

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж.БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.17.560

На правах рукописи
УДК 517.928

Алымбаев Асангул Темиркулович

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ,
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Бишкек – 2018

Работа выполнена в лаборатории прикладной математики и информатики Института математики НАН КР

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор **Байзаков А.Б.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Алыбаев К.С.**
доктор физико-математических наук,
профессор **Асанов А.**
доктор физико-математических наук,
профессор **Иманалиев Т.М.**

Ведущая организация: Казахский Национальный университет им.
Аль-Фараби
Адрес: Казахстан, Алматы, просп. Аль-Фараби 71

Защита диссертации состоится «___» _____ 2018 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 01.17.560 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке и на сайте ИМ НАН КР www.math.aknet.kg, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат опубликован «12» марта 2018 г.

И.о. ученого секретаря диссертационного
совета, д.ф.-м.н., профессор



Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы: Мы будем пользоваться следующими обозначениями: СДУ – системы дифференциальных уравнений, СИДУ – системы интегро-дифференциальных уравнений, СИУ – системы интегральных уравнений, ДО – дифференциальный оператор, ИУ – интегральное уравнение, ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение.

Математическое моделирование многих физических задач сводятся к краевым задачам для СДУ и СИДУ.

Для изучения решений краевых задач, имеются асимптотические, аналитические и качественные методы созданные А.Н.Ляпуновым, А.Пуанкаре, Н.М.Крыловым, Н.Н.Боголюбовым, Ю.А.Митропольским и другими авторами. Эти методы успешно применяются в исследовании слаболинейных систем, в которых эффект от нелинейности проявляется медленно и может быть обнаружен из рассмотрения асимптотических разложений. Однако при исследовании нелинейных СДУ и СИДУ общего вида их применимость ограничивается узкими классами уравнений.

Одним из эффективных приближенных методов исследования решений краевых задач общего вида является численно-аналитический метод Самойленко А.М. Численно-аналитический метод, являющийся методом последовательных приближений, впервые предложен и обоснован А.М. Самойленко для исследования периодических решений системы неавтономных ДУ. В дальнейшем метод был развит в работах Д.И. мартыныка, Н.А. Перестюка, Н.Х. Ронто, О. Нуржанова, Л.Л. Тая, Г. Вахабова, А.Д. Байнова, К. Ильясова, В. А. Данканыча, А.Я. Гадионенко и других авторов.

В работах этих авторов были исследованы вопросы существования и построения периодических решений СДУ с запаздывающим аргументом с периодической правой частью, СДУ с импульсным воздействием, СИДУ, автономных СДУ с запаздыванием, автономных СДУ второго порядка.

Численно-аналитический метод применительно двухточечным краевым задачам посвящены работы А.М. Самойленко и Н.Х. Ронто. В работах этих авторов исследованы вопросы существования и построения решения краевых задач для ДУ с линейными не разделяющимися граничными условиями и ДУ с запаздывающим аргументом.

В данной работе предлагаются новые методы приближенных решений краевых задач СДУ.

Цели исследования:

- исследование вопроса существования и построения периодических решений квазилинейных СИДУ с конечным последствием и СИДУ общего вида бесконечным последствием, обладающий свойством автономности;
- изучение задачи разрешимости СИУ смешанного типа и построения приближенных решений;
- изучение вопроса построения решения краевых задач для СДУ с линейными не разделяющимися граничными условиями;

- построения асимптотического разложения по степеням малого параметра решения краевых задач для СДУ с регулярным и сингулярным возмущением;

- разработка модификации численного метода Рунге-Кутты для построения численных решений краевых задач системы ДУ.

Методы исследования: Для достижения цели и решения задач диссертации, главным образом применяются аппараты численно-аналитического метода, предложенный Самойленко А.М., теория интегродифференциальных уравнений разработанный Быковым Я.В., теория метода малого параметра, теория метода пограничных функций и аппарат метода Ньютона-Канторовича, обеспечивающий ускоренную сходимость приближенного решения к точному решению краевой задачи.

Научная новизна:

- Впервые численно-аналитический метод А.М. Самойленко применен и обоснован для исследования периодических решений автономных СИДУ с конечным и бесконечным последствием;

- Разработан и математически обоснован метод последовательных приближений обеспечивающий ускоренной сходимостью приближенных решений краевых задач к точному решению СДУ;

- Изучены вопросы существования и единственности решения СИУ именуемое как СИУ в численно-аналитическом методе;

- Методом сведения краевой задачи для СДУ с регулярным и сингулярным возмущением относительно малого параметра, к задаче Коши для СИДУ построена асимптотическое решение краевой задачи;

- Изучены вопросы существования и построение краевых задач линейных и квазилинейных СДУ;

- Разработана модификация численного метода Рунге-Кутты для построения численных решений краевых задач СДУ.

Практическая и теоритическая ценность: Результаты диссертации дают возможность исследовать многоточечные краевые задачи системы дифференциальных уравнений. Разработанными в диссертации алгоритмами и методами можно решить конкретные прикладные модельные уравнения. Результаты диссертации носят теоретический характер.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Обоснование численно-аналитического метода академика Самойленко А.М., для изучения периодических решений автономных СИДУ с конечными и бесконечными последствиями.
2. Изучение разрешимости СИУ смешанного типа именуемое, как интегральное уравнение в численно-аналитическом методе.
3. Разработка численно-аналитического метода с ускоренной сходимостью построение и установление существования решений двухточечной краевой задачи СДУ.
4. Разработка модификации численного метода Рунге-Кутты для построения численных решений краевых задач СДУ.

5. Разработка и обоснование метода ИДУ для построения асимптотических решений краевых задач, СДУ с регулярными и сингулярными возмущениями.
6. Изучение вопроса существования и построения краевых задач линейных и квазилинейных СДУ.

Связь работы с научно-исследовательскими проектами. Работа выполнена в рамках проектов НИР Института теоретической и прикладной математики НАН КР: «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений» (2012-2014), номер гос. регистрации № 0005756, «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, топологических и аналитических методов в теории устойчивости динамических систем, разрешимости обратных задач, экономических и геофизических процессов» (2015-2017), номер гос. регистрации № 0007125 и включены в отчеты по этим проектам.

Апробация работы. Результаты исследований докладывались:

- на научно-теоретической конференции, посвященной 40-летию Иссык-Кульскому Государственному Университету им. К.Тыныстановва (Каракол, 1993);
- на IV Республиканской научно-методической конференции «Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики» (Бишкек, 1996);
- на IV Республиканской научно-методической конференции «Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики» (Бишкек, 1996);
- на II международной научно-практической конференции «Теоретические аспекты развития современной науки» (Бишкек, 2013);
- на третьей республиканской научной конференции, посвященной памяти профессора Р. Усубакунова (Бишкек, 2014);
- на семинаре по математике отделений прикладной и теоретической математики, факультета естественных наук Кыргызско-Турецкого университета «Манас» (Бишкек, 2016);
- в международной научно-практической конференции, приуроченной году нравственности, воспитания и культуры, «Наука и образование: современные проблемы и перспективные направления инновационного развития» (Каракол, 2017);
- на III международной конференции, приуроченной к 70-летию профессора А.Керимбекова «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных управлений» (Бишкек, 2017);
- на семинаре академика Борубаева А.А. (Бишкек 2018).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в монографии и в 26 научных статьях.

В совместных работах [2, 18, 23, 24] А.Б. Байзакову принадлежит постановка проблем, а соискателю их решения. Основные результаты диссертации получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, списка условных обозначений использованных кратких математических записей, сокращений, введения и 6 глав, которые разбиты на параграфы, выводов, списка использованных источников из 116 наименований и приложения текста программы на Excel и результатов расчета числовых примеров. Общий объем диссертации 164 страниц. Всего в работе 3 рисунка и 7 таблиц. Нумерация глав сквозная, а номер параграфа состоит из двух цифр, отделенных точкой. Первая цифра означает номер главы, а вторая номер параграфа.

