ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Диссертационный совет К.01.17.554

На правах рукописи

УДК 517.968.

Орозмаматова Жыпаргул Шермаматовна

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы

и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ош - 2019

Работа выполнена на кафедре «Прикладная информатика в экономике» Ошского технологического университета имени акад. М.М. Адышева

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Каденова З.А.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Ягола А.Г.
	доктор физико-математических наук, профессор Алыбаев К.С.
Ведущая организация:	Кыргызский Национальный университет им. Ж.Баласагына по адресу 720033, город Бишкек, Фрунзе, 547

Защита диссертации состоится 17 мая 201г. в 16^{30} часов на заседании диссертационного совета К.01.17.554 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Ошском государственном университете по адресу: Кыргызская Республика, 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331, главный корпус, ауд. ____

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ошского государственного университета по адресу: 723500 г. Ош, ул. Ленина, 331 и на сайте: www.oshsu.kg.

Автореферат разослан «16 » апреля 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доц. Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. В последние годы развивается теория интегральных уравнений первого и третьего родов как область теории некорректных задач.

Среди математических задач выделяется класс задач, решение которых неустойчиво к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат классу некорректно поставленных задач. Одним из классов таких некорректных задач являются интегральные уравнения первого и третьего родов.

Многие обратные задачи относятся к числу так называемых некорректно поставленных данных. Современная теория решения некорректно поставленных задач, основанная на работах российских математиков – А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова и их научных школ, позволяют преодолеть возникающие трудности. В развитие теории и приложений некорректных задач весомый вклад внесли ученые М.М. Лаврентьев, А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, В.К. Иванов, В.В. Васин, М.И. Иманалиев, В.П. Танана, В.Г. Романов, А.Г. Ягола, Ю.Е. Аниконов, С.П. Шишатский, В.А. Морозов, А.Л. Бухгейм, А.М. Денисов, Н.С. Габбасов, С.И. Кабанихин, А.С. Апарцин, А. Асанов, А. Саадабаев, Т.Д. Омуров, Т.Т. Каракеев, Б.С. Аблабеков, А.Дж. Сатыбаев, А.Сраждинив, З.А. Каденова, Т.О. Бекешов, К. Ободоева, А.Р. Максутов, Г. Сапарова, А. Тойгонбаева и др.

В качестве основных приложений рассматривались обратные задачи геофизики, астрофизики, обработки изображений, колебательной спектроскопии, электронной микроскопии, акустики. Они выполняют большое число прикладных задач, в том числе, при математической обработке (интерпретации) результатов измерений в физических экспериментах, моделировании экономических систем. В качестве приближенных решений таких задач, устойчивых к малым изменениям исходных данных, берется регуляризация решения, получаемая методом регуляризации. Применение данного метода в решении интегральных уравнений требует выполнения научных исследований. Этим определяется актуальность темы диссертационной работы.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими программами и проектами. Работа выполнена в рамках проектов НИР Института теоретической и прикладной математики НАН КР: «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений» (2012-2014 гг.), номер гос. регистрации № 0005756, «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, топологических и аналитических методов в теории устойчивости динамических систем, разрешимости обратных задач, экономических и геофизических процессов» (2015-2017 гг.), номер государственной регистрации № 0007125 и включены в отчеты по этим проектам.

Цель исследования состоит в построении регуляризации и доказательстве единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого и третьего родов в неограниченных областях и разработке эффективных методов их решения с теоретическим обоснованием.

Для достижения поставленной в работе цели были сформулированы следующие **задачи**:

- получение условий единственности решений для линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода;
- построение регуляризирующих операторов и получение оценки устойчивости решения линейных интегральных уравнений и систем уравнений Фредгольма первого рода на полуоси и на оси;
- построение регуляризирующих операторов и получение оценки устойчивости решения линейных интегральных уравнений и систем уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси и на оси;
- доказательство теорем единственности и получение оценки устойчивости для решений для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода и третьего родов разных семействах множеств корректностей.

Методика исследования. Основными методами исследования являются: методы функционального анализа, метод неотрицательных квадратичных форм, метод регуляризации М.М. Лаврентьева, методы интегральных преобразований.

Научная новизна работы:

- доказаны теоремы единственности решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;
- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;
- доказаны теоремы единственности решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси;
- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на оси;
- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;
- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси;
- доказаны теоремы единственности решений для одного класса линейных систем интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси.

