НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Ж. БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.17.560

На правах рукописи
УДК 517.9

РУСТАМОВА ДИНАРА КОШЕЕВНА

РЕШЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.02-дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек-2018

Работа выполнена на кафедре «Прикладная информатика» Кыргызского государственного университета имени И. Арабаева

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Каракеев Т. Т.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Асанов А.**
кандидат физико-математических наук, доцент **Алымбаев А. Т.**

Ведущая организация: Ошский государственный университет
Адрес: г. Ош, ул. Ленина 331

Защита диссертации состоится «25» июня 2018 года в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01. 17. 560 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус №6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомится в Центральной научной библиотеке и на сайте ИМ НАН КР www.math.aknet.kg, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат опубликован «____» _____________ 2018г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., профессор Байзаков А. Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, где связаны между собой значения неизвестных функций и ее производных в различных точках границы, имеют важные приложения и встречаются в качестве математической модели реальных физических процессов. Это задачи распределения влаги в почве, задачи математической биологии, кристаллических полупроводников и др.

Развитие теории нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных были начаты в работах А. В. Бицадзе и А. А. Самарского. Исследованию таких задач посвящены работы А. М. Нахушева, Ю. А. Митропольского и Л. Б. Урманчевой, Н. И. Ионкина, М. Х. Шханукова, Т. И. Кигурадзе, А. И. Кожанова, О. А. Репина, Ю. Т. Сильченко, А. Сопуева, Т. Т. Каракеева, Л. С. Пулькиной, А. Т. Асановой и др.

Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных в определенной постановке могут быть приведены к интегральным уравнениям Вольтерра, в том числе интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода. Теория данных задач развивается в направлении применения методов регуляризации, основы которых были заложены в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова.

Регуляризация интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и условия их разрешимости исследованы в работах Л. И. Панова, Я. Янно, Н. А. Магницкого, А. Асанова, А. М. Нахушева, Т. Д. Омурова, Т. Т. Каракеева, М. В. Булатова и др. Вопросы численного решения методом конечных сумм изучены в работах Т. Т. Каракеева.

Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных исследованы в случае обратимости объединённого оператора при неизвестных функциях в нелокальных условиях. Данные задачи в случае необратимости объединённого оператора при неизвестных функциях в нелокальных условиях мало исследованы, не разработаны методы регуляризации, не изучены вопросы численного решения.

Цель и задачи исследования. Исследование вопросов регуляризации и численного решения дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями, интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.

Методы исследования. Основными методами являются метод регуляризации, метод интегральных уравнений, метод функции Римана, метод конечных сумм, метод сеток.

Научная новизна работы.

- разработан и обоснован метод регуляризации нелокальных краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в случае необратимости объединенного оператора при неизвестных функциях в нелокальных условиях;

− установлены достаточные условия регуляризируемости и единственности решения нелокальных краевых задач для уравнения Бенджамина-Бона-Махони;
− обоснован метод регуляризации интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с оператором умножения на непрерывную неубывающую функцию и непрерывным ядром;
− разработан и обоснован метод численного решения нелокальной краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер и могут быть применена для решения нелокальных краевых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных более высокого порядка, при исследовании задач теплофизики, теории распространения длинных волн, кристаллических полупроводников.

Личный вклад соискателя. В совместных работах постановка задач принадлежат научному руководителю, разработка и обоснование методов, доказательство теорем и все научные выводы принадлежат соискателю.

Апробация результатов исследований. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на международных и межвузовских научных конференциях:
− Научно-практической конференции молодых ученых Кыргызстана «Старт в большую науку», Бишкек, 2013;
− X mezinárodní vědecko - praktická Konference, Praha, 2013/2014;
− Международной конференции, посвященной 70-летию член-корреспондента НАН КР К. Алымкулова. Ош, 2013;
− V Congress of the TURKIC WORLD MATHEMATICIANS, Kyrgyzstan, “Issyk-Kul Aurora”, 2014;
− Межвузовской научно-практической конференции молодых ученых «Наука XXI века: новый подход», Бишкек, 2014;
− 1st European-Middle Asian Conference on Computer Modelling, Kyrgyzstan, Issyk-Kul, 2015.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 научных статьях [1]-[16], в том числе в реферируемых журналах Кыргызской Республики - 10, в реферируемых зарубежных журналах - 6, из них в единоличном авторстве - 4. По материалам второй главы опубликованы 10 статьей, по материалам третьей главы опубликованы 6 статьей. В совместных работах постановка задач принадлежит научному руководителю, полученные основные результаты и оценки - соискателю. В [8,16] постановка задач принадлежит научному руководителю, доказательство утверждений в случае неубывающей коэффициентной функции интегральных уравнений Вольтерра третьего рода - соискателю.

Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Исследование по теме диссертации проводилось в рамках утвержденной тематики «Приближенные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений» кафедры прикладной информатики КГУ им. И. Арабаева.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, 3-х глав, выводов и списка использованных источников 81 наименований. Объем диссертации составляет 115 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе рассматривается краткий обзор работ других авторов по теме диссертации и приводятся известные результаты, используемые в работе.

Вторая глава состоит из 4-х разделов и рассматриваются нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Полученные результаты обобщены для уравнения Бенджамина-Бона-Махони с нелокальными краевыми условиями, интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.

