову за постановку задач, постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Акерова Дж.А. Задача Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [Текст] / Дж. А. Акерова // Вестник КГНУ: Сер. 3, Естественно-технические науки. – Вып.6. Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Труды Междунар. научной конференции, 2001. - С. 283-287.

2. Акерова Д.А. Разрешимость начально-краевой задачи Коши [Текст] / Д.А. Акерова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып. 31. - Бишкек: Илим, 2002. - С.60-66.

3. Акерова Д.А. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка [Текст] / М.И.Иманалиев, Д.А. Акерова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 34. – С. 10-14.

4. Акерова Д.А. Единственность решения начальной задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения [Текст] / Д.А. Акерова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып. 41, Бишкек: Илим, 2009. – С. 25-29.

5. Акерова Д.А. Единственность решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [Текст] / Д.А. Акерова // Вестник КГНУ: Том XIII. Серия 3. Естественно-технические науки. Математика. Информатика. Кибернетика. - 2010. – Вып. 4. - С. 56-62.

6. Акерова Дж.А. Интервальные условия знакопостоянства решений интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / А.Б.Байзаков, Дж.А.Аке-

рова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып. 46. С. 27-31.

7. Акерова Дж.А. Интервальные неравенства для дифференциальных уравнений с управлением в модели возрастания энтропии в почти замкнутых системах [Текст] / П.С.Панков, Дж.А.Акерова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып. 46. – С. 82-86.

8. Акерова Дж.А. Методы доказательства знакопостоянства решений задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / Дж.А.Акерова // Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке. Материалы международной научно-практической конференции. – Алматы: КазНПУ имени Абая: изд. Ұлагат, 2015. – 676 с. – С.264-267.

9. Акерова Дж. А. О разрешимости задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Дж.А.Акерова // Математический журнал. - Алматы: Институт математики и математического моделирования МОиН РК. - 2015. Т.15. № 3 (57). - С.47-55.

10. Акерова Дж.А. Достаточные условия разрешимости начально-краевой задачи Коши [Текст] / Дж.А.Акерова // Наука, техника и образование (РФ), 1(19), 2016. - С. 34-39.

11. Акерова Дж.А. Достаточные условия разрешимости нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [Текст] / Дж.А.Акерова // Наука, техника и образование (РФ), 1(19), 2016. - С. 40-44.

12. Акерова Дж.А. Метод последовательных приближений в решении нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [Текст] / Дж.А.Акерова // Проблемы современной науки и образования (РФ), 2(44). 2016. - С. 21-25.

13. Акерова Дж.А. Интервальный метод для доказательства существования решений интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Дж.А.Акерова // Проблемы современной науки и образования (РФ), 2(44). 2016. - С. 25-29.

РЕЗЮМЕ

Акорова Джылдыс Абдрамановна

«Жеке туундулуу, сызыктуу эмес дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер жана алардын чыгарылыштарынын өзгөчөлүктөрү» темасы боюнча, 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу деген адистик боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн диссертация сунушталган

Урунттуу сөздөр: Жеке туундулуу дифференциалдык теңдеме, жеке туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме, сызыктуу эмес теңдеме, баштапкы маселе, оң чыгарылыш.

Изилдөөнүн объектиси: Жеке туундулуу, сызыктуу эмес дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер.

Иштин максаты: Жеке туундулуу, сызыктуу эмес дифференциалдык, интегро-дифференциалдык жана оператор-дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы маселелердин чыгарылыштарынын жашоосу жана мааниси оң болгондугунун жетишүү шарттарын чыгаруунун усулдугун иштеп чыгаруу. Аны колдонуп, мындай маселелер боюнча конкреттүү натыйжаларды алуу.

Изилдөөнүн усулдугу: Сызыктуу эмес оператор-дифференциалдык теңдемелердин теориясынын усулдары, чыгарылыштарды өзгөртүү усулу, кошумча аргумент усулу, алгебралык теңдемелердин теориясынын усулдары, болжол менен эсептөөнүн усулдары, интегралдык теңдемелердин теориясынын усулдары, турактуу чекит принциптери колдонулат.

Илимий жаңылыктар: Сызыктуу эмес, жеке туундулуу оператор-дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы маселелердин чыгарылыштарынын жашоосу жана мааниси оң болгондугунун жетишүү шарттарын чыгаруунун усулдугун иштеп чыгарылган. Интегралдык-дифференциалдык оператору болгон, иштеп чыгарылган усулдукту колдонууга ыңгайлуу теңдемелердин жаңы классы табылган.

Бир канча сызыктуу эмес, жеке туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер жана алардын системалары үчүн октогу баштапкы маселелердин чыгарылыштарынын жашоосу жана мааниси оң болгон-дугунун жетишүү шарттары табылган. Башкаруусу бар жеке туундулуу дифференциалдык теңдеме менен баяндап жазылган, эпке келгич таякты тез түзөтүү маселесинде энтропиянын өсүүсүнүн төмөндөн так баасы табылган.

РЕЗЮМЕ

Акерова Джылдыс Абдрамановна

диссертация «Нелинейные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных и особенности их решений» представлена на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, нелинейное уравнение, начальная задача, положительное решение.

Объект исследования: Нелинейные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных.

Цель работы: разработать методику получения достаточных условий существования и положительности решений начальных задач для нелинейных дифференциальных, интегро-дифференциальных и операторно-дифференциальных уравнений в частных производных, с ее помощью получить конкретные результаты по таким задачам.

Методика исследования: Используются методы теории нелинейных операторно-дифференциальных уравнений, метод преобразования решений, метод дополнительного аргумента, методы теории алгебраических уравнений, методы приближенных вычислений, методы теории интегральных уравнений, принципы неподвижной точки.

Научная новизна: Разработана единообразная методика получения достаточных условий существования и положительности решений начальных задач для нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, выявлен новый класс уравнений – с операторами интегрально-дифференциального типа, к которым может быть приложена разработанная методика.

Найдены достаточные условия существования и положительности решений начальных задач на оси для ряда нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных и их систем. Найдена точная оценка снизу для возрастания энтропии в задаче о быстром выпрямлении пластичного стержня, описываемой дифференциальным уравнением в частных производных с управлением.

SUMMARY

Akerova Dzhyldys Abdramanovna

Dissertation “Non-linear partial differential and integro-differential equations and peculiarities of their solutions” submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: partial differential equation, partial integro-differential equation, non-linear equation, initial value problem, positive solution.

Object of research: non-linear partial differential and integro-differential equations.

Aim of research: To develop a methodic of obtaining sufficient conditions for existing and positivity of solutions of initial value problems for nonlinear partial differential, integro-differential and operator-differential equations and to obtain concrete results on such tasks.

Methods of research: Applying of methods of theory of nonlinear operator-differential equations, method of transforming solutions, method of additional argument, methods of theory of algebraic equations, approximate calculations methods, methods of theory of integral equations and fixed point principles.

Scientific novelty: A unified methodic of obtaining sufficient conditions for existing and positivity of solutions of initial value problems for non-linear partial differential and integro-differential equations is developed; there is found a new class of equations to apply the developed methodic, i.e. ones with operators of integral-differential type.

Sufficient conditions for existing and positivity of solutions of initial value problems for some non-linear partial differential and integro-differential equations and systems are found. The exact estimation from below for increment of entropy in the problem of fast straightening of plastic rod described by partial differential equation with control is obtained.