Теоретическая значимость и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты исследований вопросов регуляризации и единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода и систем линейных интегральных уравнений первого рода в неограниченных областях могут быть применены в различных областях науки и техники.

Экономическая значимость работы заключается в том, что результаты исследования могут быть использованы в изучении макроэкономических моделей, динамики различных экономических явлений, их эволюции в долгосрочных интервалах.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- достаточные условия единственности решения для линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;
- регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;
- достаточные условия единственности решения для линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на оси;
- регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и оценки устойчивости решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси;
- достаточные условия единственности решения для линейных систем интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси;
- регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и оценки устойчивости решений для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;
- регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси.

Личный вклад соискателя состоит в построении регуляризирующих операторов для решения линейных интегральных уравнений первого и третьего рода и их систем, доказательстве теоремы их единственности и оценке их устойчивости.

Апробация результатов исследования. Материалы диссертации докладывались на международных и республиканских научно-практических конференциях:

- «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование, новые задачи и методы» Проблемы математического и естественнонаучного образования (Москва, РУДН, 15-18 декабря 2014 г.);
- «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 19-24 октября 2015 г.);
- тезисы докладов Борубаевских чтений (Кыргызская Республика, г. Бишкек, 1 марта 2018 года);
- тезисы докладов Mathematical Analysis, Differential Equations & Applications –MADEA-8 (Бишкек-Чолпон-Ата ,17-23 июня 2018 года).

Результаты диссертационного исследования доложены также на расширенном заседании кафедры «Прикладная информатика в экономике» Ошского технологического университета имени М.М. Адышева.(протокол №3, от 30-октября,2018 года)

Публикации. Основное содержание диссертационной работы опубликовано в 8 научных статьях соискателя в рецензируемых изданиях и сборниках, в зарубежных периодических изданиях, индексируемых РИНЦ, из них в журналах с импакт-фактором - 2. Общий балл -135.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка использованной литературы. Работа изложена на 92 страницах машинописного текста. Перечень литературы содержит 103 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе отражен обзор работ по теме диссертации и вспомогательные материалы. В ней сделан обзор основных результатов научных исследований в теории некорректных задач и задач, приводящих к некорректным задачам.

В главе 2, состоящей из четырех параграфов, проведен анализ регуляризации, единственности, а также осуществлена оценка устойчивости решений линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего и первого родов на оси и полуоси. Используя методы квадратичных форм, функционального анализа и неравенств Гельдера в данной главе произведены доказательства теорем единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода на оси и полуоси. Получены оценки устойчивости и построены регуляризующие операторы по М.М. Лаврентьеву в целях решения линейных интегральных уравнений первого рода в пространствах $L_2[a,\infty)$ и $L_2(-\infty;\infty)$.

В параграфе 2.1 рассмотрено уравнение вида

$$Ku \equiv \int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty), \tag{1}$$

где $\int_a^\infty \int_a^\infty |K(t,s)|^2 dsdt < \infty,$

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ B(t,s), & a \le t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Подразумевалось, что будут выполнены нижеследующие условия:

a) $H(t,s) = A(t,s) + B(s,t)$, $(t,s) \in G = \{(t,s), a \le s \le t < \infty\}$;

$H'_t(t,s), H'_s(t,s), H''_{st}(t,s) \in L_2(G)$;

б) $\lim_{t\to\infty} H(t,a) \ge 0,$ $H'_t(t,a) \le 0,$ при $t \in [a,\infty),$ $\lim_{t\to\infty} H'_s(t,s) \ge 0,$ при $s \in [a,\infty),$

$H''_{st}(t,s) \le 0$ при $(t,s) \in G$;

$в)$ осуществляется как минимум одно из условий:

1) $H'_t(t,a) < 0, \quad \forall \quad t \in [a,\infty),$

2) $\lim\limits_{t\to\infty} H'_s(t,s) > 0, \ \forall \quad s \in [a,\infty),$

3) $H''_{st}(t,s) < 0, \ \forall \quad (t,s) \in G.$

Теорема 1. Допустим осуществление условий а), б) и в). В данном случае решение уравнение (1) будет в пространстве $L_2[a,\infty) \cap C[a,\infty)$ – единственно.

