НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. Ж.БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.17.560

На правах рукописи

УДК 517.968.72+74

ХАЛИЛОВА ГУЛЖАН ТАШПОЛОТОВНА

ОЦЕНКИ СНИЗУ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы

и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2018

Работа выполнена в лаборатории теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики НАН Кыргызской Республики.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Искандаров С.**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Дауылбаев М.К.,**
	доктор физико-математических наук, профессор **Асанов А.**
Ведущая организация:	Ошский государственный университет Адрес: 723500, г. Ош, ул. Ленина331

Защита диссертации состоится «06» марта 2018 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.17.560 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ им. Ж.Баласагына, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а и на сайте: www.math.aknet.kg Института математики НАН КР.

Автореферат опубликован «___ » ____________ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета, д.ф.-м.н., профессор Байзаков А.Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации.

Как известно, интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ) типа Вольтерра (ИДУТВ), как математическая модель, описывают многие процессы с учетом явления последействия. В связи с этим развита современная общая и качественная теория таких уравнений в трудах известных ученых, как В. Вольтерра, Я.В. Быков, М.И. Иманалиев, Ю.А. Ведь, А.И. Боташев, Р. Беллман, К.Л. Кук, J.J.Levin, J.A. Nohel, C. Corduneanu, А.Д. Мышкис, Н.Н. Красовский, Е.А. Барбашин, А.М. Самойленко, В.Р. Винокуров, К. Какишов, К. Алымкулов, П.С. Панков, А. Саадабаев, Г. Ражапов, З. Пахыров, А. Асанов, А.Б. Байзаков, К.А. Касымов, М.К. Дауылбаев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов, Дж. Хейль, Б.С. Разумихина, А.А. Мартынюк, В. Лакшимикантам, С. Лила, Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина, М.Е. Драхлин, Ю.И. Домшлак, Л.М. Березанский, А.И. Домошницкий, П.М. Симонов, T.A. Burton, R.P. Agarwal, E. Braverman, G. Gripenberg, S.- O. Londen, O. Staffans и др., в них разработаны новые методы и созданы новые направления научных исследований.

Н.В. Азбелев и З.Б. Цалюк (1964) отметили: «Центральным пунктом аналитических методов исследования вопросов качественной теории уравнений является проблема оценки решения уравнения. В решении этой проблемы основную роль играют теоремы типа теорем об интегральных и дифференциальных неравенствах».

Литературный анализ показывает, что мало исследованной является проблема оценки снизу решений ИДУТВ на полуоси и решение этой проблемы связано:
I) с неустойчивостью решений (в смысле Ляпунова или смысле Лагранжа); II) с неосцилляцией решений; III) с отсутствием особенных точек в смысле Я.В. Быкова (1957).

Исследования по каждому из этих направлений I), II), III) также являются актуальными.

Настоящая диссертационная работа посвящена проблеме оценок снизу решений линейных и слабо нелинейных ИДУТВ первого, второго, третьего и четвертого порядков на полуоси и изучению связи полученных результатов с направлениями исследований I), II), III).

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами.

Работа выполнена в рамках проектов НИР Института теоретической и прикладной математики НАН КР: «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем» (2011 - 2013), номер гос. регистрации № 0006227; «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач и в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений» (2012-2014), номер гос. регистрации № 0005756; «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, топологических и аналитических методов в теории устойчивости динамических систем, разрешимости обратных задач, экономических и геофизических процессов» (2015-2017), номер гос. регистрации № 0007125 и ее результаты включены в отчеты по этим проектам.

Цель и задачи исследования.

Применением и развитием качественных методов, разработанных в ИМ НАН КР, получить достаточные условия для оценки снизу (везде ниже понимается: на полуоси $J=[t_0,\infty)$) и стремления к бесконечности (везде ниже понимается: при $t\to\infty$) решений ИДУТВ первого, второго, третьего и четвертого порядков. Выявить влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность решений соответствующих дифференциальных уравнений (ДУ). Изучить связь полученных результатов с направлениями исследований I), II), III).

Методика исследования.

Применяются метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод Коши-Лагранжа интегрального представления решений линейного неоднородного ДУ первого порядка, метод сведения неявного ИДУ первого порядка к явному ИДУ с нагрузкой, метод весовых и срезывающих функций, метод частичного срезывания, нестандартные методы сведения к системе, методы интегральных и дифференциальных неравенств для оценки снизу решений, метод оценки снизу решений и их производных в интегральных представлениях, разработанные в Институте математики НАН Кыргызской Республики.

Научная новизна работы.

Установлены достаточные условия для оценки снизу и стремления к бесконечности нетривиальных решений: линейного однородного неявного ИДУТВ первого порядка; линейного однородного ИДУТВ в случае выполнения условия «монотонности» для решений этого ИДУТВ; линейного неоднородного ИДУТВ первого порядка; линейного ИДУТВ первого порядка с функционалом; линейного неоднородного ИДУТВ второго порядка; линейного и слабо нелинейного ИДУТВ второго порядка; линейного и слабо нелинейного ИДУТВ третьего порядка; линейного ИДУТВ четвертого порядка, вместе с производными до третьего порядка. При этом выявлено влияние интегрального члена на ограниченность решений соответствующих линейных однородных и неоднородных ДУ первого порядка, в том числе с нулевым коэффициентом искомой функции, а также - решений функционально-ДУ.

В разделах 2.3-2.6 и в главе 3 показано, что все изучаемые асимптотические свойства решений рассматриваемых уравнений справедливы для начальных данных Коши из определенного многообразия начальных данных.

Всюду изучена связь оценки снизу и стремления к бесконечности решений с неустойчивостью по Ляпунову, с неосцилляцией решений и отсутствием особенных точек в смысле Я.В.Быкова (1957) в теории разрешимости задачи Коши в любой заданной точке полуоси.

Исследуемые задачи - новые и для соответствующих линейных и слабо нелинейных ДУ третьего и четвертого порядка.