В разделе 2.1 рассматривается дифференциальное уравнение

$$w_{xt}(x,t)=P(x,t)w(x,t)+f(x,t,w(x,t),w_t(x,t)), \tag{1}$$

с условиями

$$w(0,t)=\sigma(t)+\varphi_0, \tag{2}$$

$$A(x)w(x,0)+C(x)w(x,T)=q(x). \tag{3}$$

Здесь известные функции удовлетворяют требованиям:

а) $A(x), C(x), q(x)\in C[0,b]$, $p(x)\equiv A(x)+C(x)-$ неубывающая функция, $p(0)=0$, $p(x)>0, \forall x\in(0,b]$, $\sigma(t)\in C^1[0,T]$, $\sigma(0)=0$, $C(0)\sigma(T)=q(0)$, φ_0 – неизвестный параметр;

б) $P(x,t)\in C(D)$, $f(x,t,w,z)\in C(D\times R^1\times R^1)$, $D=[0,b]\times[0,T]$, $f(x,t,w,z)$ - подчиняется условию Липшица по w, z с коэффициентами $0<L_{1f},L_{2f}=const$;

в) $G(x)\equiv C_0p(x)+K(x,x)\geq d_1>0$, $K(x,s)\equiv C(x)P_0(s)$, $P_0(s)=\int\limits_0^T P(s,\tau)d\tau$,

$K(x,s)$- является липшицевой по x в области $D_1=\{(x,s)/0\leq s\leq x\leq b\}$ $0<C_0,\ d_1=const$.

С помощью подстановки $w(x,t)=\varphi(x)+\int\limits_0^t z(x,\tau)d\tau$ задача (1)-(3) приводится к системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} z(x,t)=\sigma'(t)+\int\limits_0^x P(s,t)\varphi(s)ds+\int\limits_0^x P(s,t)\int\limits_0^t z(s,\tau)d\tau ds+\int\limits_0^x f\left(s,t,\varphi(s)+\int\limits_0^t z(s,\tau)d\tau, z(s,t)\right)ds, \\ p(x)\varphi(x)+\int\limits_0^x G(s)\varphi(s)ds=\int\limits_0^x L(x,s)\varphi(s)ds-\int\limits_0^x\int\limits_0^T K_0(x,s)P(s,t)\int\limits_0^t z(s,\tau)d\tau dtds- \\ -\int\limits_0^x\int\limits_0^T K_0(x,s)f\left(s,t,\varphi(s)+\int\limits_0^t z(s,\tau)d\tau, z(s,t)\right)dtds+g(x). \end{cases} \quad (4)$$

Регуляризация системы интегральных уравнений (4) построено в виде

$$\begin{cases} z_\varepsilon(x,t)=\sigma'(t)+\int\limits_0^x P(s,t)\varphi_\varepsilon(s)ds+\int\limits_0^x P(s,t)\int\limits_0^t z_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds+ \\ +\int\limits_0^x f\left(s,t,\varphi_\varepsilon(s)+\int\limits_0^t z_\varepsilon(s,\tau)d\tau, z_\varepsilon(s,t)\right)ds, \\ (\varepsilon+p(x))\varphi_\varepsilon(x)+\int\limits_0^x G(s)\varphi_\varepsilon(s)ds=\int\limits_0^x L(x,s)\varphi_\varepsilon(s)ds-\int\limits_0^x\int\limits_0^T K_0(x,s)P(s,t)\int\limits_0^t z_\varepsilon(s,\tau)d\tau dtds- \\ -\int\limits_0^x\int\limits_0^T K_0(x,s)f\left(s,t,\varphi_\varepsilon(s)+\int\limits_0^t z_\varepsilon(s,\tau)d\tau, z_\varepsilon(s,t)\right)dtds+\varepsilon\varphi(0)+g(x), \end{cases} \quad (5)$$

где ε малый параметр из интервала $(0,1)$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия *а-в*, $q_0=\max(q_1,q_2)<1$ и $\varphi(x)\in C^1[0,b]$. Тогда, при $\varepsilon\to 0$, решение системы уравнений (5) равномерно сходится к решению системы уравнений (4). Причем имеет место оценка

$$\|z_\varepsilon(x,t)-z(x,t)\|_{C(D)}+\|\varphi_\varepsilon(x)-\varphi(x)\|_{C[0,b]}\le(1-q_0)^{-1}d_2\varepsilon,\quad 0<d_2=const.$$

Здесь $q_1=q_{11}+q_{21},\quad q_2=q_{12}+q_{22},\quad q_{12}=b\left(\|P(x,t)\|_{C(D)}+\|P(x,t)\|_{C(D)}L_{1f}T+L_{2f}\right),$

$q_{21}=d_1^{-1}[\frac{b}{2}(3+e^{-1})(L_K+C_0K_1)+bTL_{K_0}+T\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}+e^{-1}T\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}L_{1f}],$

$q_{22}=d_1^{-1}T[(1+b)\frac{T}{2}L_{K_0}\|P(x,t)\|_{C(D)}+e^{-1}\frac{T}{2}\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\|P(x,t)\|_{C(D)}+\left(bL_{K_0}+\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\right)\times$
$\times\left(L_{1f}T+L_{2f}\right)+e^{-1}\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\left(L_{1f}T+L_{2f}\right), q_{11}=b\left(\|P(x,t)\|_{C(D)}+L_{1f}\right).$

Следствие 1. При выполнении условий *а-в* решение системы уравнения (4) единственно в (Ω_1,Ω_2).