Нумерация теорем, лемм и формул тройная. Первая цифра означает номер главы, вторая- номер параграфа, а третья- номер теоремы, леммы, формулы.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному консультанту д.ф.-м. н., профессору Байзакову А.Б. за постоянное внимание к работе.

Основное содержание диссертации

Во введении излагается цель и задачи исследования, обосновывается актуальность темы, научная новизна, практическая и теоритическая, ценность диссертации.

В первой главе излагается обзор литературы и краткое содержание результатов диссертации.

Вторая глава посвящена обоснованию численно-аналитического метода Самойленко А.М. для исследования периодических решений СИДУ

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f\left(x(t), \int_t^{t+\tau} \varphi(t-s, x(s))ds\right) \quad (1)$$

и вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), \int_{-\infty}^t \varphi(t-s, x(s))ds\right). \quad (2)$$

обладающие свойством автономности.

Изучаются периодические решения ИУ

$$x(t) = \int_{t-\tau}^t K(t, s)x(s)ds + f(t) \quad (3)$$

и ИДУ вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \int_{t-\tau}^t K(t, s)x(s)ds\right). \quad (4)$$

Рассмотрим преобразование

$$\bar{x} = e^{A\omega t} \bar{y}, \quad \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}}, \quad \theta = \omega t,$$

где \bar{x} и \bar{y} – m -мерные вектор – функции, имеющие, соответственно компоненты x_i, y_i ($i=1,2,\dots,m, i \leq m \leq n$), $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}$ – $(n-m)$ -мерные вектор – функции, имеющие, соответственно, компоненты x_j, y_j ($j=m,\dots,n$). Тогда относительно новых переменных СИДУ (1) имеет вид

$$\frac{dy(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\omega} Y \left(y(\theta), \frac{1}{\omega} \int_{\theta}^{\theta+\omega\tau} \psi(\theta, v, y(v)) dv \right), \quad (5)$$

Пусть вектор-функция $Y(\theta, y, u)$, $\psi(\theta, y, v)$ являются непрерывными, ограниченными и 2π периодическими по θ и удовлетворяет условие Липшица

$$|Y(\theta, y, u)| = M, \quad |\psi(\theta, y, v)| \leq N, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} |Y(\theta, y', u') - Y(\theta, y'', u'')| &\leq K_1 |y' - y''| + K_2 |u' - u''|, \\ |\psi(\theta, v, y') - \psi(\theta, v, y'')| &\leq K_3 |y' - y''|, \end{aligned} \quad (7)$$

где M, N, K_1, K_2, K_3 – постоянные числа.

число $Q = \frac{2\pi}{3\omega} \left[K_1 + \frac{3\tau}{2} K_2 K_3 \right]$ меньше единицы

$$Q < 1. \quad (8)$$

В §2.3 доказано утверждение об общей схеме отыскания 2π – периодическое решение системы (5).

Теорема 2.3.1. Пусть СИДУ (5) удовлетворяет неравенствам (6), (7), (8). Тогда, если эта система (5) имеет 2π – периодическое решение $y = y(\theta), y(0) = y_0$, то $y(\theta) = y_\infty(\theta, y_0, \omega)$ в области $\omega \in I_\omega = \{\omega: \omega \geq \Omega\}$,

где $y_\infty(\theta, y_0, \omega)$ – предельная функция последовательности

$$\begin{aligned} y_m(\theta, y_0, \omega) &= y_0 + \frac{1}{\omega} \int_0^\theta \left[Y \left(\theta, y_{m-1}(\theta, y_0, \omega), \frac{1}{\omega} \int_{\theta}^{\theta+\omega\tau} \psi(\theta, v, y_{m-1}(\theta, y_0, \omega)) dv \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y \left(\theta, y_{m-1}(\theta, y_0, \omega), \frac{1}{\omega} \int_{\theta}^{\theta+\omega\tau} \psi(\theta, v, y_{m-1}(v, y_0, \omega)) dv \right) d\theta \right] d\theta, \quad m=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta(y_0, \omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} Y \left(\theta, y^0(\theta, y_0, \omega), \frac{1}{\omega} \int_{\theta}^{\theta+\omega\tau} \psi(\theta, v, y^0(v, y_0, \omega)) dv \right) d\theta,$$

где $y^0(\theta, y_0, \omega)$ – предел последовательности (9).

Таким образом точки (y_0^*, ω) , для которых $\Delta(y_0^*, \omega) = 0$ являются особыми точками отображения

$$\Delta: R^{n-1} \times I_\omega \rightarrow R^n,$$

$$\Delta(y_0^*, \omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} Y \left(\theta, y^0(\theta, y_0, \omega), \frac{1}{\omega} \int_{\theta}^{\theta+\omega\tau} \psi(\theta, v, y^0(v, y_0, \omega)) dv \right) d\theta. \quad (10)$$

Так как отображение (10) находится лишь приближенно, исходя из последовательности функций

$$\Delta_m(y_0^*, \omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} Y \left(\theta, y_m(\theta, y_0, \omega), \frac{1}{\omega} \int_{\theta}^{\theta+\omega\tau} \psi(\theta, v, y_m(v, y_0, \omega)) dv \right) d\theta, \quad (11)$$

где $y_m(\theta, y_0, \omega)$ – функции последовательности (11), то возникает задача, как по нулям функции $\Delta_m(y_0^*, \omega)$ заключить о нулях $\Delta(y_0^*, \omega)$, а следовательно, о существовании периодических решений системы (5).

Доказательство этой задачи дано в §2.5 и оформлено в виде следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть для системы (5), выполняются условия:

- 1) отображение $\Delta_m(y_0^*, \omega)$ для некоторого целого m имеет изолированную особую точку $\Delta_m(\bar{y}_0^*, \bar{\omega}) = 0$;
- 2) индекс этой особой точки отличается от нуля;
- 3) существует замкнутая выпуклая область $D_\omega = D \times I_\omega \subset R^{n-1} \times I_\omega$, и содержащая единственную особую точку $(\bar{y}_0^*, \bar{\omega})$ функции Δ_m , что на ее границе $\Gamma(D_\omega)$ выполняются неравенства

$$\inf \Delta_m(y_0^*, \omega) \geq \frac{1}{\omega} Q^{m+1} (1 - Q)^{-1} M.$$

Тогда система (5) будет иметь 2π -периодическое решение. Теперь возникает вопрос о том, как определить область переменных (y_0, ω) , в которой находятся начальное значение \bar{y}_0 и частота $\bar{\omega}$ точного периодического решения. На этот вопрос отвечает доказанное в §2.6 утверждение.

Теорема 3. Пусть задана система (5) и $\{y_n = y_{0n}\} \in D_\omega$. Тогда для того, чтобы в этой области нашлась точка $(\bar{y}_0, \bar{\omega})$, в которой $\Delta(\bar{y}_0, \bar{\omega}) = 0$, необходимо, чтобы для всех целых m и любого $(y'_0, \omega') \in D_\omega$ (искомая область) выполнялось неравенство

$$|\Delta_m(y'_0, \omega')| \leq \sup \left\{ \frac{K_1 + K_2 K_3 \tau}{\omega'} [1 + Q'(1 + Q'(1 - Q')^{-1})] |\bar{y}'_0 - y'_0| + \right. \\ \left. + \frac{M + 2NK_2 \tau}{\omega' \omega''} [1 + Q'(1 + Q'(1 - Q')^{-1})] |\omega' - \bar{\omega}| + \frac{1}{\omega} Q'^{m+1} (1 - Q')^{-1} M : (y_0, \omega) \in D_\omega \right\},$$

где $Q' = \frac{2\pi}{3\omega'} \left(K_1 + \frac{3\tau}{2} K_2 K_3 \right)$.