В параграфе 2.2 одновременно рассмотрены уравнение (1) и следующее интегральное уравнение второго рода

$$\varepsilon u(t,\varepsilon) + \int_a^{\infty} K(t,s) u(s,\varepsilon) ds = f(t), \quad t \in [a,\infty), \varepsilon > 0 \tag{2}$$

где ε – выступает малым параметром.

Получены оценки устойчивости решения для интегрального уравнения (1) на множестве корректности

$$M_\alpha = \left\{ u(t) \in L_2[a,\infty) : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\alpha \left| u^{(\nu)} \right|^2 \le c \right\},$$

где $c > 0, \quad 0 < \alpha < \infty,$ где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ – характеристические числа матричного ядра M (t,s), которые расположенные в порядке возрастания их модулей, – $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots$ и $\varphi_1(t), \varphi_2(t)\ldots$ – соответствующие ортонормированные собственные функции.

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ H(s,t), & a \le t \le s < \infty, \end{cases} \tag{3}$$

$$H(t,s) = \frac{1}{2}\left[A(t,s) + B(s,t)\right], \quad (t,s) \in G = \{(t,s) : a \le s \le t < \infty\},$$

$$u^{(\nu)} = \int_a^{\infty} u(t) \varphi_\nu(t) dt.$$

Осуществлено, в частности, доказывание последующих теорем.

Теорема 2. Предположим, M (t,s) является полным ядром и $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$. В данном случае решение уравнения (1) будет единственно в пространстве $L_2[a,\infty)$.

Теорема 3. Предположим, оператор М, порожденный ядром M (t,s), является положительным, где M (t,s) установлен по тождеству (2.2.7). В таком случае оператор K^{-1}, обратный K, на множестве K (M_α) непрерывен равномерно с показателем Гёлдера $\frac{\alpha}{2+\alpha}$.

Нами построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву для решения интегрального уравнения (1) на множестве корректности M_α. А именно решение $u(t,\varepsilon)$ уравнения (2) сходится по норме $L_2[a,\infty)$ к решению u(t) уравнения (1) при $\varepsilon \to 0$, где u(t) $\in M_\alpha$.

В параграфе 2.3 исследованы уравнения вида

$$Ku \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in (-\infty,\infty), \tag{4}$$

где $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K(t,s)|^2 dtds < \infty$,

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & -\infty < s \le t < \infty, \\ B(t,s), & -\infty < t \le s < \infty. \end{cases}$$

Подразумевалось, что будут выполнены нижеследующие условия:

а) $H(t,s) = A(t,s) + B(t,s), (t,s) \in G = \{(t,s): -\infty < s \le t < \infty\}$,

$H(t,s), H_t^{'}(t,s), H_s^{'}(t,s), H_{ts}^{''}(t,s) \in C(G)$,

$\alpha(t) = \lim_{s\to-\infty} H(t,s), t \in R$,

$\alpha(t) \in C(R), \quad \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = a_0 \in R, a_0 \ge 0, \alpha^{'}(t) = \lim_{s\to-\infty} H_t^{'}(t,s) \le 0, t \in R$,

$H_{ts}^{''}(t,s) \le 0, (t,s) \in G, \alpha^{'}(t) \in L_1(R)$,

$\beta(s) = \lim_{t\to\infty} [H_s^{'}(t,s)] \ge 0$ при всех $s \in R$, $\beta(s) \in C(R) \cap L_1(R)$;

б) $\sup_{(t,s)\in G} |H(t,s)| \le L < \infty, \quad \sup_{t\in R} \int_{-\infty}^{t} |H_s^{'}(t,s)| ds \le M < \infty, \quad H_{ts}^{''}(t,s) \in L_1(G)$,

$\sup_{t\in[s,\infty)} |H_s^{'}(t,s)| \le \gamma(s) \in L_1(R)$;

в) осуществляется как минимум одно из дальнейших условий:

1) $\alpha^{'}(t) < 0$, $\forall \ t \in R$;

2) $\beta(s) > 0$, $\forall \ s \in R$;

3) $H_{ts}^{''}(t,s) < 0$, $\forall \ (t,s) \in G$.

Теорема 4. Допускалось осуществление условий а), б) и в). В данном случае решение интегрального уравнения (4) будет в пространстве $L_1(R)$ единственно.