Ω_1 и Ω_2 - шары с радиусами $0<r_1,r_2=const$ и центрами $0<\varphi_0,z_0=const$, соответственно.

Теорема 2. Если выполняются условия теоремы 1, то для функций $w(x,t)$, $w_\varepsilon(x,t)$, и их производных $w_t(x,t)$, $w_{xt}(x,t)$, $w_{\varepsilon t}(x,t)$, $w_{\varepsilon xt}(x,t)$, при $\varepsilon\to 0$, имеет место равномерная сходимость $w_\varepsilon(x,t)\to w(x,t)$, $w_{\varepsilon t}(x,t)\to w_t(x,t)$, $w_{\varepsilon xt}(x,t)\to w_{xt}(x,t)$.

В разделе 2.2 рассмотрено линейное дифференциальное уравнение

$$w_{xt}(x,t)=P(x,t)w(x,t)+M(x,t)w_t(x,t)+f(x,t), \quad (6)$$

с условиями (2), (3) и $P(x,t),\ f(x,t),\ M(x,t)\in C(D),\ \ \sigma(t)\in C^1[0,T],$ функции $P(x,t),\ M(x,t)$ являются липшицевой по первому аргументу, а также выполняются условия *а*), *в*) раздела 2.1 и $A(0)\sigma(0)+C(0)\sigma(T)=q(0).$ Для задачи (6), (2), (3) построена регуляризирующая система интегральных уравнений и доказаны сходимость решения регуляризованной системы к решению задачи (6), (2), (3). В этом же разделе показана, что задача (2), (3) для дифференциального уравнения

$$w_{xt}(x,t)+a(x,t)w_x(x,t)+m(x,t)w_t(x,t)+c(x,t)w(x,t)=f(x,t) \tag{7}$$

методом функции Римана может быть приведена к линейному интегральному уравнению Вольтерра третьего рода и решение задачи единственно в паре C(D), C[0,b].

В разделе 2.3, полученные результаты обобщены для уравнения Бенджамина-Бона-Махони

$$w_{xxt}(x,t)+a_1w_t(x,t)+a_2w_x(x,t)+a_3w(x,t)w_x(x,t)=f(x,t) \tag{8}$$

с нелокальными условиями

$$\begin{aligned} &w(0,t)=0,\\ &w_x(0,t)=\psi,\\ &A(x)w(x,0)=C(x)w(x,T)+q(x), \end{aligned} \tag{9}$$

где $a_i=const,\ i=1,2,3,\ \psi$ - неизвестный параметр, известные функции $A(x), C(x),\ q(x),\ f(x,t)$ подчиняются условию:

а) $f(x,t)\in C(D),\ D=[0,b]\times[0,T],\ A(x),C(x),q(x)\in C^2[0,b],\ C(0)=0,\ q^{(i)}(0)=0,$ $i=0,1, G(x)=A'(x)-C'(x)\ge d_1, 0<d_1=const,\ p(x)=A(x)-C(x),\ p(0)=0,\ p(x)-$ неубывающая функция, $p(x)>0,\quad \forall x\in(0,b].$

Задача (8), (9) используя подстановку $w(x,t)=\int\limits_0^x u(s,t)ds$ и функцию Римана уравнения $u_{xt}(x,t)+a_2u(x,t)=0,$ сводится к системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} u(x,t)=\varphi(x)+\int\limits_0^t z(x,\tau)d\tau,\\ z(x,t)\equiv(F[\varphi,z])(x,t),\\ p(x)\varphi(x)+\int\limits_0^x G(s)\varphi(s)ds\equiv(B[\varphi,z])(x)+m(x)\varphi(0), \end{cases} \tag{10}$$

где $(F[\varphi,z])(x,t)=-R_t(x,t,0,0)\varphi(0)-\int\limits_0^x R_{st}(x,t,s,0)\varphi(s)ds-\int\limits_0^t R_{\tau t}(x,t,0,\tau)\psi d\tau+$

$$+\int\limits_0^x[f(s,t)-a_1\int\limits_0^s z(\xi,t)d\xi-a_3[\varphi(s)+\int\limits_0^t z(s,\tau)d\tau]\int\limits_0^s[\varphi(\xi)+\int\limits_0^t z(\xi,\tau)d\tau]d\xi]ds+$$

$$+\int_0^x\int_0^t R_t(x,t,s,\tau)[f(s,\tau)-a_1\int_0^s z(\xi,t)d\xi-a_3[\varphi(s)+\int_0^\tau z(s,\sigma)d\sigma]\times$$

$$\times\int_0^s\int_0^s[\varphi(\xi)+\int_0^\tau z(\xi,\sigma)d\sigma]]d\tau ds,$$

$$(B[\varphi,z])(x)=\int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds+q'(x)+C'(x)\int_0^x\int_s^x\int_0^T R(\xi,T,s,\tau)[f(s,\tau)-$$

$$-a_1\int_0^s z(\eta,\tau)d\eta-a_3[\varphi(s)+\int_0^\tau z(s,\sigma)d\sigma]\int_0^s[\varphi(\eta)+\int_0^\tau z(\eta,\sigma)d\sigma]d\eta]d\tau d\xi ds+$$