Обозначим через $\|K_\tau\|$ функцию:

$$\|K_\tau\| = \sup_{\|x\|=1} \left| \int_{t-\tau}^t K(t, s) ds \right| = \max_{t \in [0, \omega]} \left| \int_{t-\tau}^t K(t, s) ds \right| \quad (12)$$

В §2.7 рассмотрим ИДУ вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \int_{t-\tau}^t K(t, s)x(s)ds\right) \quad (13)$$

где f и K – ω -периодические по t, s функции. Доказано существование и отыскание периодического решения ИДУ (13).

В §§2.8-2.10 рассматриваются вопросы построения и существования периодических решений, СИДУ с бесконечными последствиями вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), \int_{-\infty}^t \varphi(t-s, x(s))ds\right) \quad (14)$$

где x, f – n -мерные вектор-функции, φ – m -мерный вектор-функция.

Пусть теперь функции $f(x, u)$ и $\varphi(t-s, x)$ удовлетворяют по x и u условию Липшица. Далее, пусть A – заданная $m \times m$ -мерная постоянная матрица, такая, что все решения уравнения $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$ 2π периодические функции.

Преобразованием вида

$$\bar{x} = e^{A\omega t} \bar{y}, \quad \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}}, \quad \theta = \omega t \quad (15)$$

где \bar{x} и \bar{y} m -мерные векторы-функции, $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}$ – $(n-m)$ -мерные векторы-функции, система (14) сводится к системе

$$\frac{dy(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\omega} Y\left(\theta, y(\theta), \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\theta} \psi(\theta, v, y(v))dv\right) \quad (16)$$

Предположим, что функции $Y(\theta, y, \vartheta), \psi(\theta, y, v)$ являются непрерывными, ограниченными и 2π периодическими по θ, v и удовлетворяют условиям

$$|Y(\theta, y, \vartheta)| \leq M, \quad \int_{-\infty}^{\theta} |\psi(\theta, v, y(v))| dv \leq N, \quad (17)$$

$$|Y(\theta, y', \vartheta') - Y(\theta, y'', \vartheta'')| \leq K_1 |y' - y''| + K_2 |\vartheta' - \vartheta''|, \quad (18)$$

$$|\psi(\theta, v, y') - \psi(\theta, v, y'')| \leq K_3 (\theta - v) |y' - y''|,$$

$$\int_{-\infty}^{\theta} K_3 (\theta - v) dv < K < \infty, \quad (19)$$

где M, N, K, K_1, K_2 положительные постоянные числа.

Предположим, число $Q = \frac{\pi}{\omega} \left(K_1 + \frac{K_2 K}{\omega} \right)$ не превышает единицу, т.е.

$$Q < 1 \quad (20)$$

При выполнении условий (17)–(20) в §§2.8-2.10 доказаны аналогичные теоремам 1, 2, 3.

В §2.11 рассматривается модельная система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая контакты между хищником (x) и жертвой (y) в прошлые времена, влияющие на скорость роста обоих видов

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= i\omega x - i\omega c_{11}x - i\omega c_{12}x \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)} y(s) ds, \\ \frac{dy}{dt} &= i\omega y + i\omega c_{21}y \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)} x(s) ds.\end{aligned}\quad (21)$$

Заменой переменных

$$x = e^{i\omega t} x_1, \quad y = e^{i\omega t} y_1, \quad \omega t = \theta, \quad s = \frac{z}{\omega},$$

система (21) сводится к системе

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -ic_{11}e^{i\theta}x_1^2 - \frac{i}{\omega}c_{12}x_1 \int_{-\infty}^{\theta} e^{-\frac{\theta-z}{\omega}} e^{-iz} y_1 \left(\frac{z}{\omega} \right) dz, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{i}{\omega}c_{21}y_1 \int_{-\infty}^{\theta} e^{-\frac{\theta-z}{\omega}} e^{iz} x_1 \left(\frac{z}{\omega} \right) dz.\end{aligned}$$

Найдено первое приближение 2π -периодическому решению.

В главе 3 изучается СИУ смешанного типа, которое играет важную роль при исследовании решений периодических и краевых задач.

В §§3.1-3.3 рассмотрены СИУ вида

$$x(t) = \mu \int_0^t \left[K(t,s)x(s) - \frac{1}{T} \int_0^T K(t,s)x(s) ds \right] ds + f(t), \quad (22)$$

и вида

$$x(t) = \mu \int_0^t \left[K(t,s)x(s) - \frac{1}{T} \int_0^T K(t,s)x(s) ds \right] ds + f(t, x(t)), \quad (23)$$

где x, f – n -мерные векторы-функции; $K(t,s)$ – $n \times n$ -мерная матрица-функция; μ – параметр. Представим (22) в операторном виде

$$x(t) = \mu(Kx)(t) + f(t)$$

и решаем (22) методом последовательных приближений, взяв в качестве первого приближения $x_1(t) = f(t)$, согласно схеме

$$x_n(t) = \mu(K_{n-1}x)(t) + f(t) = \sum_{k=1}^n \mu^{n-k} (K^{n-k} f)(t), \quad n=1,2,\dots$$

$$\text{где } (Kx)(t) = \mu \int_0^t \left[K(t,s)x(s) - \frac{1}{T} \int_0^T K(t,s)x(s) ds \right] ds.$$

Теорема 4. СИУ (22) имеет, и при том единственное решение при

$$|\mu| < \frac{1}{\rho}, \quad \text{где } L = \|K\| \text{ и } \|x(t)\| \leq (1-\rho)^{-1} \|f\|, \quad \rho = \frac{T}{2} L.$$

Такое утверждение доказано в §3.2.

Теорема 5. Если удовлетворяет условию Липшица

$$K(t,s), \quad f(t,x) \quad |f(t,x') - f(t,x'')| \leq L_1 |x' - x''|, \quad \text{и } \bar{\rho} = |\mu| \rho + L_1 < 1,$$

то СИУ (23) имеет при этом единственное решение $x = x^0(t)$ и это решение можно найти методом последовательных приближений согласно схеме

$$x_n(t) = \mu(Kx_n)(t) + f(t, x_{n-1}(t)).$$

В §3.4 предлагается численная схема решения (метод трапеции) СИУ (22).

В главе 4 рассматривается проблема математического обоснования схемы численно-аналитического метода с ускоренной сходимостью двухточечной краевой задачи для системы ОДУ.

В §§4.1-4.3 изложены постановка краевой задачи, задачи линеаризации и алгоритм приближенного решения краевой задачи вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad (24)$$

$$Ax(0) + Bx(T) = d, 0 \leq t \leq T, \quad (25)$$

где $d \in R^m$, $x \in C^1([0, T] \rightarrow R^n$, $A, B \in R^{n \times n}$, $\det B \neq 0$.

Приближенные решения задачи (24), (25) определяем согласно алгоритму

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t, x_0) = & \int_0^t \left[f_x(t, x_n(t, x_0))x_{n+1}(t, x_0) - \frac{1}{T} \int_0^T f_x(t, x_n(t, x_0))x_{n+1}(t, x_0) dt \right] dt + \\ & + x_0 + \int_0^t \left[f(t, x_n(t, x_0)) - f_x(t, x_n(t, x_0))x_n(t, x_0) - \frac{1}{T} \int_0^T (f(t, x_n(t, x_0)) - \right. \\ & \left. - f_x(t, x_n(t, x_0))x_n(t, x_0)) dt \right] dt + \frac{t}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0], \end{aligned} \quad (26)$$

В §4.4 рассматривается задача исследования сходимости алгоритма (26).