Теоретическая и практическая ценность.

Настоящая работа носит теоретический характер и ее результаты могут найти применение в асимптотической теории решений ИДУТВ; при качественном исследовании некоторых процессов из аэро и космодинамики, биологии, медицины, экологии и др.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

Установление достаточных условий для оценки снизу и стремления к бесконечности нетривиальных решений и их производных для уравнений высших порядков:

- линейного однородного неявного ИДУТВ первого порядка в случае, когда любое решение соответствующего однородного ДУ первого порядка может быть ограниченным, а также в критическом случае (с нулевым коэффициентам искомой функции);
- линейного однородного ИДУТВ в случае выполнения условия «монотонности» для решений этого ИДУТВ;
- линейного неоднородного ИДУТВ первого порядка, при этом выявляется влияние интегрального члена на ограниченность решений простейшего линейного неоднородного ДУ с нулевым коэффициентом искомой функции;
- линейного ИДУТВ первого порядка с функционалом с выявлением влияния интегрального члена на ограниченность решений простейшего линейного неоднородного ДУ с нулевым коэффициентом искомой функции и решений ФДУ;
- линейного неоднородного ИДУТВ второго порядка;
- слабо нелинейного ИДУТВ второго порядка;
- линейного и слабо нелинейного ИДУТВ третьего порядка;
- линейного ИДУТВ четвертого порядка.

Личный вклад соискателя.

Цели и задачи исследования диссертационной работы определены научным руководителем С. Искандаровым. В диссертацию включены материалы, которые принадлежат автору.

Апробация результатов диссертации.

Результаты настоящей работы доложены и обсуждены на:

- IV международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (13-16 сентября 2011, г. Бишкек - с. Бозтери, Иссык-Кульская обл.), посв. 80-летию академика М.И.Иманалиева;
- V Конгрессе математиков Тюркского мира (5-7 июня 2014, с. Булан-Соготту, Иссык-Кульская обл.);
- научной конференции проф. –препод. состава кафедры «Высшая математика», посв. «Неделе науки-2015 в КРСУ» (г. Бишкек, 22 апр. 2015);
- Иссык-Кульском Международном форуме математиков (24-27 июня 2015, с. Бозтери, Иссык-Кульская обл.);

- симпозиуме «Дифференциальные уравнения», посв. столетию Пермского государственного Национального исследовательского университета (РФ, г. Пермь, 18 мая 2016);
- V Международной научной конференции "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике", посв. 85-летию академика М.И. Иманалиева (г. Бишкек, 13 сент. 2016).

Публикации по теме диссертации.

Основное содержание диссертации опубликовано в 12 статьях [1-12], приведенных в конце автореферата. В совместных статьях [1-4, 6, 8-12] постановка задачи и обсуждение результатов принадлежат научному руководителю С. Искандарову, доказательство теорем, следствий и построение иллюстративных примеров - автору.

Структура и объем диссертации:

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, содержащих 16 разделов, выводов и списка использованной литературы из 90 наименований, 108 стр. компьютерного текста.

В настоящей работе рассматриваются обыкновенные ДУ и ИДУТВ.

В диссертации принята тройная сквозная нумерация внутри каждого раздела главы. Например, теорема 2.2.1 означает первую теорему раздела 2 главы 2; (3.1.4) - четвертая формула раздела 1 главы 3. Такая нумерация сохранена и в автореферате.

Краткое содержание диссертации:

В главе 1, состоящей из четырех разделов, дается обзор близким работам других авторов по оценкам снизу, неосцилляции и неустойчивости решений ИДУТВ , приводятся леммы о некоторых интегральных преобразованиях и леммы об интегральных и дифференциальном неравенствах, и заключение.

Глава 2, состоящая из восьми разделов, посвящена проблеме оценок снизу решений линейных и слабо нелинейных ИДУТВ первого и второго порядков с любыми начальными данными Коши и изучению связи полученных результатов с направлениями исследований I), II), III).

В разделе 2.1 установлены достаточные условия типа немалости членов наличия оценки снизу и стремления к бесконечности любого ненулевого решения линейного однородного неявного ИДУТВ первого порядка вида

$$x'(t)+a(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)]d\tau=0,\quad t=t_0 \tag{2.1.1}$$

в случае, когда любое решение соответствующего однородного ДУ первого порядка

$$x'(t)+a(t)x(t)=0,\quad t\geq t_0 \tag{2.1.1$_0$}$$

может быть ограничено, а также в случае:

$$a(t)\equiv 0. \tag{a}$$

Приведем основные результаты этого раздела.

Введем обозначения: $b(t)\equiv a(t)+Q_1(t,t),\ K(t,\tau)\equiv Q_0(t,\tau)-Q_1'(t,\tau)$.

Следуя С. Искандарову (2002), предположим, что $0<\varphi(t)$ - некоторая весовая функция,

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau), \qquad (K)$$

$\psi_i(t)\,(i=1...n)$- некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau)\equiv\varphi(t)K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1} \quad (i=1..n);$$

$$\Delta(t)\equiv 2b(t)\varphi(t)-\varphi'(t),$$

$$\Delta(t)=\Delta_1(t)+\Delta_2(t), \quad \Delta_1(t)<0, \qquad \Delta_2(t)\le 0. \qquad (\Delta)$$

ТЕОРЕМА 2.1.1. Пусть 1) $\varphi(t)>0,$ выпоняются условия *(K)*, (Δ);

2) $R_i(t,t_0)\le 0,\ R'_{it}(t,t_0)\ge 0,\ R'_{i\tau}(t,\tau)\le 0,\ R''_{it\tau}(t,\tau)\ge 0 \quad (i=1...n);$

$$3)\int_{t_0}^{\infty}\left(\varphi(s)Q_1(s,t_0)\right)^2\left|\Delta_1(s)\right|^{-1}ds<\varphi(t_0). \qquad (Q_1)$$