$$+C(x)\int_0^x\int_0^T[f(s,\tau)-a_1\int_0^s z(\eta,\tau)d\eta-a_3[\varphi(s)+\int_0^\tau z(s,\sigma)d\sigma]\int_0^s[\varphi(\eta)+\int_0^\tau z(\eta,\sigma)d\sigma]]d\tau ds,$$

$$m(x)=xC'(x)-C'(x)\int_0^x R(s,T,0,0)ds-C'(x)\int_0^x\int_0^T R_\tau(x,T,0,\tau)d\tau ds+$$

$$+C(x)(1-R(x,T,0,0))-C(x)\int_0^T R_\tau(x,T,0,\tau)d\tau.$$

Регуляризация системы (10) построена в виде

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x,t)=\varphi_\varepsilon(x)+\int_0^t z_\varepsilon(x,\tau)d\tau, \\ z_\varepsilon(x,t)\equiv(F[\varphi_\varepsilon,z_\varepsilon])(x,t), \\ [\varepsilon+p(x)]\varphi_\varepsilon(x)+\int_0^x G(s)\varphi_\varepsilon(s)ds\equiv(B[\varphi_\varepsilon,z_\varepsilon])(x)+[\varepsilon+m(x)]\varphi(0), \end{cases} \tag{11}$$

Доказана равномерная сходимость, при $\varepsilon\to 0$, решения системы (11) к решению системы (10), получена оценка

$$\|z_\varepsilon(x,t)-z(x,t)\|_{C(D)}+\|\varphi_\varepsilon(x)-\varphi(x)\|_{C[0,b]}\le N_9\varepsilon,\ 0<N_9=const.$$

В разделе 2.4 обоснован метод регуляризации для линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с неубывающей коэффициентной функцией вне интеграла и непрерывным ядром, который на диагонали обращается в нуль в некоторых точках отрезка. Изучен применение этого метода регуляризации для нелинейных случаев уравнения Вольтерра третьего рода.

Рассматривается уравнение

$$p(x)\varphi(x)+\int_0^x K(x,s)\,\varphi(s)ds=g(x) \tag{12}$$

где известные функции подчиняются условию

г) $K(x,s)\in C(D_1),\ D_1=\{(x,s)/0\le s\le x\le b\},\ \ K(x,x)\ge 0,\ \ p(x),g(x)\in C[0,b],$
$p(0)=g(0)=0,\ p(x)>0,\ \forall x\in(0,b],\ G(x)\equiv C_0p(x)+K(x,x)\ge d_1>0,$
$0<C_0,\ \ d_1=const$, $p(x)$ - неубывающая функция

Действуя оператором $I + C_0 J$, где I – единичный оператор, J – оператор Вольтерра $(J\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(s)ds,\ \ 0 < C_0 = const$, из уравнения (12) получено уравнение

$$p(x)\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s)ds = \int_0^x L(x,s)\varphi(s)ds + \mu(x), \tag{13}$$

где $L(x,s) = K(s,s) - K(x,s) - C_0\int_s^x K(\nu,s)d\nu,\ \ \mu(x) = g(x) + C_0\int_0^x g(s)ds$.

Доказана равномерная сходимость решения регуляризованного уравнения

$$(\varepsilon + p(x))\varphi_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s)\varphi_\varepsilon(s)ds = \int_0^x L(x,s)\varphi_\varepsilon(s)ds + \mu(x) + \varepsilon\varphi_\delta(0), \tag{14}$$

где ε малый параметр из интервала (0,1), величина $\varphi_\delta(0)$, такая что $|\varphi_\delta(0) - \varphi(0)| \le \delta(\varepsilon) \to 0,\ \varepsilon \to 0$.

Теорема 3. Пусть выполняется условие *г)* и уравнение (13) имеет решение $\varphi(x) \in C^\gamma[0,b],\ 0 < \gamma \le 1$. Тогда, при $\varepsilon \to 0$, решение уравнения (14) равномерно сходится к решению уравнения (13). Причем имеет место оценка

$$\|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0,b]} \le d_6[d_5\varepsilon^\gamma + \delta(\varepsilon)],$$

$d_5 = d_1^{-(1+\gamma)}d_0(d_3 + d_4),\qquad d_3 = \int_0^\infty \sigma^\gamma e^{-\sigma}d\sigma,\qquad d_6 = \exp\left(d_1^{-1}\left(2 + e^{-1}\right)(L_K + C_0K_1)b\right),$ $d_4 = \sup\limits_{\sigma\ge 0}\left(\sigma^\gamma e^{-\sigma}\right),\quad K_1 = \max\limits_{D_1}|K(x,s)|,\ 0 < L_K$ – коэффициент Липшица функции $K(x,s)$ по переменной x.

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 3 решение уравнения (13) единственно в $C^\gamma[0,b],\ 0 < \gamma \le 1$.

Теорема 4. Пусть выполняется условие *г)* и уравнение (12) имеет решение $\varphi(x) \in C[0,b]$. Тогда при $\varepsilon \to 0$, решение уравнения (14) равномерно сходится к решению уравнения (12) и

$$\|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\|_{C[0,b]} \le [4(d_1 e)^{-1}\|\varphi(x)\|_{C[0,b]}\varepsilon^{1-\beta} + \omega_\varphi(\varepsilon^\beta) + \delta(\varepsilon)]d_6,$$

где $d_6 = \exp\left(d_1^{-1}\left(2 + e^{-1}\right)(L_K + C_0K_1)b\right),\ \omega_\varphi(\varepsilon^\beta) = \sup\limits_{|x-\nu|\le\varepsilon^\beta}|\varphi(x) - \varphi(\nu)|,\ x,\nu \in [0,b]$.