В параграфе 2.4 одновременно рассмотрены следующие интегральные уравнения третьего и второго рода

$$Ku \equiv a(t)u(t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{5}$$

$$(\varepsilon + a(t))u(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = f(t), t \in (-\infty, \infty), \ \varepsilon > 0, \tag{6}$$

где ε – малый параметр, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K(t,s)|^2 dtds < \infty$,

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & -\infty < s \le t < \infty, \\ B(t,s), & -\infty < t \le s < \infty. \end{cases}$$

Предполагается, что $A(t,s), B(t,s), a(t)$ и $f(t)$ – данные функции, u(t)– искомая функция. Всюду будем предполагать, что функция $a(t)$– непрерывная ограниченная функция на $(-\infty,\infty)$ и $a(t) \ge 0$ при всех $t \in (-\infty,\infty)$.

Получены оценки устойчивости решения для интегрального уравнения (5) на множестве корректности

$$Q_\alpha = \left\{ u(t) \in L_2(-\infty,\infty) : \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^\alpha \left| u^{(v)} \right|^2 \le c \right\},$$

где $c > 0, \ 0 < \alpha < \infty,$ где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots -$ характеристические числа ядра M (t,s), которые расположенные в порядке возрастания их модулей – $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots$ и $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \ldots$ – собственные ортонормированные функции,

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & -\infty < s \le t < \infty, \\ H(s,t), & -\infty < t \le s < \infty, \end{cases}$$

$$H(t,s) = \frac{1}{2}[A(t,s) + B(s,t)], \quad (t,s) \in G = \{(t,s) : -\infty < s \le t < \infty\},$$

$$u^{(v)} = \int_a^{\infty} u(t)\varphi_v(t)dt.$$

Построены регуляризуюшие операторы по М.М. Лаврентьеву для решения интегрального уравнения (5) на множестве корректности M_α. А именно решение $u(t,\varepsilon)$ уравнения (6) сходится по норме $L_2(-\infty,\infty)$ к решению u(t) уравнение (5) при $\varepsilon \to 0,$ где u(t) $\in M_\alpha$.

В третьей главе данного диссертационного исследования рассмотрены вопросы регуляризации, устойчивости и единственности решений систем линейных интегральных уравнений типа Фредгольма первого и третьего рода на полуоси и оси. Применяя методы функционального анализа, квадратичных форм и неравенств осуществлено доказательство теорем единственности решений систем линейных интегральных уравнений первого рода на оси и на полуоси. В результате выполнения установленных задач для систем линейных интегральных уравнений первого рода в пространстве в $L_2([a,\infty), R^n)$, в $L_2((-\infty;+\infty); R^n)$ построены регуляризирующие операторы и получены оценки устойчивости. Более того, доказаны теоремы единственности решений систем линейных интегральных уравнений третьего рода на полуоси.

В параграфе 3.1 главы 3 исследованы одновременно последующие системы линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси

$$\int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t),\ t\in[a,\infty), \tag{7}$$

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_a^\infty K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = f(t), \quad t\in[a,\infty), \varepsilon>0 \tag{8}$$

где ε – является малым параметром,

$$K(t,s)=\begin{cases} A(t,s), a\le s\le t<\infty; \\ B(t,s), a\le t\le s<\infty. \end{cases}$$

$$A(t,s)=a_{ij}(t,s)=\begin{pmatrix} a_{11}(t,s) & a_{12}(t,s) & \dots & a_{1n}(t,s) \\ a_{21}(t,s) & a_{22}(t,s) & \dots & a_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t,s) & a_{n2}(t,s) & \dots & a_{nn}(t,s) \end{pmatrix},$$

$$B(t,s)=b_{ij}(t,s)=\begin{pmatrix} b_{11}(t,s) & b_{12}(t,s) & \dots & b_{1n}(t,s) \\ b_{21}(t,s) & b_{22}(t,s) & \dots & b_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t,s) & b_{n2}(t,s) & \dots & b_{nn}(t,s) \end{pmatrix}$$

$$f(t)=(f_i(t))=(f_1(t),\dots f_n(t))^T.$$

Для систем интегральных уравнений (7) на множестве корректности, определены оценки устойчивости решения

$$N_\alpha=\left\{u(t)\in L_2([a,\infty);R^n): \sum_{\nu=1}^\infty \lambda_\nu^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\le c\right\},$$

$$\mathrm{u}^{(\nu)}=\int_a^\infty \left\langle u(t),\phi^{(\nu)}(t)\right\rangle dt, \quad (\nu=1,2,..).$$

где $c>0,\ 0<\alpha<\infty,$ λ_ν – собственные значения матричного ядра $M(t,s)$ которые в убывающем порядке модулей последних, и вектор-функции;