Тогда для любого решения ИДУТВ (2.1.1) выполняется соотношение (оценка снизу)

$$|x(t)|\ge\sqrt{C_*}(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}\exp\left(2\int_{t_0}^{t}|\Delta_2(s)|(\varphi(s))^{-1}ds\right), \qquad (2.1.7)$$

где $C_*=\left[\varphi(t_0)-\int_{t_0}^{\infty}(\varphi(s)Q_1(s,t_0))^2|\Delta_1(s)|^{-1}ds\right](x(t_0))^2<\infty$

СЛЕДСТВИЕ 2.1.1. Если выполняются все условия теоремы 2.1.1 и

$$\lim_{t\to\infty}\left[(\varphi(t))^{-1}\exp\left(\int_{t_0}^{t}|\Delta_2(s)|(\varphi(s))^{-1}ds\right)\right]=\infty, \qquad (\Delta_2)$$

то любое ненулевое решение ИДУТВ (2.1.1) стремится к бесконечности.

СЛЕДСТВИЕ 2.1.2. Если

1) выполняется условие

$$b(t)=b_1(t)+b_2(t),\ b_1(t)<0,\ b_2(t)\le 0; \qquad (b)$$

2) $K(t,t_0)\le 0,\ K'_t(t,t_0)\ge 0,\ K'_\tau(t,\tau)\le 0,\ K''_{t\tau}(t,\tau)\ge 0;$

$$3)\ q=\int_{t_0}^{\infty}\left(Q_1(s,t_0)\right)^2\left|b_1(s)\right|^{-1}ds<1, \qquad (q)$$

то для любого решения ИДУТВ (2.1.1) справедлива оценка снизу:

$$|x(t)|\ge\sqrt{q}|x(t_0)|\exp\left(\int_{t_0}^{t}|b_2(s)|ds\right). \qquad (2.1.9)$$

Если, кроме того, выполняется условие

$$\int_{t_0}^{\infty}|b_2(s)|ds=\infty, \qquad (b_2)$$

то любое ненулевое решение ИДУТВ (2.1.1) стремится к бесконечности.

Это предложение вытекает из теоремы 2.1.1 при $\varphi(t)\equiv 1,$

$\Delta(t) \equiv b(t) = b_1(t) + b_2(t_0)$, $\Delta_1(t) \equiv b_1(t)$, $\Delta_2(t) \equiv b_2(t)$, $n = 1$, $K_1(t,\tau) \equiv K(t,\tau)$, $\psi_1(t) \equiv 1$ и является коэффициентным признаком решения выше сформулированной задачи.

ПРИМЕР 2.1.1. Для ИДУ

$$x'(t) - \exp(5t)x(t) + \int_0^t \left\{ \left[\frac{\exp(\tau)}{2\sqrt{\exp(2t) + \exp(t) - \exp(\tau)}} - \frac{102\exp(t+\tau)\sin t \sin\tau}{(t+1)(t-\tau+1)} \right] x(\tau) - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\exp(2t) + \exp(t) - \exp(\tau)}\, x'(\tau) \right\} d\tau = 0, \quad t \ge 0$$

выполняются все условия теоремы 2.1.1 при $\varphi(t) \equiv t+1$,
$n = 1, \psi_1 \equiv \exp(t)\sin t$, здесь $t_0 = 0, b(t) \equiv -\exp(5t) - \exp(t)$,

$K(t,\tau) \equiv -\dfrac{102\exp(t+\tau)\sin t \sin\tau}{(t+1)(t-\tau+1)}$, $R_1(t,\tau) \equiv -\dfrac{102}{t-\tau+1}$, $\Delta(t) \equiv -2(t+1)[\exp(5t) + \exp(t)] - 1$,

$\Delta_1(t) \equiv -2(t+1)\exp(5t)$, $\Delta_2(t) \equiv -2(t+1)\exp(t) - 1$, $\varphi(0) = 1$,

$$\int_0^\infty (\varphi(s)Q_1(s,t_0))^2 |\Delta_1(s)|^{-1} ds = \int_0^\infty \frac{(s+1)(\exp(2s) + \exp(s) - 1)}{2\exp(5s)} ds = \frac{1861}{7200} < 1.$$

Значит, для любого решения данного ИДУТВ выполняется оценка снизу:

$$|x(t)| \ge \frac{\sqrt{5339}}{60\sqrt{2}} |x(0)| \exp(2\exp(t) - 2). \qquad (2.1.7_*)$$

ПРИМЕР 2.1.2. ИДУ

$$x'(t) + (t-1) + x(t) - \int_0^t \left\{ \left[\frac{t+1}{(t-\tau+1)^2} + \frac{25\cos 4t \cos 4\tau}{t-\tau+1} \right] x(t) + \frac{\tau x'(\tau)}{t-\tau+1} \right\} d\tau = 0, \, t \ge 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1.1 и следствия 2.1.2 при
$\varphi(t) \equiv 1, n = 1, \psi_1(t) \equiv \cos 4t$, здесь $t_0 = 0, b(t) \equiv -1, \Delta_2(t) = -1$,

$K(t,\tau) \equiv -\dfrac{50\cos 4t \cos 4\tau}{t-\tau+1}$, $R_1(t,\tau) \equiv -\dfrac{50}{t-\tau+1}$, $Q_1(t,\,0)=0$ (условие (Q_1) выполняется), $c_* = (x(0))^2$. Значит, для любого решения этого ИДУ выполняется оценка снизу: $|x(t)| \ge |x(0)|\exp(t)$, из которой следует стремление решения к бесконечности для $\forall x(0) \ne 0$. Однако, отметим, что все решения $x(t) = c\exp\left(t - \dfrac{t^2}{2}\right)$ $(c - \forall const)$ ДУ $x'(t) + (t-1)x(t) = 0, t \ge 0$ ограничены.