Следствие 3. При выполнении условия теоремы 4 решение уравнения (12) единственно в пространстве $C[0,b]$.

В третьей главе рассматриваются вопросы численного решения нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений Вольтера третьего рода.

В разделе 3.1, для простоты изложения, рассмотрены вопросы численного решения частного случая уравнения (1):

$$w_{xt}(x,t) = P(x,t)w(x,t) + f(x,t), \tag{15}$$

с условиями

$$w(0,t) = \sigma(t) + \varphi_0,\ \ A(x)w(x,0) + C(x)w(x,T) = q(x). \tag{16}$$

Для известных функций выполняются условия *а*) и *в*) раздела 2.1, причем $A(x), C(x)\in C^2[0,b],\ q(x)\in C^1[0,b]$.

На отрезке $[0,b]$ и $[0,T]$ введем равномерные сетки $\omega_h=\{x_i=ih, i=0..n, b=nh\}$, $\omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0..l, T=n_0\tau\}$, n, n_0- натуральные числа. Пространство сеточных функций $z_i^j=z(x_i,t_j)$, $(x_i,t_j)\in\omega_{h,\tau}=\omega_h\times\omega_\tau$ обозначим через $C_{h,\tau}$ с нормой $\|z_i^j\|_{C_{h,\tau}}=\max\limits_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le n_0}}|z_i^j|$, пространство сеточных функций $\varphi_i=\varphi(x_i)$ обозначим через C_h с нормой $\|\varphi_i\|_{C_h}=\max\limits_{0\le i\le n}|\varphi_i|$.

На основе регуляризованной системы уравнений

$$\begin{cases} w_\varepsilon(x,t)=\varphi_\varepsilon(x)+\int\limits_0^t z_\varepsilon(x,y)dy,\\ z_\varepsilon(x,t)=\sigma_0(t)+\int\limits_0^x P(s,t)\varphi_\varepsilon(s)ds+\int\limits_0^x P(s,t)\int\limits_0^t z_\varepsilon(s,y)dyds+\int\limits_0^x f(s,t)ds,\\ \varphi_\varepsilon(x)=-\dfrac{1}{\varepsilon+p(x)}\int\limits_0^x \exp\left(-\int\limits_s^x\dfrac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}d\xi\right)\dfrac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}\left\{\int\limits_0^s[K(\xi,\xi)-K(s,\xi)]\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi-\right.\\ -C_0\int\limits_0^s\left(\int\limits_\xi^s K(\nu,\xi)d\nu\right)\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi-\int\limits_0^x[K(\xi,\xi)-K(x,\xi)]\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi+C_0\int\limits_0^x\left(\int\limits_\xi^x K(\nu,\xi)d\nu\right)\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi+\\ +\int\limits_0^x K(\xi,\xi)(1+C_0(x-\xi))\int\limits_0^T z_\varepsilon(\xi,y)dyd\xi-\int\limits_0^s K(\xi,\xi)(1+C_0(s-\xi))\int\limits_0^T z_\varepsilon(\xi,y)dyd\xi+\\ \left.+Q(s)-Q(x)\right\}ds+\dfrac{1}{\varepsilon+p(x)}\exp\left(-\int\limits_0^x\dfrac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\left\{\int\limits_0^x[K(s,s)-K(x,s)]\varphi_\varepsilon(s)ds-\right.\\ \left.-C_0\int\limits_0^x\left(\int\limits_s^x K(\nu,s)d\nu\right)\varphi_\varepsilon(s)ds-\int\limits_0^x K(s,s)(1+C_0(x-s))\int\limits_0^T z_\varepsilon(s,y)dyds+\varepsilon\varphi(0)+Q(x)\right\}, \end{cases}\tag{17}$$

применяя при $x=x_i, i=0..n,$ для интегралов в (17) квадратурную формулу правых прямоугольников, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$w_{\varepsilon,i}^j=\varphi_{\varepsilon,i}+\tau\sum_{j=1}^{m_0}z_{\varepsilon,i}^j,$$

$$z_{\varepsilon,i}^j=\sigma_0^j+h\sum_{k=1}^i P_k^j\varphi_{\varepsilon,k}+h\sum_{k=1}^i P_k^j\tau\sum_{\rho=1}^j z_{\varepsilon,k}^\rho+h\sum_{k=1}^i f_k^j,$$

$$\varphi_{\varepsilon,i}=-\frac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{k=1}^{i-1}\exp\left(-h\sum_{l=k+1}^i\frac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\left[h\sum_{l=1}^{k-1}[K_{l,l}-K_{k,l}]\varphi_{\varepsilon,l}-C_0h\sum_{l=1}^{k-1}h\sum_{m=l+1}^{k}K_{m,l}\varphi_{\varepsilon,l}-\right.$$