$\varphi^{(\nu)}(t)=(\varphi_1^{(\nu)}(t)\dots\varphi_n^{(\nu)}(t))^T$ – собственные ортонормированые вектор-функции соответствующие собственным значениям λ_ν.

$$M(t,s)=\begin{cases} H(t,s), & a\le s\le t<\infty, \\ H^*(s,t), & a\le t\le s<\infty, \end{cases}$$

$$H(t,s)=(H_{ij}(t,s)),H^*(s,t)=(H_{ji}(s,t)).$$
$$H(t,s)=\frac{1}{2}\left(A(t,s)+B^*(s,t)\right),\quad (t,s)\in G=\{a\le s<t<\infty\}$$

Доказана следующая теорема:

Теорема 5. Допустим, что оператор М, порожденный матричным ядром M (t,s), является положительным. В таком случае оператор K^{-1}, обратный K, на множестве $K(N_\alpha)$(при отображении оператором K, $K(N_\alpha)$ образ N_α) непрерывен равномерно с показателем Гёлдера $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. оценка

$$\|u(t)\|_{L_2}\le c^{\frac{1}{2+\alpha}}\|f(t)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}},\qquad 0<\alpha<\infty. \tag{9}$$

является справедливой.

Построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву для решения систем линейных интегральных уравнений первого рода (7) на множестве корректности N_α. А именно решение $u(t,\varepsilon)$ – систем линейных интегральных уравнений второго рода (8) сходится по норме $L_2([a,\infty);R^n)$ к решению u(t) систем линейных интегральных уравнений первого рода (7) при $\varepsilon\to0,$ где u(t) $\in N_\alpha$. т.е. справедлива оценка

$$\|u(t,\varepsilon)-u(t)\|_{L_2}\le c^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{\frac{a(2a+1)}{4(1+a)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}},0<a<\infty \tag{10}$$

В параграфе 3.2 рассмотрены системы линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)u(s)ds=f(t),\ t\in(-\infty,\infty) \tag{11}$$

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)u(s,\varepsilon)ds=f(t),\quad t\in R,\varepsilon>0, \tag{12}$$

где $K(t,s)=\begin{cases}A(t,s),-\infty<s\le t<\infty;\\ B(t,s),-\infty<t\le s<\infty.\end{cases}$

$$A(t,s)=a_{ij}(t,s)=\begin{pmatrix}a_{11}(t,s) & a_{12}(t,s) & \dots & a_{1n}(t,s)\\ a_{21}(t,s) & a_{22}(t,s) & \dots & a_{2n}(t,s)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}(t,s) & a_{n2}(t,s) & \dots & a_{nn}(t,s)\end{pmatrix},$$

$$B(t,s)=b_{ij}(t,s)=\begin{pmatrix}b_{11}(t,s) & b_{12}(t,s) & \dots & b_{1n}(t,s)\\ b_{21}(t,s) & b_{22}(t,s) & \dots & b_{2n}(t,s)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1}(t,s) & b_{n2}(t,s) & \dots & b_{nn}(t,s)\end{pmatrix}$$

$$f(t)=(f_i(t))=(f_1(t),\dots f_n(t))^T,$$
$$u(t)=(u_i(t))=(u_1(t),\dots u_n(t))^T,$$

где A (t, s), B (t, s) – текущие матричные функции, которые даны, u(t) – неизвестная, $f(t)$ – известная вектор-функция.

Везде допустим, что

$$\|K(t,s)\| \in L_2(R\times R), \quad \|f(t)\| \in L_2(R).$$

Выделим

$$H(t,s) = \frac{1}{2}\big(A(t,s) + B^{\bullet}(s,t)\big), \qquad (t,s) \in G = \{-\infty < s < t < \infty\}$$

Нижеследующим способом включим новую матричную функцию $M(t,s) = (M_{ij}(t,s))$

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & -\infty < s \le t < \infty, \\ H(s,t), & -\infty < t \le s < \infty, \end{cases}$$
$$H(t,s) = (H_{ij}(t,s), H(s,t) = (H_{ij}(s,t)).$$

Ясно, что

$M(t,s) = M(s,t)$ $(t,s) \in G$ и справедлива

$$M(t,s) = \sum_{v=1}^{m} \lambda_v \begin{pmatrix} \phi_1^{(v)}(t) \\ \dots \\ \phi_n^{(v)}(t) \end{pmatrix} (\overline{\phi}_1^{(v)}(s) \dots \overline{\phi}_n^{(v)}(s)), m \le \infty, \tag{13}$$

λ_v – значения собственные матричного ядра $M(t,s)$ которые позиционируются в убывающем порядке модулей последних, и вектор-функции;

$\varphi^{(v)}(t) = (\varphi_1^{(v)}(t) \dots \varphi_n^{(v)}(t))^T$ – собственные ортонормированные вектор-функции соответствующие собственным значениям λ_v.