ПРИМЕР 2.1.3. Для ИДУ

$$x'(t) - \int_0^t \left\{ \left[\frac{t+1}{(t-\tau+1)^2} + \frac{25\cos 4t \cos 4\tau}{t-\tau+1} \right] x(t) + \frac{\tau x'(\tau)}{t-\tau+1} \right\} d\tau = 0, \quad t \ge 0$$

выполняются все условия теоремы 2.1.1 и следсвия 2.1.2, здесь $a(t) \equiv 0$ (выполняется условие (a)), все остальные функции такие же, как в примере 2.1.2, $\Delta(t) \equiv -t \equiv \Delta_2(t)$. Значит, все ненулевые решения приведенного ИДУ стремятся к бесконечности. Однако, все решения $x(t) = c$ $(c - \forall const)$, соответствующего простейшего ДУ $x'(t) = 0$ ограничены и не стремятся к бесконечности.

В разделе 2.2 установлены достаточные условия для оценки снизу и стремления к бесконечности ненулевых решений линейного однородного ИДУТВ :

$$x'(t)+a(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x(\tau)d\tau=0,\quad t\geq t_0 \qquad (2.2.1)$$

с требованием «монотонности» решений этого ИДУТВ , аналогично свойству «монотонности» из монографии Б.С. Разумихина (1988).

В разделе 2.3 установлены достаточные условия оценки снизу и стремления к бесконечности решений линейного неоднородного ИДУТВ первого порядка вида

$$x'(t)+a(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t),\quad t\geq t_0 \qquad (2.3.1)$$

с выявлением влияния интегрального члена на ограниченность решений простейшего линейного ДУ:

$$x'(t)=f(t),\quad t\geq t_0, \qquad (2.3.1_0)$$

т.е. показывается, что решения ИДУТВ

$$x'(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t),\quad t\geq t_0$$

из определенного начального многообразия начальных данных стремятся к бесконечности в случае, когда может быть выполнено условие:

$$\int_{t_0}^{\infty}|f(t)|dt<\infty. \qquad (f_*)$$

В разделе 2.4 установлены достаточные условия для оценки снизу и стремления к бесконечности решений линейного неоднородного ИДУТВ с функционалом первого порядка :

$$x'(t)+a(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t)+F(t;x),\quad t\geq t_0 \qquad (2.4.1)$$

в случае, когда выполняется условие

$$xF(t;x)\geq 0 \qquad (\mathrm{F})$$

при этом выявляется влияние интегрального члена на ограниченность решений простейшего линейного ДУ:

$$x'(t)=f(t),\quad t\geq t_0 \qquad (2.4.1_1)$$

и на ограниченность решений ФДУ

$$x'(t)=F(t;x),\quad t\geq t_0, \qquad (2.4.1_2)$$

т.е. сформулированная задача решается в случаях, когда все решения ДУ $(2.4.1_1)$ и ФДУ $(2.4.1_1)$ могут быть ограниченными.

В разделе 2.5 установлены достаточные условия для оценки снизу и стремления к бесконечности первых производных решений линейного неоднородного ИДУТВ второго порядка

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x'(\tau)d\tau=f(t),\quad t\geq t_0 \qquad (2.5.1)$$

Раздел 2.6 посвящен установлению достаточных условий оценки снизу и стремления к бесконечности решений ИДУТВ второго порядка вида:

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)]d\tau = f(t), \quad t\ge t_0 \tag{2.6.1}$$

В разделе 2.7 установлены достаточные условия оценки снизу и стремления к бесконечности решений ИДУТВ второго порядка вида:

$$x''(t)+a_1(t)\,x'(t)+a_0(t)\,x(t)+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)]\,d\tau =$$

$$= f(t)+F\left(t,\, x(t),\, x'(t), \int_{t_0}^{t} H\left(t,\tau,x(\tau),x'(\tau)\right)d\tau\right), \quad t\ge t_0, \tag{2.7.1}$$

где функции *F(t,x,y,z), H(t,τ,x,y)* удовлетворяют условию слабой нелинейности:

$$|\mathrm{F}(\mathrm{t,x,\,y,z})| \le g_0(t)\,|x|+g_1(t)\,|y|+g_2(t)\,|z|, \quad |\mathrm{H}(\mathrm{t},\tau,\mathrm{x,\,y})| \le h_0(t,\tau)\,|x|+h_1(t,\tau)\,|y|, \qquad (F,H)$$

с неотрицательными $g_0(t), g_1(t), g_2(t), h_0(t,\tau), h_1(t,\tau)$.

В разделе 2.8 проведен анализ результатам главы 2.

В главе 3, состоящей из четырех разделов, исследованы оценки снизу решений линейных и слабо нелинейных ИДУТВ третьего и четвертого порядков с любыми начальными данными Коши и изучена связь полученных результатов с направлениями исследований I), II), III).

В разделе 3.1 установлены достаточные условия наличия оценки снизу и стремления к бесконечности решений линейного ИДУТВ третьего порядка вида:

$$x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)]\,d\tau = f(t), \ \ t\ge t_0\ . \tag{3.1.1}$$

В разделе 3.2 установлены достаточные условия для оценки снизу и стремления к бесконечности решений ИДУТВ вида:

$$x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)]\,d\tau = f(t)+$$

$$+F\left(t,\, x(t),\, x'(t),\, x''(t), \int_{t_0}^{t} H(t,\tau,x(\tau),x'(\tau),x''(\tau))d\tau\right), \quad t\ge t_0, \tag{3.2.1}$$

где *F(t,x,y,z,u), H(t,τ,x,y,z)* удовлетворяют условию «слабой нелинейности»:

$$|\mathrm{F}(\mathrm{t,x,\,y,z,u})| \le g_0(t)|x|+g_1(t)|y|+g_2(t)|z|+g_3(t)|u|,$$

$$|\mathrm{H}(\mathrm{t},\tau,\mathrm{x,y,z})| \le h_0(t,\tau)|x|+h_1(t,\tau)|y|+h_2(t,\tau)|z| \qquad (\mathrm{N})$$

с неотрицательными функциями $g_k(t), h_r(t,\tau)$ $(k=0,1,2,3;\ r=0,1,2)$.