$$-h\sum_{l=1}^{i-1}[K_{l,l}-K_{i,l}]\varphi_{\varepsilon,l}+C_0h\sum_{l=1}^{i-1}h\sum_{m=l+1}^{i}K_{m,l}\varphi_{\varepsilon,l}+h\sum_{l=1}^{i-1}K_{l,l}\left(1+C_0\left(x_i-x_l\right)\right)\tau\sum_{j=1}^{m_0}z_{\varepsilon,l}^{j}-$$

$$\left.-h\sum_{l=1}^{k-1}K_{l,l}\left(1+C_0\left(x_k-x_l\right)\right)\tau\sum_{j=1}^{m_0}z_{\varepsilon,l}^{j}+Q_k-Q_i\right\}+\frac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{k=1}^{i}\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\right)\left[h\sum_{k=1}^{i-1}[K_{k,k}-\right.$$

$$\left.-K_{i,k}]\varphi_{\varepsilon,k}-C_0h\sum_{k=1}^{i-1}h\sum_{m=k+1}^{i}K_{m,k}\varphi_{\varepsilon,k}-h\sum_{k=1}^{i-1}K_{k,k}\left(1+C_0\left(x_i-x_k\right)\right)\tau\sum_{j=1}^{m_0}z_{\varepsilon,k}^{j}+\varepsilon\varphi_{h,0}+Q_i\right\}, \quad (18)$$

где $Q_i=g_i-h\sum_{k=1}^{i}\tau\sum_{j=1}^{m_0}C_k f_k^j-C_0h\sum_{k=1}^{i}\left(x_i-x_k\right)\tau\sum_{j=1}^{m_0}C_k f_k^j,\quad g_i=q_i+C_0h\sum_{k=1}^{i}q_k,$

$\varphi_{h,0}=\left(hK_{11}+Q_1\right)/\left(p_1+hG_1\right).$

Доказана следующая теорема.

Теорема 5. При выполнении условий *а-в*, $q_0<1$ и $\varepsilon=O(h^{\alpha}),\ 0<\alpha\le 1/2$, решение системы (18) при $h\to 0,\ \tau\to 0$ равномерно сходится к точному решению задачи (15), (16), причем имеет место оценка

$$\left|w_{\varepsilon,i}^{j}-w_i^j\right|\le M_1\tau+M_2h+M_3h^{\alpha}+M_4h^{1-\alpha}+M_5h^{2-\alpha},\ \ 0<M_i=const,\quad i=\overline{1,5}.$$

Величина $q_0=P_0+M_0,\ P_0=b\left\|P(x,t)\right\|_{C(D)}\max(1,T),\ M_0=\max\left(T_{12},T_{13}\right),$

$T_{12}=d_1^{-1}\left(d_4d_5+e^{-1}\right)K_2b,\ d_4=\max\limits_{x\in[0,b]}\left|G(x)\right|,\ d_5=\sup\left|\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{(x_i-x_k)d_1}{\varepsilon+p_i}\right)\exp\left(-\frac{(x_i-x_k)d_1}{\varepsilon+p_i}\right)\right|,$

$K_2=K_1+C_0K_0,\ K_1=\max\limits_{D_1}\left|K_x(x,s)\right|,\ K_0=\max\limits_{D_1}\left|K(x,s)\right|,$

$T_{13}=d_1^{-1}T[d_4d_5\left(1+2bC_0\right)+e^{-1}\left(1+C_0b\right)\left\|K(x,x)\right\|_{C[0,b]}].$

В разделе 3.2 обоснован метод численного решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода (12), где известные функции удовлетворяют условию *г*) раздела 2.4 и непрерывно дифференцируемы. Полагая $x=x_i$, где $x_i\in\omega_h=\left\{x_i=ih,i=0..n,b=nh\right\}$, используя квадратурную формулу правых прямоугольников для интегралов в уравнении

$$\varphi_{\varepsilon}(x)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x\exp\left(-\int_s^x\frac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}d\xi\right)\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}\left[\int_0^s[K(\xi,\xi)-K(s,\xi)]\varphi_{\varepsilon}(\xi)d\xi-\right.$$

$$-C_0\int_0^s\left(\int_{\xi}^{s}K(\nu,\xi)d\nu\right)\varphi_{\varepsilon}(\xi)d\xi-\int_0^x[K(\xi,\xi)-K(x,\xi)]\varphi_{\varepsilon}(\xi)d\xi+C_0\int_0^x\left(\int_{\xi}^{x}K(\nu,\xi)d\nu\right)\varphi_{\varepsilon}(\xi)d\xi+$$

$$\left.+\mu(s)-\mu(x)\right]ds+\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\exp\left(-\int_0^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\left[\int_0^x[K(s,s)-K(x,s)]\varphi_{\varepsilon}(s)ds-\right.$$

$$\left.-C_0\int_0^x\left(\int_s^xK(\nu,s)d\nu\right)\varphi_{\varepsilon}(s)ds+\mu(x)+\varepsilon\varphi_h(0)\right] \quad (19)$$