Пусть n -мерная вектор-функция $f(t, x)$ определенная в области

$$(t, x) \in [0, T] \times S_\omega, \omega > 0, S_\omega \subset R^n. \quad (27)$$

где D – ограниченная, замкнутая область евклидова пространства E_n , и удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} |f(t, x)| &\leq M, \quad |f_x(t, x)| \leq K, \\ |f(t, x') - f(t, x'') - f_x(t, x')(x' - x'')| &\leq K_1 |x' - x''|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Лемма 1. Если $2TK < \frac{1}{2}$, $2TM + \beta < \omega / 4$, $x_0 \in D_f$, то $x_n(t, x_0) \in D_f$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

Теорема 6. Пусть $x = x^0(t, x_0)$ решение краевой задачи (24), (25), удовлетворяющей условиям леммы 1. и $\rho_1 = \frac{TK_1}{2}$, $\gamma = \frac{TM}{2} + \beta$, $\rho_1\gamma < (1 - \rho)(1 - 2\rho)$, то $x^0(t, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t, x_0)$, и

$$|x^0(t, x_0) - x_n(t, x_0)| \leq \frac{1 - \rho}{\rho_1} \left(\frac{\rho_1\gamma}{(1 - \rho)(1 - 2\rho)} \right)^{2^n} \frac{(1 - \rho)^2(1 - 2\rho)^2}{(1 - \rho)^2(1 - 2\rho)^2 \rho_1^2 \gamma^2},$$

для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, где $x_n(t, x_0)$ определяется согласно (26).

Положим

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0] - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x_\infty(t, x_0)) dt, \quad (29)$$

где $x_\infty(t, x_0)$ предел последовательности функции (26). Так как $x_\infty(t, x_0)$ – решение уравнения

$$x_{\infty}(t, x_0) = x_0 + \int_0^t [f(t, x_{\infty}(t, x_0)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x_{\infty}(t, x_0)) dt] dt + \frac{1}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0],$$

то при $\Delta(x_0) = 0$ функция $x_{\infty}(t, x_0)$ является решением краевой задачи (24), (25) и вопрос существования решения краевой задачи связан с вопросом существования нулей функции (29). Точки x_0 , для которых $\Delta(x_0) = 0$, являются особыми точками отображения

$$\Delta: D_+ \rightarrow E_n, \quad \Delta(x_0) = \frac{1}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0] - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x^0(t, x_0)) dt. \quad (30)$$

Найти отображение (30) можно лишь приближенно, вычисляя, функции

$$\Delta_n(x_0) = \frac{1}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0] - \frac{1}{T} \int_0^T [f(t, x_n(t, x_0)) - f_x(t, x_n(t, x_0)) \delta x_n(t, x_0)] dt. \quad (31)$$

Поэтому возникает следующая задача: исходя из отображения (31) решить вопрос о нулях (30) и, следовательно, о решении краевой задачи (24), (25). Решение этой задачи дает теорема, доказанная в §4.5.

Теорема 7. Пусть для краевой задачи (32), (33) заданной в области (35) и удовлетворяющей условиям (36)-(38), также выполняются следующие условия:

- а) для некоторого целого n функция $\Delta_n(x_0)$ имеет изолированную особую точку $\Delta_n(x_0^0) = 0$;
- б) индекс этой точки отличен от нуля;
- в) существует замкнутая выпуклая область D_1 , принадлежащая D_f и имеющая единственную особую точку x_0^0 , такую, что на ее границе Γ_{D_1} , справедливо неравенство

$$\inf_{x \in D_1} |\Delta_n(x)| \geq K \frac{1-\rho}{\rho_1} \left(\frac{\rho_1 \gamma}{(1-\rho)(1-2\rho)} \right)^{2^n} \left(\frac{\rho_1 \gamma}{(1-\rho)(1-2\rho)} \frac{(1-\rho)^2(1-2\rho)^2}{(1-\rho)^2(1-2\rho)^2 - \gamma^2 \rho_1^2} + 1 \right).$$

Тогда краевая задача (24), (25) имеет решение $x(t)$, для которого $x(0) \in D_f$.

В §4.6 рассматриваются свойства определяющей функции.

В §4.7 рассматривается задача о выборе области начальных значений, которые порождают решения краевой задачи (24), (25).

Глава 5 посвящена вопросу обоснования метода Рунге-Кутты для краевых задач.

В §§5.1-5.2 даются постановка краевой задачи, общая схема численного решения и формулировка методов Рунге-Кутты для краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (32)$$

$$Ax(0) + Bx(T) = d, \quad (33)$$

и его математическое обоснование.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (34)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (35)$$

Определение 1. Пусть s - целое положительное число $a_{21}, a_{31}, a_{32}, \dots, a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{s,s-1}, b_1, b_2, \dots, b_s, c_1, c_2, \dots, c_s$ - вещественные коэффициенты. Тогда метод

$$\begin{aligned} K_{1i}(h) &= f(t_i, x_i), \\ K_{2i}(h) &= f(t_i + c_2 h, x_i + a_{21} K_{1i}), \\ K_{3i}(h) &= f(t_i + c_3 h, x_i + h(a_{31} K_{1i} + a_{32} K_{2i})), \\ &\vdots \\ K_{si}(h) &= f(t_i + c_s h, x_i + h(a_{s1} K_{1i} + \dots + a_{s,s-1} K_{s-1,i})), \\ x_i &= x_0 + h \sum_{\alpha=1}^{i-1} \sum_{j=1}^s b_j K_{j\alpha}(h) \end{aligned} \quad (36)$$

называется s - стадийным методом Рунге-Кутты для задачи Коши (34), (35).

Определение 2. Пусть s - целое положительное число и $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{s,s-1}, b_1, b_2, \dots, b_s, c_2, \dots, c_s$ - вещественные коэффициенты из определения 1. Тогда метод

$$\begin{aligned} K_{1i}(h) &= f(t_i, x_i), \\ K_{2i}(h) &= f(t_i + c_2 h, x_i + a_{21} K_{1i}), \\ &\vdots \\ K_{si}(h) &= f(t_i + c_s h, x_i + h(a_{s1} K_{1i} + \dots + a_{s,s-1} K_{s-1,i})), \\ x_i &= x_0 + h \sum_{\alpha=0}^{i-1} \left[\sum_{j=1}^s b_j K_{j\alpha}(h) - \frac{h}{T} \sum_{\beta=1}^{N-1} \sum_{j=1}^s b_j K_{j\beta}(h) \right] + \frac{t_i}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0] \end{aligned} \quad (37)$$

называется s - стадийным явным методом Рунге-Кутты для краевой задачи (32), (33). Согласно этому определению некоторые методы Рунге-Кутты низших порядков записываются:

Метод Эйлера

$$x_i = x_0 + h \sum_{\alpha=0}^{i-1} \left(f(t_\alpha, x_\alpha) - \frac{h}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k, x_k) \right) + \frac{t_i}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0]$$

Метод Хойна

$$\begin{aligned} K_{1\alpha}(h) &= f(t_\alpha, x_\alpha), \quad K_{2\alpha}(h) = f\left(t_\alpha + \frac{1}{3}h, x_\alpha + \frac{1}{3}hK_{1\alpha}(h)\right), \\ K_{3\alpha}(h) &= f\left(t_\alpha + \frac{2}{3}h, x_\alpha + \frac{1}{3}hK_{2\alpha}(h)\right), \\ x_i &= x_0 + h \sum_{\alpha=0}^{i-1} \left[\frac{1}{4}K_{1\alpha}(h) + \frac{3}{4}K_{3\alpha}(h) - \frac{h}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{4}K_{1k}(h) + \frac{3}{4}K_{3k}(h) \right) \right] + \\ &\quad + \frac{t_i}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0] \end{aligned}$$

Теорема 8. Если метод Рунге-Кутты для краевой задачи (32), (33) имеет порядок p и если все частные производные $f(t, x)$ до порядка p включительно существуют и непрерывны, то погрешность метода

допускает оценку $|x(t_i) - x_i| \leq \frac{N}{2p!} \left(\max_{\theta} \left| \frac{F^{(p+1)}(\theta h)}{p+1} \right| + \max_{\theta} \sum_{j=1}^s b_j |K_{j\alpha}^{(p)}(\theta h)| \right) h^{p+1}$

Введенный в определении 2 метод Рунге-Кутты (37) можно интерпретировать как дискретный аналог СИУ вида

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f(t, x(t, x_0)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x(t, x_0)) dt \right] dt + \frac{t}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0]. \quad (38)$$

Вследствие этого вопрос существования и отыскания решения краевой задачи (32), (33) сводится к вопросу существования и отыскания решений конечно-разностных уравнений (37). В §5.3 дается решение этого вопроса.