В разделе 3.3 установлены достаточные условия, обеспечивающие оценки снизу и стремления к бесконечности решений и их производных до третьего порядка включительно линейного ИДУТВ четвертого порядка вида:

$$x^4(t)+a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)\right]d\tau=f(t),\ \ t\ge t_0 \qquad (3.3.1)$$

Раздел 3.4 посвящен анализу результатов главы 3.

Следуя С. Искандарову (2006), в ИДУТВ (3.1.1) сделаем следующую замену:

$$x'(t)=\delta x(t)+W(t)y(t), \qquad (3.1.2)$$

где $0<\delta$ - некоторый вспомогательный параметр, $0<W(t)$ - некоторая весовая функция, $y(t)$ - новая неизвестная функция. Тогда ИДУТВ (3.1.1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x'(t)=\delta x(t)+W(t)y(t), \\ y''(t)+b_2(t)y'(t)+b_1(t)y(t)+b_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\left[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)y(\tau)+K(t,\tau)y'(\tau)\right]d\tau=F(t), \end{cases}$$

(3.1.6)

где $b_2(t)\equiv a_2(t)+\delta+2W'(t)(W(t))^{-1}$, $b_1(t)\equiv a_1(t)+a_2(t)W_1(t)(W(t))^{-1}+\delta^2+W_1'(t)(W(t))^{-1}$, $b_0(t)\equiv\left[a_0(t)+\delta a_1(t)+\delta^2 a_2(t)+\delta^3\right](W(t))^{-1}$, $P_0(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}\left[Q_0(t,\tau)+\delta Q_1(t,\tau)+\delta^2 Q_2(t,\tau)\right]$, $P_1(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}\left[Q_1(t,\tau)W(\tau)+Q_2(t,\tau)W_1(\tau)\right]$, $W_1(t)\equiv W'(t)+\delta W(t)$, $K(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}Q_2(t,\tau)W(\tau)$, $F(t)\equiv f(t)(W(t))^{-1}$.

Сначала проведем оценку сверху любого решения системы (3.1.6).

Следуя С. Искандарову (2002), введем условия и обозначения:

$$K(t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau), \qquad (K)$$

$$F(t)=\sum_{i=0}^{n}F_i(t), \qquad (F)$$

$\psi_i(t)$ $(i=1..n)$- некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1},\ \ E_i(t)\equiv F_i(t)(\psi_i(t))^{-1}\ (i=1...n),$$
$$R_i(t,t_0)\equiv A_i(t)+B_i(t)\quad (i=1...n),. \qquad (R)$$

$c_i(t)$ $(i=1..n)$- некоторые функции

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть 1) $\delta>0$, $W(t)>0$, выполняются условия (*K*), (*F*), (*R*); 2) $b_2(t)\ge 0$; 3) $b_1(t)>0$, существует функция $b_1^*(t)\ge 0$ такая, что $b_1'(t)\le b_1^*(t)b_1(t)$; 4) $A_i(t)\ge 0,\ B_i(t)\ge 0,\ B_i'(t)\le 0,\ R_{i\tau}'(t,\tau)\ge 0$, существуют функции $A_i^*(t)\ge 0,\ c_i(t),\ R_i^*(t)\ge 0$ такие, что $A_i'(t)\le A_i^*(t)A_i(t)$, $\left(E_i^{(k)}(t)\right)^2\le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$, $R_{it\tau}''(t,\tau)\le R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)\ (i=1...n;\ k=0,1)$. Тогда для любого решения ($x(t)$, $y(t)$) системы (3.1.6) соблюдаются следующие оценки:

$$(x(t))^2+(y'(t))^2+2\int_{t_0}^{t}b_2(s)(y'(s))^2ds+b_1(t)(y(t))^2+\sum_{i=1}^{n}A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2\le$$

$$\le \left\{ \sqrt{c_*} + \int_{t_0}^{t} |F_0(s)| \exp\left(-\delta s + \delta t_0 - \int_{t_0}^{s} G_1(\tau)\, d\tau \right) ds \right\}^2 \exp\left(2\delta t - 2\delta t_0 + 2\int_{t_0}^{t} G_1(s)\, ds \right), \qquad (3.1.8)$$

$$|y(t)| \le (b_1(t))^{-1/2} \left[\sqrt{c_*} + \int_{t_0}^{t} |F_0(s)| \exp\left(-\delta s + \delta t_0 - \int_{t_0}^{s} G_1(\tau)\, d\tau \right) ds \right] \exp\left(\delta t - \delta t_0 + \int_{t_0}^{t} G_1(s)\, ds \right), \qquad (3.1.9)$$

где $G_1(t) \equiv W(t)(b_1(t))^{-1/2} + \frac{1}{2} b_1^*(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[A_i^*(t) + R_i^*(t) \right] + |b_0(t)| +$

$+ \int_{t_0}^{t} \left[|P_0(t,\tau)| + |P_1(t,\tau)| (b_1(\tau))^{-1/2} + |K_0(t,\tau)| \right] d\tau$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.1. Из (3.1.8) вытекает такая же оценка, как правой части (3.1.8), и отдельно для каждого следующего слагаемого левой части (3.1.8):

$(x(t))^2, (y'(t))^2, \int_{t_0}^{t} b_2(s)(y'(s))^2 ds,\ A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 \le \sum_{i=1}^{n} A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 \quad (i = 1...n)$.