и выбирая $\varphi_h(0)$ в виде $\varphi_{0,h}=\dfrac{\mu_1}{p_1+hG_1}$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\varphi_{\varepsilon,i}=-\frac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{k=1}^{i-1}\exp\left(-h\sum_{l=k+1}^{i}\frac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\left[h\sum_{l=1}^{k-1}\left[K_{l,l}-K_{k,l}\right]\varphi_{\varepsilon,l}-C_0h\sum_{l=1}^{k-1}h\sum_{m=l+1}^{k}K_{m,l}\varphi_{\varepsilon,l}-\right.$$
$$\left.-h\sum_{l=1}^{i-1}\left[K_{l,l}-K_{i,l}\right]\varphi_{\varepsilon,l}+C_0h\sum_{l=1}^{i-1}h\sum_{m=l+1}^{i}K_{m,l}\varphi_{\varepsilon,l}+\mu_k-\mu_i\right]+\frac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{k=1}^{i}\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\right)\times$$
$$\times\left[h\sum_{k=1}^{i-1}\left[K_{k,k}-K_{i,k}\right]\varphi_{\varepsilon,k}-C_0h\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{l=k+1}^{i}K_{l,k}\varphi_{\varepsilon,k}+\mu_i+\varepsilon\varphi_{h,0}\right],\quad i=1..n, \tag{20}$$

где $L_{i,k}=L(x_i,x_k),\ \varphi_{\varepsilon,l}=\varphi_\varepsilon(x_l),\ \mu_i=\mu(x_i),\ p_i=p(x_i),\ x_i=ih,\ k=1..i,\ i=1..n$.

Теорема 6. При выполнении условий *а-б* и $\varepsilon=O(h^{\alpha})$ для всех $0<\alpha\le 1/2$, решение системы (20), при $h\to 0$, сходится к φ_i - точному решению уравнения (12), причем имеет место оценка

$$\left\|\varphi_{\varepsilon,i}-\varphi_i\right\|_{C_h}\le M_1h^{\alpha}+M_2h^{1-\alpha}+M_3h^{2-\alpha},$$

$0<M_j=const,\quad j=\overline{1,3}.$

Результаты распространены и для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. Приведены примеры, проведены численные расчеты на компьютере, которые подтверждают теоретические выкладки.

Заключение

В диссертационной работе методом регуляризации исследованы нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго и третьего порядка в случае необратимости неубывающей функции $p(x)=A(x)+B(x)$ в нелокальных условиях. Доказаны теоремы сходимости регуляризованного решения к точному решению нелокальных краевых задач. Рассмотрены примеры для нелокальных краевых задач, которые показывают верность поставленных условий на известные функции. Метод регуляризации, обоснованныйдля нелокальных краевых задач, применен для интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с неубывающей непрерывной коэффициентной функцией. Построено регуляризирующее уравнение, доказаны теоремы о сходимости по равномерной метрике регуляризированного решения к точному решению, установлены условия единственности решения в пространстве непрерывных функций.

Обоснован метод численного решения нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа и интегральных уравнений Вольтерра третьего рода, основанного на методе регуляризации и квадратурных формулах правых прямоугольников.

Доказаны теоремы сходимости, получены оценки погрешности по сеточной норме. Рассмотрены примеры для численного метода, приводятся значения вычислений, подтверждающие теоретические выкладки.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. **Рустамова Д. К.** Нелокальная краевая задача для уравнений гиперболического типа [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова // Вестник КГПУ им. И. Арабаева. - Бишкек, 2004. - Вып. 2. - С.17-22.
2. **Рустамова Д. К.** Регуляризация и метод квадратур для линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек, 2009. -Вып. 40. - С. 127-132.
3. **Рустамова Д. К.** Нелокальная по времени краевая задача для гиперболических дифференциальных уравнений [Текст] / Д. К. Рустамова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2010. -Вып. 4. - С. 158-162.
4. **Рустамова Д. К.** Решение методом квадратур линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова // Наука и новые технологии. - Бишкек, 2010. - №. 5. - С. 8-14.
5. **Рустамова Д. К.** Регуляризация нелинейного уравнения Вольтера третьего рода. [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2011. -Вып. 1. - С. 76-79.
6. **Рустамова Д. К.** Регуляризация нелокальной по времени краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2012. -Вып. 5. - С. 34-44.
7. **Рустамова Д. К.** Нелокальная задача по пространственной переменной для гиперболических уравнений [Текст] / Д. К. Рустамова // Вестник ОшГУ. - Ош, 2013. - Спец. вып. 1. - С. 234-239.
8. **Рустамова Д. К.** Приближенные методы решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова, Ж. Т. Бугубаева // Materiály X mezinárodní vědecko - praktická Konference / Díl 33 Matematika Fyzika Chemie a chemická technologie, 2013/2014. - Praha, 2013/2014. - С. 6-10.
9. **Рустамова Д. К.** Единственность и устойчивость решения нелокальной краевой задачи для линейных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова // Вестник ЕНУ им. Л. Н. Гумилева. - Астана, 2014. № 4(101). - С.64-72.
10. **Рустамова Д. К.** Регуляризация линейного интегрального уравнения Вольтерра третьего рода с вырождающейся функцией вне интеграла в двух точках [Текст] / Д. К. Рустамова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2014. - Спец. вып. - С. 52-57.
11. **Рустамова Д. К.** Регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода типа стыка [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К.