Рассмотрим краевую задачу

$$x_{n+1} = x_n + f_n(x_n) \quad (39)$$

$$Ax_0 + Bx_N = d \quad (40)$$

где $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(p)})$, $f_n = (f_n^{(1)}, f_n^{(2)}, \dots, f_n^{(n)})$, A, B - постоянные матрицы разности $p \times p$, причем $\det B \neq 0$. Предположим, что функция $f_n(x)$ определена в области $(n, x) \in [0, N] \times S_\omega$ и удовлетворяет неравенствам

$$|f_n(x)| \leq M, \quad (41)$$

$$|f'_n(x) - f''_n(x)| \leq K |x' - x''|, \quad (42)$$

где M, K - положительные числа.

В дальнейшем будем рассматривать такие системы, для которых выполняются условия:

$$1) \left(\frac{MN}{2} + \beta \right) < \omega, \quad \beta = B^{-1}d - (B^{-1}A + 1)x_0;$$

$$2) Q = \frac{NK}{2} < 1.$$

Предположим, что задача (39), (40) имеет решение и известна точка x_0 , через которую это решение проходит при $n = n_0 = 0$. Тогда справедлива

Теорема 9. Пусть φ_n - решение краевой задачи (39), (40) проходящее через точку.

$$\text{Тогда } \varphi_n = \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(k)}(x_0),$$

равномер $x_0 \in S_{\omega - (\frac{MN}{2} + \beta)}$ но относительно n, x_0 и выполняется оценка

$$|\varphi_n - x_n^{(k)}(x_0)| \leq Q^k (1 - Q)^{-1} \frac{MN}{2},$$

где $x_n^{(k)}(x_0)$ - определяется согласно

$$x_n^{(k)}(x_0) = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left[f_i(x_i^{(k-1)}(x_0)) - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j(x_j^{(k-1)}(x_0)) \right] + \frac{n-1}{N} (B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0)$$

$$x_i^{(0)}(x_0) = x_0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Пусть вектор-функция определена в области $[0, T] \times D$ ($D \in E_n$) и удовлетворяет неравенству

$$|f(t, x)| \leq M, \quad (43)$$

и условию Липшица

$$|f(t, x') - f(t, x'')| \leq K |x' - x''|, \quad (44)$$

для всех $0 \leq t \leq T$, $x, x', x'' \in D$. Тогда для функции

$$\Phi(x_\alpha, h) = \sum_{j=1}^s b_j K_{j\alpha}(h) \quad (45)$$

справедлива

Лемма 2. Если функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям (43), (44). Тогда постоянная Липшица для функции (45) определяется согласно

$$L(h) = K \left(\sum_{\alpha=1}^s |b_\alpha| + hK \sum_{\alpha, i=1}^s |b_\alpha a_{\alpha i}| + h^2 K^2 \sum_{\alpha, i, j=1}^s |b_\alpha a_{\alpha i} a_{ij}| + \dots \right).$$

Условиями обеспечивающими существование решения краевой задачи (32), (33) являются условия 1), 2). Эти условия будем называть основными.

Так как $\sum_{j=1}^s b_j = 1$ и $|K_{i\alpha}(h)| \leq M$, то $\left| \sum_{j=1}^s b_j K_{i\alpha}(h) \right| \leq M$. Поэтому в случае уравнения (37) основные условия имеют вид:

$$\text{а) } \omega - \left(\frac{hMN}{2} + \beta \right) > 0;$$

$$\text{б) } Q(h) = \frac{hL(h)N}{2} < 1.$$

В случае выполнения условий а) и б), согласно теореме 9 краевая задача (32), (33) задача имеет единственное решение $\varphi_n(x_0, h) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(k)}(x_0, h)$ и

$$|\varphi_n - x_n^{(k)}(x_0)| \leq Q^k(h)(1 - Q(h))^{-1} \frac{MN}{2},$$

где $x_n^{(k)}(x_0, h)$ определяется согласно

$$\begin{aligned} x_n^{(k)}(x_0, h) &= x_0 + h \sum_{i=0}^{n-1} \left[\Phi_i(x_i^{(k-1)}(x_0, h), h) - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_i(x_i^{(k-1)}(x_0, h), h) \right] + \\ &+ \frac{n}{N} (B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0), \quad x_n^0(x_0) = x_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Учитывая, что $h = \frac{T}{N}$ из условий а), б) получаем при $N \rightarrow \infty$ условия:

$$\text{а) } \omega - \left(\frac{hMN}{2} + \beta \right) > 0;$$

$$\text{б) } Q = \frac{TK}{2} < 1 \quad (38).$$

Обозначим через $\Delta(x_0, h)$ и $S(x_0, h)$ выражения

$$\Delta(x_0, h) = \frac{1}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0] - \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_k+h} f(s, x^0(s, x_0)) ds \quad (46)$$

$$S(x_0, h) = \frac{1}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0] - \frac{h}{T} \sum_{\beta=1}^{N-1} \Phi_{\beta}(x_{\beta}, h) \quad (47)$$

В §5.4 дана оценка точности корней определяющих уравнений (46), (47).

Теорема 10. Если $x = x_0$, $x = \bar{x}_0$ корни определяющих уравнений $\Delta(x_0, h) = 0$, $S^{(k)}(x_0, h) = 0$ и матрицы $\Delta_x^{-1}(x_0, h) \left[1 - |B^{-1}A + 1| - 2Q(h)(1 - Q(h))^{-1} \right]^{-1}$ невырожденные, то справедлива оценка

$$|\bar{x}_0 - x_0| \leq L(h)Q^k(h)(1 - Q(h))^{-1} \frac{MN}{2r_1(h)} +$$

$$+ \frac{2}{rr_1(h)p!T} \left(\max_{\theta} \left| \frac{F^{(p+1)}(\theta h)}{p+1} \right| + \max_{\theta} \sum_{j=1}^s b_j |K_{j\alpha}^{(p)}(\theta h)| \right) h^{p+1},$$

$$\text{где } |\Delta'_x| \leq \frac{1}{r}, \quad \left| \left[1 - |B^{-1}A + 1| - 2Q(h)(1 - Q(h))^{-1} \right]^{-1} \right| \leq \frac{1}{r_1(h)}.$$

В §5.5 рассматривается конкретная краевая задача и ее численное решение согласно алгоритму метода Эйлера.