Из ДУ (3.1.2) методом Коши-Лагранжа получаем следующее интегральное представление:

$$x(t) = \exp(\delta(t - t_0)) \left[x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(-\delta(s - t_0)) W(s) y(s)\, ds \right]. \qquad (3.1.10)$$

Из (3.1.10) аналогично методу Ю.А. Ведь (1965) имеем оценку снизу:

$$|x(t)| \ge \exp(\delta(t - t_0)) \left[|x(t_0)| - \int_{t_0}^{t} \exp(-\delta(s - t_0)) W(s) |y(s)|\, ds \right]. \qquad (3.1.11)$$

С учетом оценки (3.1.9) из (3.1.11) получаем оценку:

$$|x(t)| \ge \exp(\delta(t - t_0)) \Big[|x(t_0)| - \int_{t_0}^{t} W(s) \exp\left(\int_{t_0}^{s} G_1(\tau)\, d\tau \right) \Big\{ \sqrt{c_*} +$$

$$+ \int_{t_0}^{s} |F_0(\tau)| \exp\left(-\delta\tau + \delta t_0 - \int_{t_0}^{\tau} G_1(\eta)\, d\eta \right) d\tau \Big\} ds \Big]. \qquad (3.1.12)$$

ТЕОРЕМА 3.1.2. Пусть 1) выполняются все условия теоремы 3.1.1;
2) $M(x(t_0), x'(t_0), x''(t_0)) \equiv |x(t_0)| -$

$$- \int_{t_0}^{\infty} W(s) \exp\left(\int_{t_0}^{s} G_1(\tau) d\tau \right) \left\{ \sqrt{c_*} + \int_{t_0}^{s} |F_0(\tau)| \exp\left(-\delta\tau + \delta t_0 - \int_{t_0}^{\tau} G_1(\eta) d\eta \right) d\tau \right\} ds > 0\,. \qquad (3.1.13)$$

Тогда для любого решения ИДУТВ (3.1.1) с начальными данными из многообразия (3.1.13) верна следующая оценка снизу:

$$|x(t)| \ge M(x(t_0), x'(t_0), x''(t_0)) \exp(\delta(t - t_0)). \qquad (3.1.14)$$

Утверждение теоремы 3.1.2 следует из оценки (3.1.12).

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. Если выполняются все условия теоремы 3.1.2, то для любое решение ИДУТВ (3.1.1) с начальными данными из многообразия (3.1.13) стремятся к бесконечности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.2. С учетом соотношений:

$$c_* = \left(x(t_0)\right)^2 + \left(y'(t_0)\right)^2 + b_1(t_0)\left(y(t_0)\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_0), \quad x'(t_0) = \delta x(t_0) + W(t_0) y(t_0),$$

$$x''(t_0) = \delta^2 x(t_0) + \left[W'(t_0) + \delta W(t_0)\right] y(t_0) + W(t_0) y'(t_0)$$

определяется многообразие начальных данных (3.1.13), т.е. $M\left(x(t_0), x'(t_0), x''(t_0)\right) > 0$.

Таким образом, доказано, что любое решение ИДУТВ (3.1.1) с начальными данными из многообразия (3.1.13) стремится к бесконечности, т.е. неустойчиво по Ляпунову. Заметим, что такие решения ИДУТВ (3.1.1) не имеют нулей на полуинтервале J, т.е. не осциллируют. Отметим также, что ИДУТВ (3.1.1) с начальными данными из многообразия (3.1.13) не имеют особенных точек в смысле Я.В. Быкова (1957).

ПРИМЕР 3.1.1. Для ИДУ третьего порядка

$$x'''(t) + \left[10 + \exp\left(t(\sin t)^{1/5}\right)\right] x''(t) + \left[-100 + \frac{1}{t+1}\right] x'(t) - \left[1000 + \frac{10}{t+1} + \exp(-19t) + 100 \exp\left(t(\sin t)^{1/5}\right)\right] *$$

$$* x(t) + \int_0^t \left\{ -\left[10 Q_1(t,\tau) + 100 Q_2(t,\tau) + \frac{\exp(-10t)}{(t+\tau+4)^4}\right] x(\tau) + Q_1(t,\tau) x'(\tau) + Q_2(t,\tau) x''(\tau) \right\} d\tau =$$

$$= -\frac{1}{t+27} \exp(-10t + t^2 (\sin 2t)^{1/3}) + \frac{\exp(-10t)}{(t+22)^2}, \quad t \ge 0,$$

где $Q_1(t,\tau) \equiv \dfrac{\exp(-10t + 10\tau)}{(t+\tau+3)^5 \sqrt{\tau+1}}, Q_2(t,\tau) \equiv \exp(-10t+10\tau) \times$

$$Q_2(t,\tau) \equiv \exp(-10t+10\tau) \left\{ \left[\exp\left(\sin \ln(t+1)\right) + \frac{1}{t-\tau+20}\right] \exp\left(t^2 (\sin 2t)^{1/3} + \tau^2 (\sin 2\tau)^{1/3}\right) - \frac{1}{(t+\tau+10)^3} \right\},$$

выполняются все условия теоремы 3.1.2 и следствия 3.1.1 при

$\mathrm{W(t)} \equiv \exp(\mathrm{-10t})$, здесь $t_0=0$, $b_2(t) \equiv \exp\left(t(\sin t)^{1/5}\right), b_1(t) \equiv \dfrac{1}{t+1}, \; b_1^*(t) \equiv 0,$

$$b_0(t) \equiv -\exp(-9t), \quad n = 1, \; \psi_1(t) \equiv \exp\left(t^2 (\sin 2t)^{1/3}\right), \; R_1(t,\tau) \equiv \exp\left(\sin \ln(t+1)\right) + \frac{1}{t-\tau+20},$$

$$K_0(t,\tau) \equiv -\frac{1}{(t+\tau+20)^3}, \; f_1(t) \equiv -\frac{\exp\left(-10t + t^2 (\sin 2t)^{1/3}\right)}{t+27}, \quad F_0(t) \equiv \frac{1}{(t+22)^2},$$

$$A_1(t) \equiv \exp\left(\sin \ln(t+1)\right), \quad A_1^*(t) \equiv \frac{1}{t+1}, R_1^*(t) \equiv 0, \; B_1(t) \equiv \frac{1}{t+20}, \; E_1(t) \equiv -\frac{1}{t+27}, \; c_1(t) \equiv \frac{1}{t+20},$$