Рустамова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына - Бишкек, 2014. - Вып. 5. - С. 45-50.
12. **Рустамова Д. К.** Регуляризация нелокальной краевой задачи для уравнения Бенжамина-Бона-Махони [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова // Приволжский научный вестник - Ижевск, 2016. -№1 (53). - С. 10-15.
13. **Рустамова Д. К.** Регуляризация нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в нерегулярном случае [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова // Наука, техника и образование. - Москва, 2016. - №1 (19). - С. 10-14.
14. **Рустамова Д. К.** Метод квадратурных формул для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова // Проблемы современной науки и образования. - Москва, 2016. - №3(45). - С. 7-15.
15. **Рустамова Д. К.** Приближенное решение нелокальной краевой задачи для гиперболических уравнений [Текст] / Д. К. Рустамова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - Бишкек, 2017. - № 10. - С. 3-10.
16. **Rustamova D. K.** Numerical Solution of Volterra Linear Integral Equation of the Third Kind [Текст] / T. T. Karakeev, D. K. Rustamova, J. T. Bugubaeva // Advances in intelligent Systems and Computing / Intelligent Systems for Computer Modelling / Proceedings of the 1st European-Middle Asisan Conference on Computer Modelling 2015 / Springer, Vol. 423, 2016. - Warsaw, Poland 2016. - P. 111-119.

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы на тему «Решение нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление Рустамовой Динары Кошеевны

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа, нелокальная краевая задача, неубывающая функция, интегральное уравнение, дифференциальное уравнение, интегральное уравнение Вольтерра, равномерная сходимость, устойчивость, регуляризация, аппроксимация, квадратурная формула, малый параметр.

Объект исследования: нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, интегральные уравнения Вольтерра третьего рода.

Цель работы: исследование вопросов регуляризации и численного решения дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями, интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.

Методы исследования: Основными методами являются метод регуляризации, метод интегральных уравнений, метод функции Римана, метод конечных сумм, метод сеток.

Полученные результаты и их новизна:

- разработан и обоснован метод регуляризации нелокальных краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в случае необратимости объединенного оператора при неизвестных функциях в нелокальных условиях;
- установлены достаточные условия единственности решения нелокальных краевых задач для уравнения Бенджамина-Бона-Махони;
- обоснован метод регуляризации интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с оператором умножения на непрерывную неубывающую функцию и непрерывным ядром;
- разработан и обоснован метод численного решения нелокальной краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.

Рустамова Динара Кошеевнанын 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган «Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн локалдуу эмес четтик маселелерди чыгаруу» аттуу диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: гипербола тибиндеги теңдемелер, локалдуу эмес четтик маселелер, кемибөөчү функция, интегралдык теңдеме, дифференциалдык теңдеме, Вольтерранын интегралдык теңдемеси, бир калыпта жыйналуучулук, туруктуулук, регуляризация, аппроксимация, квадратуралык формула, кичи параметр.

Изилдөөнүн объектиси: жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн локалдуу эмес четтик маселелер, үчүнчү түрүндөгү Вольтерранын интегралдык теңдемеси.

Изилдөөнүн максаты: жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн локалдуу эмес маселелер, үчүнчү тартиптеги Вольтерранын интегралдык теңдемелерин регулярдаштыруу, ошондой эле алардын сандык чыгарылышын үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде изилдөө.

Изилдөөнүн ыкмасы: регулярдаштыруу ыкма, интегралдык теңдемелер ыкмасы, Риман функциясы ыкмасы, чектүү суммалар ыкмасы, торчо ыкма.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы:

- экинчи тартиптеги сызыктуу жана сызыктуу эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн локалдуу эмес четтик маселелерди регулярдаштыруу ыкмасы иштелип чыкты;

– Бенджамина-Бон-Махони теңдемеси үчүн локалдык эмес четтик маселелердин жалгыз чыгарылышынын жетиштүү шарты тургузулган;

– үзгүлтүксүз кемибөөчү функциялуу жана үзгүлтүксүз ядролуу үчүнчү түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемелер үчүн регулярдаштыруу ыкмасы негизделген;

– экинчи тартиптеги жекече туундулуу сызыктуу дифференциалдык теңдемелер үчүн локалдуу эмес четтик маселелерди, үчүнчү түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемелерин сандык чыгаруу ыкмалары негизделген.

SUMMARY

of dissertation work on the subject "The solution of nonlocal regional tasks for the differential equations in private derivatives" submitted for the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control by Rustamova Dinara Kosheevna

Keywords: hyperbolic type equation, nonlocal boundary value problems, differential equation, integral equation of Volterra, uniform convergence, regularization, approximation, small parameter.

Object of research: nonlocal regional problem for the differential equations in private derivatives, Volterra integral equation of the third kind.

Aim of research: research of questions of regularization and the numerical solution of the differential equations in private derivatives with nonlocal regional conditions, Volterra integral equation of the third kind.

***Methods of research*:** The main methods are the method of regularization, the integral equations, a method of function of Riemann, quadrature formulas and the principle of the squeezing displays.

Scientific novelty:

- the method of regularization of nonlocal regional tasks for the differential equations in private derivatives of the second order in cases of irreversibility of the joint operator at unknown functions in not local conditions is developed and reasonable;

- sufficient conditions of uniqueness of the solution of not local regional tasks for Benjamin-Bona-Mahoney's equation are established;

- the method of regularization of the integral equations of Volterra of the third kind with the operator of multiplication by the continuous not decreasing function and a continuous kernel is reasonable;

- the method of the numerical solution of nonlocal regional task for the differential equations in private derivatives of the second order, the integrated equations of Volterra of the third kind is developed and reasonable.