Глава 6 посвящена исследованию краевых задач вида (§6.1)

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(t)x(t) + f(t), \quad (48)$$

$$Ax(0) + Bx(T) = d, 0 \leq t \leq T, \quad (49)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(t)x(t) + f(t, x(t)), \quad (50)$$

$$Ax(0) + Bx(T) = d, 0 \leq t \leq T, \quad (51)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), \varepsilon), \quad (52)$$

$$Ax(0, \varepsilon) + Bx(T, \varepsilon) = d, 0 \leq t \leq T, \quad (53)$$

$$\varepsilon \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), \varepsilon), \quad (54)$$

$$Ax(0, \varepsilon) + Bx(T, \varepsilon) = d, 0 \leq t \leq T. \quad (55)$$

В §§6.2, 6.3 на основе аппарата численно-аналитического метода изучены вопросы существования и отыскания решений краевых задач (48), (49) и (50), (51).

Решение краевой задачи (48), (49) можно получить на основе формулы

$$x(t, c) = V(t)c + \int_0^t \left[V(t)V^{-1}(\tau)f(\tau) - \frac{1}{T} \int_0^T V(T)V^{-1}(s)f(s)ds \right] d\tau + \\ + \frac{t}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + V(T))c]. \quad (56)$$

где $V(t)$ - фундаментальная система решений системы $\frac{dx(t)}{dt} = P(t)x(t)$.

Выражение (56) образует семейство функций, зависящее от параметра c . Те значения параметра c , для которых справедливо равенство

$$\frac{t}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + V(T))c] - \frac{1}{T} \int_0^T V(T)V^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = 0$$

является решением задачи (48), (49).

1) $\det(B^{-1}A + V(T)) \neq 0$, то (невыврожденный случай), то формулой

$$x(t) = V(t)(B^{-1}A + V(T))^{-1}B^{-1}d + \int_0^T G(t, \tau)f(\tau)d\tau$$

определяется решение краевой задачи (48), (49), где

$$G(t, \tau) = \begin{cases} V(t)[E - (B^{-1}A + V(T))^{-1}V(T)]V^{-1}(\tau), & \text{if } 0 \leq \tau \leq t \leq T, \\ -V(t)(B^{-1}A + V(T))^{-1}V(T)V^{-1}(\tau), & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \leq T, \end{cases}$$

которое является функцией Грина краевой задачи

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(t)x(t) + f(t), \quad Ax(0) + Bx(T) = 0, \quad (57)$$

2) $\det(B^{-1}A + V(T)) = 0$ (вырожденный случай).

Теорема 11. Пусть краевая задача (57) допускает линейно независимые решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t)$ ($1 \leq k \leq n$).

Тогда соответствующая ей неоднородная задача (48), (49) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_0^T \langle x^*(\tau), V(T)f(\tau) \rangle d\tau = \langle x^*(0), B^{-1}d \rangle.$$

где $x = x^*(t)$ ($x^*(t) = (V^{-1}(t))^* x^*(0)$) - решение сопряженной краевой задачи

$\frac{dx(t)}{dt} = -P^*(t)x(t)$, $P^*x(0) + Qx^*(T)$, где матрицы A, B, P, Q связаны равенством $AP^* - BQ^* = 0$.

Пусть n -мерная вектор-функция $f(t, x)$ определена в области

$$(t, x) \in [0, T] \times S_\omega, S_\omega \subset R^n, \quad (58)$$

где D - ограниченная, замкнутая область евклидова пространства E_n и удовлетворяет условиям:

$$|f(t, x)| \leq M \quad (59)$$

$$|f(t, x') - f(t, x'')| \leq K|x' - x''| \quad (60)$$

Обозначим $\gamma = C_2d_1 + \left(\frac{T}{2}C_1C_3 + C_4\right)M + \beta$. Пусть

$$\gamma < \omega. \quad (61)$$

Предположим также, что

$$Q = \left(\frac{T}{2}C_1C_3 + C_4\right)K < 1. \quad (62)$$

Теорема 12. Пусть $x = x^0(t, c)$ решение краевой задачи (50), (51), удовлетворяющее в области (58) условиям (59) – (62). Тогда $x^0(t, c) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, c)$, равномерно относительно $(t, c) \in [0, T] \times S_\omega$

$$|x^0(t, c) - x_m(t, c)| \leq Q^m(1 - Q)^{-1}\gamma, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

где $x_m(t, c)$ определяется согласно алгоритму

$$\begin{aligned} x_0(t, c) &= c, \\ x_{m+1}(t, c) &= V(t)c + \int_0^t \left[V(t)V^{-1}(\tau)f(\tau, x_m(\tau, c)) - \frac{1}{T} \int_0^T V(T)V^{-1}(\tau)f(\tau, x_m(\tau, c))d\tau \right] d\tau + \\ &+ \frac{t}{T} \int_0^T [V(t) - V(T)]f(\tau, x_m(\tau, c))d\tau + \frac{t}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + V(T))c], \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Построение асимптотических решений краевых задач (52), (53) и (54), (55) сводятся к задаче построения асимптотических решений задачи Коши

$$\frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} = f(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon) - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon)dt + \frac{1}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x(0, \varepsilon)], \quad (63)$$

$$x(0, \varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1 + \dots + \varepsilon^n a_n + \dots \quad (64)$$

и задачи Коши

$$\varepsilon \frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} = f(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon) - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon)dt + \frac{\varepsilon}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x(0, \varepsilon)], \quad (65)$$

$$x(0, \varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1 + \dots + \varepsilon^n a_n + \dots \quad (66)$$

В §§6.4, 6.5 рассматриваются вопросы построения асимптотических решений задачи Коши (63), (64) и краевой задачи (52), (53).

Решение задачи Коши (65), (66) ищем в виде

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots, \quad (67)$$

Теорема 13. Пусть функция $f(t, x, \varepsilon)$ в области

$$(t, x, \varepsilon) \in [0, T] \times S_\omega \times [0, \varepsilon_0] \quad (S_\omega \subset E_n),$$

удовлетворяет условиям:

1) Функция $f(t, x, \varepsilon)$ аналитична по переменным x, ε ;

2) Существует фундаментальная система решений $V = V(t)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) \quad (A(t) \equiv f'_x(t, x_0(t), 0)),$$

где $x_0(t)$ - решение «вырожденной» системы, соответствующей системе (63);

3) Число 1 не лежит на спектре ядра

$$K_1(t, s) = \int_s^T \left(-\frac{1}{T} f'_x(s_1, x_0(s_1), 0) \right) V(s)V^{-1}(s_1)ds_1 \quad \text{и} \quad R(t, s) \quad \text{его резольвента};$$

4) $c_1 \gamma < 1$,

где $\gamma = \max_t \left| \int_0^t V(t)V^{-1}(s) \left(1 + \int_0^T R(s, s_1)ds_1 \right) ds \right|$, c_1 - постоянная Липшица для функции

$$\begin{aligned} g(t, u, \varepsilon) &= f(t, u + X_n, \varepsilon) - f'_x(t, x_0(t), 0)u - \\ &- \frac{1}{T} \int_0^T (f(t, u(t, \varepsilon) + X_n(t, \varepsilon), \varepsilon) - f'_x(t, x_0(t), 0)u(t, \varepsilon))dt + \\ &+ \frac{1}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)(u(0, \varepsilon) + X_n(0, \varepsilon))] - \frac{dX_n}{dt}. \end{aligned}$$

Тогда существуют такие постоянные $\bar{c} > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$, что для решения $x = x(t, x_0, \varepsilon)$ задачи (63), (64), и имеет место неравенство

$$|x(t, x_0, \varepsilon) - X_n(t, x_0, \varepsilon)| \leq \bar{c} \varepsilon^{n+1} \text{ при } 0 \leq t \leq T.$$

Из асимптотического разложения (67) решения краевой задачи (63), (64) следует, что оно зависит от неизвестных параметров $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ т.е.