$$P_1(t,\tau) \equiv \frac{1}{(t+\tau+3)^5 \sqrt{\tau+1}}, \quad P_0(t,\tau) \equiv -\frac{1}{(t+\tau+4)^4},$$

$$\exp\left(\int_0^s G_1(\tau)\, d\tau\right) \le \exp\left(\int_0^s \left[\exp(-10\tau)\sqrt{\tau+1} + \frac{1}{2(\tau+1)} + \exp(-9\tau) + \frac{1}{3(\tau+4)^3} + \frac{1}{4(\tau+3)^4} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2(\tau+10)^2}\right] d\tau\right) \le \sqrt{s+1} \exp\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{20} + \frac{1}{96} + \frac{1}{324}\right);$$

$$M(x(0),x'(0),x''(0)) \equiv |x(0)| - \int_0^{\infty} \exp(-10s)\sqrt{s+1}\exp\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{20}+\frac{1}{96}+\frac{1}{324}\right)\left[\sqrt{c_*}+\int_0^{s}\frac{d\tau}{(\tau+22)^2}\right]ds \geq$$

$$\geq |x(0)| - \frac{1}{9}\left(\sqrt{c_*}+\frac{1}{22}\right)\exp\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{20}+\frac{1}{96}+\frac{1}{324}\right);$$

$$\sqrt{c_*} = \left[(x(0))^2 + (x''(0)-100x(0))^2 + (x'(0)-10x(0))^2 + \frac{1}{20}\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq |x(0)| + |x''(0)-100x(0)| + |x'(0)-10x(0)| + \frac{1}{20};$$

$$M(x(0),\ x'(0),\ x''(0)) \equiv |x(0)| - \frac{1}{9}\left(|x(0)| + |x''(0)-100x(0)| + |x'(0)-10x(0)| + \frac{1}{20}\right)*$$

$$*\exp\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{20}+\frac{1}{96}+\frac{1}{324}\right) > 0$$

которое выполняется, например, при $x^{(k)}(0) = 10^k x(0) \quad (k = 1,2)$,

$$|x(0)| - \frac{1}{9}\left(|x(0)| + \frac{1}{20}\right)\exp\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{20}+\frac{1}{96}+\frac{1}{324}\right) > 0.$$

На многие теоремы и следствия построены иллюстративные примеры.

Всюду в главах 2, 3 изучена связь оценки снизу и стремления к бесконечности решений с неустойчивостью по Ляпунову, с неосцилляцией решений и отсутствием особенных точек в смысле Я.В. Быкова (1957) в теории разрешимости задачи Коши в любой заданной точке полуинтервала.

В конце диссертации приведены выводы, отражающие новизну полученных результатов и возможности их теоретических и практических применений.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Халилова Г.Т. Об оценке снизу решений линейного однородного неявного интегро-дифференциального уравнения первого порядка [Текст] / С. Искандаров, Г.Т.Халилова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып. 40. – С 65 - 70.
2. Халилова Г.Т. Оценки снизу решений линейного неоднородного интегро-дифференциального уравнения первого порядка [Текст] / С. Искандаров, Г.Т.Халилова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып. 41. – С. 46-52.
3. Халилова Г.Т. Об оценке снизу решений линейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / С. Искандаров, Г.Т.Халилова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып. 42. – С. 29 - 34.
4. Халилова Г.Т. Оценки снизу решений линейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / С. Искандаров, Г.Т.Халилова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – 2011. – Спец. вып. – С. 61-65.
5. Халилова Г.Т. Об оценке снизу первых производных решений линейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / Г.Т.

Халилова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып. 45. – С. 34-39.
6. Халилова Г.Т. Оценки снизу решений линейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка типа Вольтерра [Текст] / С. Искандаров, Г.Т. Халилова // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. матем., мех., информатика. – Алматы, 2013. – № 1(76). – С.43-52.
7. Халилова Г.Т. Об одной оценке снизу решений линейного однородного интегро-дифференциального уравнения первого порядка [Текст] / Г.Т. Халилова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып. 47. – С. 39-43.
8. Khalilova G.T. Lower estimates of solutions of weak nonlinear Volterra integro-differential equations of second order [Текст] / S. Iskandarov, G.T. Khalilova // Вестник КРСУ. – 2015. – Т. 15, № 5. – С. 68-70.
9. Халилова Г.Т. Об оценках снизу решений и их производных линейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка типа Вольтерра [Текст] / С. Искандаров, Г.Т. Халилова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Вып. 2(33). – С. 21-29.
10. Халилова Г.Т. Об оценке снизу решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / С. Искандаров, Г.Т. Халилова // Приволжский научный вестник. – Ижевск, 2016. – № 7(59). – С. 22-26.
11. Халилова Г.Т. Об оценках снизу решений интегро-дифференциального уравнения первого порядка с функционалом [Текст] / С. Искандаров, Г.Т. Халилова // Вестник КРСУ. – 2016. – Т.16, № 9. – С.16-20.
12. Халилова Г.Т. Об оценках снизу решений и их производных линейного интегродифференциального уравнения четвертого порядка типа Вольтерра [Текст] / С. Искандаров, Г.Т. Халилова // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – Москва: ВИНИТИ РАН, 2017. – Т. 132. – С. 44 - 50.

РЕЗЮМЕ

Халилова Гүлжан Ташполотовна

“Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарын ылдый жагынан баалоолор”деген темада 01.01.02-дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу деген адистик боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн диссертация сунушталган

Урунттуу сөздөр: Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер (ВТИДТ), ылдый жагынан баалоолор, априордук баа, чексизге умтулуу, интегралдык мүчөлөрдүн таасири.

Изилдөөнүн объектиси: Биринчи, экинчи, үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги ВТИДТ.

Изилдөөнүн максаты: Биринчи, экинчи, үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги ВТИДТтин чыгарылыштарын ылдый жагынан чектелгендигин, аргумент чексизге умтулганда чексизге умтуларын камсыздоочу жеткиликтүү шарттарды табуу.

Вольтерра тибиндеги интегралдык мүчөлөрдүн тиешелүү дифференциал-дык теңдемелер (ДТ) чыгарылыштарынын чектелгендигине таасирин аныктоо.

Изилдөөнүн усулдары. Теңдемелерди кайра өзгөртүп түзүү Вольтерранын ыкмасы, айкын эмес ВТИДТлерди айкын түрдөгү жүктүү ВТИДТге келтирүү, салмактык жана кесүүчү функциялар, жекече кесүүчү функциялар, теңдемени системага стандарттык эмес келтирүү, чыгарылыштарды ылдый жагынан баалоочу интегралдык жана дифференциалдык барабарсыздыктар, бир тектүү эмес биринчи тартиптеги ДТнин чыгарылышын Коши–Лагранж усулу менен интегралдык көрсөтүлүш, чыгарылыштарды ылдый жагынан баалоо усулдары колдонулат.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы. Төмөнкү теңдемелердин тривиалдуу эмес чыгарылыштарынын ылдый жагынан баалоо жана чексиздикке умтулуусу үчүн жетишерлик шарттар табылды: биринчи тартиптеги айкын эмес, бир тектүү эмес сызыктуу ВТИДТ; бир тектүү, сызыктуу ВТИДТ, ал ВТИДТтин чыгарылыштары үчүн бир калыпта өсүү шарты аткарылган учурунда; биринчи тартиптеги сызыктуу ВТИДТ; биринчи тартиптеги сызыктуу ВТИДТ функционал менен; экинчи тартиптеги сызыктуу жана сызыктуу сымал ВТИДТ; үчүнчү тартиптеги сызыктуу жана сызыктуу сымал ВТИДТ, (жана алардын биринчи, экинчи, үчүнчү туундуларынын) төртүнчү тартиптеги сызыктуу ВТИДТ. Интегралдык мүчөнүн тиешелүү биринчи тартиптеги сызыктуу, бир калыптагы жана бир калыптагы эмес, (ошондой эле белгисиз функциянын коэффициенти нөлгө болгон) ДТлердин жана функционалдык ДТлердин чыгарылыштарынын чектелгендигине таасири аныкталды.

РЕЗЮМЕ

Халилова Гулжан Ташполотовна

Диссертация на тему: «Оценки снизу решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра» представлена на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра (ИДУТВ), оценки снизу, априорные оценки, стремление к бесконечности, влияние интегральных членов.

Объект исследования: ИДУТВ первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Цель работы: Получить достаточные условия для оценки снизу и стремления к бесконечности решений при неограниченном возрастании независимой переменной решений ИДУТВ первого, второго, третьего и четвертого порядков. Выявить влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность решений соответствующих дифференциальных уравнений (ДУ).

Методика исследования. Применяются метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод сведения неявного ИДУ первого порядка к явному ИДУ с нагрузкой, метод весовых и срезывающих функций, метод частичного срезывания, нестандартные методы сведения к системе, методы интегральных и дифференциальных неравенств для оценки снизу решений, метод Эйлера -Лагранжа интегрального представления решений линейного неоднородного ДУ первого порядка, метод оценки снизу решений и их производных в интегральных представлениях.

Научная новизна: Установлены достаточные условия для оценки снизу и стремления к бесконечности нетривиальных решений линейного однородного неявного ИДУТВ первого порядка; линейного однородного ИДУТВ в случае выполнения условия «монотонности» для решений этого ИДУТВ; линейного неоднородного ИДУТВ первого порядка; линейного ИДУТВ первого порядка с функционалом; линейного неоднородного ИДУТВ второго порядка; линейного и слабо нелинейного ИДУТВ второго порядка; решений линейного и слабо нелинейного ИДУТВ третьего порядка; и их производных вплоть до третьего порядка линейного ИДУТВ четвертого порядка. При этом выявляется влияние интегрального члена на ограниченность решений соответствующих линейных однородных и неоднородных ДУ первого порядка, в том числе с нулевым коэффициентом искомой функции, а также - решений функционально-ДУ.

SUMMARY
on the dissertation "Lower bounds for solutions of integro-differential equations of Volterra type" by Khalilova Gulzhan Tashpolotovna for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, specialty 01.01.02-differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: Integro-differential equation of Volterra type (IDEVT), lower estimates, a priori estimates, tending to infinity, influence of integral members.

Object of research: IDETV of first, second, third and fourth orders.

Aim of research: Obtain sufficient conditions for estimating from below on the half-axis and the tendency to infinity of solutions for an unbounded increase in the independent variable of IDETV solutions of the first, second, third, and fourth orders. Detect influence of Volterra-type integral perturbations on the boundedness of solutions of the corresponding differential equations (DE).

Methods of research: Apply Volterra conversion method of equations, the method of reducing the implicit IDEVT of the first order to the explicit IDEVT with load, the method of weight and cutoff functions, the method of partial truncation, nonstandard methods of reduction to the system, the methods of integral and differential inequalities for estimating from below solutions, the Cauchy-Lagrange method of the integral representation of solutions of a linear inhomogeneous DE of the first order, a method for estimating from below solutions and their derivatives in integral representations.

Scientific novelty: Sufficient conditions for estimating from below and the tendency to infinity for non-trivial solutions are established for: linear homogeneous implicit IDEVT of the first order; nonzero solutions of a linear homogeneous IDEVT if the condition "monotonicity" is satisfied for the solutions of this IDETV; of a linear inhomogeneous IDEVT of the first order; of a linear IDEVT of the first order with a functional; a linear non-homogeneous IDEVT of the second order; of a linear and weakly nonlinear second-order IDEVT; of a linear and weakly nonlinear IDEVT of the third order; and their derivatives up to third order of a linear fourth-order IDEVT. In this case, the influence of the integral term on the boundedness of the solutions of the corresponding linear homogeneous and inhomogeneous DE of the first order, including the zero coefficient of the desired function, and also on the solutions of the functional-DE is revealed.