$x = x(t, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, \varepsilon)$ (§6.5). Поэтому, если

$$\begin{aligned} \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, \varepsilon) &= 0, \\ \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, \varepsilon) &= \frac{1}{T} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)(a_0 + \varepsilon a_1 + \dots)] - \\ &\quad - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x(t, a_0, \dots, a_n, \dots, \varepsilon), \varepsilon) dt, \end{aligned}$$

то функция $x = x(t, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, \varepsilon)$ является решением краевой задачи (52), (53).

Теорема 14. Пусть выполнены условия теоремы 13. Если $\det(B^{-1}A + E) \neq 0$, то существует решение $x = x(t, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \dots, \varepsilon)$ краевой задачи (52), (53) и имеет место неравенство

$$|x(t, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \dots, \varepsilon) - X_n(t, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \dots, \varepsilon)| \leq \bar{c} \varepsilon^{n+1}$$

при $0 \leq t \leq T$.

Решение задачи Коши (65), (66) будем искать в виде (§6.6)

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots + \pi_0 x(\tau) + \varepsilon \pi_1 x(\tau) + \dots + \varepsilon^n \pi_n x(\tau) + \dots, \quad (68)$$

Теорема 15. Пусть $f(t, x, \varepsilon)$ в области $(t, x, \varepsilon) \in [0, T] \times G \times [0, \varepsilon_0]$ ($G \subset R^n$) удовлетворяет условиям:

1) Функция $f(t, x, \varepsilon)$ аналитична по переменным x, ε ;

2) $\det f_x(t, x_0(t), 0) \neq 0$, $x_0(t)$ - решение вырожденной системы и 1 не лежит на спектре ядра

$$K(t, s) = -\frac{1}{T} f_x^{-1}(t, x_0(t), 0) f_x(s, x_0(s), 0);$$

3) Существует фундаментальная система решений $W = W(t, s, \varepsilon)$ ($W(s, s, \varepsilon) = E$) - фундаментальная система решений однородной системы

$$\varepsilon \frac{dW}{dt} = A(t)W, \quad A(t) = f_x(t, x_0(t), 0)$$

которая удовлетворяет оценке

$$|W(t, s, \varepsilon)| \leq c \exp\left(-\frac{\delta}{\varepsilon}(t-s)\right) \text{ при } 0 \leq s \leq t \leq T;$$

$$4) \frac{c_1 c}{\delta} < 1.$$

Тогда существуют такие постоянные \bar{c} , $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$ такие, что для решения $x = x(t, x_0, \varepsilon)$ задачи (65), (66), имеет место неравенство

$$|x(t, x_0, \varepsilon) - X_n(t, x_0, \varepsilon)| \leq \bar{c} \varepsilon^{n+1} \text{ при } 0 \leq t \leq T.$$

Теорема 16. Пусть выполнены условия теоремы 15. Если $\det(B^{-1}A+E) \neq 0$, то для решения $x = x(t, a_0, a_1, \dots, \varepsilon)$ краевой задачи (54), (55) имеет место неравенство

$$|x(t, a_0, a_1, \dots, \varepsilon) - X_n(t, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \varepsilon)| \leq \bar{c} \varepsilon^{n+1} \text{ при } 0 \leq t \leq T.$$

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач. [Текст] / А.Т. Алымбаев – Бишкек: Издательство КНУ, 2015, – 205 с.
2. Алымбаев А.Т. Численная реализация метода интегро-дифференциальных уравнений для построения решения краевой задачи системы дифференциальных уравнений с малым параметром. [Текст] / А.Т.Алымбаев, Назира Сагынтай кызы // Материалы международной научно-практической конференции, приуроченной году нравственности, воспитания и культуры «Наука и образование: современные проблемы и перспективные направления инновационного развития» // Вестник ИГУ. –Каракол: 2017.–№44. –С. 20-24.
3. Алымбаев А.Т. Об одном приближенном методе исследования линейной краевой задачи для системы квазилинейных дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т. Алымбаев // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. –Бишкек: 2017. –№5. – С. 63-69.
4. Алымбаев А.Т. Об одном численно-аналитическом методе исследования периодической краевой задачи с ускоренной сходимостью. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Материалы третьей республиканской научной конференции, посвященной памяти профессора Р. Усубакунова. Вестник КГУ им. Арабаева. –2014. – №3. – С. 278-282.
5. Алымбаев А.Т. О нахождении периодических решений автономных систем интегро-дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т. Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1983. – Вып. 16. – С. 226-233.
6. Алымбаев А.Т. Двухточечная краевая задача с линейными граничными условиями [Текст] / А.Т.Алымбаев // Дифференциальные уравнения и их приложения. Тезисы докладов республиканской научной конференции. г. Ош, 1993.– С. 13.
7. Алымбаев А.Т. О периодических решениях нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984. –Вып. 17. – С. 85-93.
8. Алымбаев А.Т. Периодические решения одного класса интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев //

Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1985. – Вып. 18. – С. 219-226.

9. Алымбаев А.Т. Периодические решения системы автономных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1987. – Вып. 20. – С. 15-23.
10. Алымбаев А.Т. О периодических решениях дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып. 21. – С. 190-198.
11. Алымбаев А.Т. Периодические решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып. 21. – С. 116-123.
12. Алымбаев А.Т. Периодические решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1989. – Вып. 22. – С. 139-143.
13. Алымбаев А.Т. Краевая задача для нелинейных разностных систем. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып. 24. – С. 220-225.
14. Алымбаев А.Т. Методы Рунге-Кутты для нелинейных периодических систем. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1994. – Вып. 25. – С. 12-16.
15. Алымбаев А.Т. Двухточечные краевые задачи системы обыкновенных дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // IV республиканская научно-методическая конференция «Компьютера в учебном процессе и современные проблемы математики», часть II. – 1996. – С. 20-24.
16. Алымбаев А.Т. Краевая задача для системы сингулярно-возмущенных линейных дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1997. – Вып. 26. – С. 10-15.
17. Алымбаев А.Т. Интегральные уравнения численно-аналитического метода [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1997. – Вып. 26. – С. 20-26.
18. Алымбаев А.Т. Периодическое решение системы интегро-дифференциальных уравнений описывающих взаимодействия видов [Текст] / А.Т.Алымбаев, А.Б.Байзаков, Ж.А.Алымбаев // Материалы II международной научно-практической конференции: Теоретические и практические аспекты развития современной науки, Бишкек: 2013. – С. 246-250.

Статьи в зарубежных периодических изданиях, индексируемых в РИНЦ:

19. Алымбаев А.Т. Периодическое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Приволжский

- научный вестник.— Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 25.11.2016.—№12.—1(64). — С. 17-23, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
20. Алымбаев А.Т. Об одном интегральном уравнении смешанного типа. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Приволжский научный вестник.— Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 25.11.2016.—№12.—1(64). — С. 17-23, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
21. Алымбаев А.Т. Периодическое решение интегро-дифференциального уравнения с конечным последствием. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Приволжский научный вестник. — Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 27.05.2016. — №5 (57). — С. 10-14, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
22. Алымбаев А.Т. Нахождение периодического решения системы интегро-дифференциального уравнения с бесконечным последствием. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Приволжский научный вестник.— Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 27.05.2016. —№5 (57). —С. 5-9, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
23. Алымбаев А.Т. Численная реализация численно-аналитического метода с ускоренной сходимостью. [Текст] / А.Т.Алымбаев, А.Б. Байзаков // Приволжский научный вестник.— Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 28.07.2016. —№7 (59). — С. 10-16, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
24. Алымбаев А.Т. Об одном приближенном методе исследования краевых задач с ускоренной сходимостью. [Текст] / А.Т.Алымбаев, А.Б. Байзаков // Приволжский научный вестник. — Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 28.07.2016. — №7 (59). —С. 5-9, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
25. Алымбаев А.Т. Численные методы исследования краевых задач. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Приволжский научный вестник. — Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 18.04.2017. —№4 (68). — С. 12-18, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
26. Алымбаев А.Т. Численная реализация метода численного решения краевой задачи системы дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев// Приволжский научный вестник. — Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 18.04.2017. —№4 (68). — С. 5-11, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
27. Алымбаев А.Т. Периодическое решение системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последствием. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Проблемы современной науки и образования, — Иваново: Проблемы науки, 25.01.2017. — №3(85). — С. 6-16, импакт-фактор РИНЦ- 2,13.

РЕЗЮМЕ

Алымбаев Асангул Темиркулович

Численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: Краевая задача, периодическое решение, дифференциальное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, приближенный метод с ускоренной сходимостью, линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения, метод интегро-дифференциальных уравнений.

Объект исследования:

Периодические и двухточечные краевые задачи системы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Цель работы:

- исследование вопроса существования и построения периодических решений системы квазилинейных ИДУ с конечным последствием и ИДУ общего вида бесконечным последствием, обладающий свойством автономности;
- изучение задачи разрешимости ИУ смешанного типа и построения приближенных решений;
- изучение вопроса построения решения краевых задач для ДУ с линейными не разделяющимся граничными условиями;
- построения асимптотического разложения по степеням малого параметра решения краевых задач для ДУ с регулярным и сингулярным возмущением.

Методы исследования:

Для достижения цели и решения задач диссертации, главным образом применяются аппараты численно-аналитического метода, предложенный Самойленко А.М., теория интегро-дифференциальных уравнений разработанный Быковым Я.В., теория метода малого параметра, теория метода пограничных функций и аппарат метода Ньютона-Канторовича, обеспечивающий ускоренную сходимость приближенного решения к точному решению краевой задачи.

Научная новизна:

- Впервые численно-аналитический метод А.М. Самойленко применен и обоснован для исследования периодических решений автономных СИДУ с конечным и бесконечным последствием;

- Разработан и математически обоснован метод последовательных приближений обеспечивающий ускоренной сходимостью приближенных решений краевых задач к точному решению СДУ;
- Изучены вопросы существования и единственности решения СИУ именуемое как СИУ в численно-аналитическом методе;
- Методом сведения краевой задачи для СДУ с регулярным и сингулярным возмущением относительно малого параметра, к задаче Коши для СИДУ построена асимптотическое решение краевой задачи;
- Изучены вопросы существования и построение краевых задач линейных и квазилинейных СДУ;
- Разработана модификация численного метода Рунге-Кутта для построения численных решений краевых задач СДУ.

РЕЗЮМЕ

Алымбаев Асангул Темиркулович

Дифференциалдык, интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн чектик маселелерди изилдөөнүн сан – аналитикалык жана асимптотикалык ыкмалары

Физика – математика илимдерини докторлук окумуштуу даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертация 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу адистиги.

Урунтуктуу сөздөр: Чектик маселелер, мезгилдик чыгарылыштар, дифференциалдык теңдеме интегро – дифференциалдык теңдеме, чыгарылышка тездетилип жыйналуучу ыкма, сызыктуу жана квазисызыктуу дифференциалдык теңдеме, интегро – дифференциалдык теңдемелер ыкмасы.

Изилдөөнүн объектиси: дифференциалдык, интегро – дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн мезгилдик жана эки чекиттүү чектик маселелер.

Изилдөө максаты: Автономдук касиетке ээ болгон интегро – дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылышынын жашашын жана аны табуу үчүн А.М. Самойленконун сан – аналитикалык ыкмасын негиздөө. Аралаш тектеги интегралдык теңдемелердин чыгарылышынын жашашын жана аны тургузуу маселелерин изилдөө. Дифференциалдык теңдемелердин чыгарылышына тездетилип жыйналуучу ылдамдыкты камсыз кылган ыкманы негиздөө. Чектик маселелердин сандык чыгарылышы үчүн Рунге – Куттанын ыкмасынын модификациясын негиздөө.

Изилдөөнүн ыкмалары: Самойленко А.М сунуштаган сан-аналитикалык ыкманын аппараты, Быков Я.В иштеп чыккан интегро – дифференциалдык теңдемелердин теориясы, кичине параметр теориясынын ыкмасы, аймактар функциясынын теориясы, чектик маселелердин так чыгарылышына, жакындаштырылган чыгарылыштын тездетилип жыйналышын камсыз кылган Ньютон – Канторовичтин ыкманын аппараты.

Илимий жанылыктар:

- Биринчи жолу автономдук касиетке ээ болгон интегро – дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылышын изилдөөдө Самойленко А.М. сан – аналитикалык ыкмасы колдонулуп жана негизделди;
- Чектик маселенин так чыгарылышына жакындаштырылган чыгарылыштын тездетилип жыйналуусун камсыз кылган ыкманы иштеп чыгуу жана негиздөө;
- Сан – аналитикалык ыкманын интегралдык теңдемеси деп аталуучу интегралдык теңдеменин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын изилдөө;
- Сызыктуу жана квазисызыктуу чектик маселеленин чыгарылышын жашашы жана аны тургузуу маселелерин изилдөө;
- Регулярдуу жана сингулярдуу дүүлүктүрүлгөн теңдемелерди изилдөө үчүн интегро – дифференциалдык теңдемелерди иштеп чыгуу жана негиздөө;
- Дифференциалдык теңдеме үчүн чектик маселенин сандык чыгарылышын табууну камсыз кылган Рунге – Куттанын ыкмасынын модификациясын иштеп чыгуу.

SUMMARY

Alymbaev Asangul Temirkulovich

Numerical-analytical and asymptotic methods for investigating boundary-value problems of differential, integro-differential equations

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.01.02 - differential equations, dynamic systems and optimal control.

Keywords: boundary value problem, periodic solution, differential equation, integro-differential equation, approximate method with accelerated convergence, linear and quasilinear differential equations, the method of integro-differential equations.

Objects of research:

Periodic and two-point boundary value problems of a system of differential and integro-differential equations.

Objective:

- study of the existence and construction of periodic solutions of a system of quasilinear IMU with finite aftereffect and an IMU of a general kind with an infinite aftereffect, possessing the property of autonomy;

- study of the problem of solvability of mixed type IC and construction of approximate solutions;
- study of the problem of constructing a solution of boundary value problems for DM with linear non-separating boundary conditions;
- the construction of an asymptotic expansion in powers of the small parameter of the solution of boundary value problems for DW with a regular and singular perturbation.

Methods of research:

To achieve the goal and solve the problems of the dissertation, the apparatus of the numerical-analytical method proposed by Samoilenko AM, the theory of integro-differential equations developed by Bykov YV, the theory of the small parameter method, the theory of the method of boundary functions and the apparatus of the Newton- Kantorovich, which ensures the accelerated convergence of the approximate solution to the exact solution of the boundary value problem.

Scientific novelty:

- For the first time the numerical-analytical method Samoilenko was applied and justified for the study of periodic solutions of autonomous SDEs with finite and infinite aftereffect;
- The method of successive approximations is developed and mathematically justified, which ensures the accelerated convergence of approximate solutions of boundary value problems to the exact solution of the SDE;
- The questions of the existence and uniqueness of the SIC solution are considered as the SIC in the numerical-analytical method;
- The method of reducing the boundary value problem for a CDS with a regular and singular perturbation with respect to a small parameter, to the Cauchy problem for SIDE, we construct an asymptotic solution of the boundary value problem;
- Existence questions and construction of boundary value problems of linear and quasilinear SDEs are studied;
- A modification of the Runge-Kutta numerical method for constructing numerical solutions of the boundary value problems of the SDE was developed.

At 2005-