В последующем мы будем полагать, что положительными выступают все значения собственные λ_v матричного ядра $M(t,s)$. При этом последовательность ортонормированная собственных вектор-функций $\{\phi^{(v)}(t)\}$ является полной в $L_2(R;R^n)$, в силу самосопряженности и полной непрерывности оператора М, который порожден матричным ядром $M(t,s)$. Последующим способом отметим семейство множеств корректностей, обусловливаемое параметром α

$$P_\alpha = \left\{ u(t) \in L_2(R;R^n) : \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{-\alpha} \left| u^{(v)} \right|^2 \le c \right\},$$

где $c > 0, \quad 0 < \alpha < \infty,$

$$u^{(v)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle u(t), \phi^{(v)}(t) \right\rangle dt, \quad (v = 1,2,..).$$

Теорема 6. Допустим, что оператор М, который порожденный матричным ядром M (t,s), является положительным, где M (t,s) установлен по соотношению (13). В таком случае оператор K^{-1}, обратный K, на множестве $K(P_\alpha)$ (при отображении оператором K, $K(P_\alpha)$ является образом M_α) непрерывен равномерно с показателем Гёлдера $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. оценка

$$\left\|u(t)\right\| \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \left\|f(t)\right\|,^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \quad 0<\alpha<\infty \tag{14}$$

является справедливой.

Построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву для решения систем линейных интегральных уравнений первого рода (11) на множестве корректности P_α. А именно решение $u(t,\varepsilon)$ – систем линейных интегральных уравнений первого рода (11) сходится по норме $L_2((-\infty,\infty);R^n)$ к решению u(t) систем линейных интегральных уравнений первого рода (12) при $\varepsilon\to 0,$ где u(t) $\in P_\alpha$.

В параграфе 3.3 рассмотрены следующие системы линейных интегральных уравнений типа Фредгольма третьего рода на полуоси

$$P(t)u(t)+\int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t\in[a,\infty), \tag{15}$$

где $K(t,s)=\begin{cases} A(t,s), a\le s\le t<\infty; \\ B(t,s), a\le t\le s<\infty. \end{cases}$

где A (t, s), B (t, s), P(t), – текущие матричные функции, которые даны, u(t) – неизвестная вектор-функция, f (t) –известная вектор-функция.

Везде допустим, что

$\left\|K(t,s)\right\|\in L_2\left([a,\infty)\times[a,\infty)\right), \quad \left\|f(t)\right\|\in L_2[a,\infty)$.

Допускаем выполнение следующих условий:

а) $H(t,s)=A(t,s)+B^*(s,t)$ содержит производные $H_t'(t,a), H_s'(t,s), H_{st}''(t,s)$ и $(H(t,a))^*=H(t,a), (H_s'(t,s))^*=H_s'(t,s),$ $(H_{st}''(t,s))^*=H_{st}''(t,s)$ где H^* связанная матрица к матрице H и $\left\|H(t,s)\right\|,\left\|H_t'(t,s)\right\|,\left\|H_s''(t,s)\right\|,\left\|H_{ts}''(t,s)\right\|\in L_2(G)$, $\left\|P(t)\right\|\in C[a,\infty)$.

б) $\lim\limits_{t\to\infty}\langle H(t,a)u,u\rangle\ge 0, \forall u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\ \vdots\\u_n\end{pmatrix}\in R^n$ т.е. $H(\infty,a)\ge 0;$

$\left\langle H_t'(t,a)u,u\right\rangle\le 0, \forall u\in R^n$ т.е. $H_t'(t,a)\le 0; \quad \forall t\in[a,\infty);$

$\lim\limits_{t\to\infty}\left\langle H_s'(t,s)u,u\right\rangle\ge 0, \forall u\in R^n$ т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} H_s'(t,s)\ge 0;\ \forall s\in[a,\infty);$

$\left\langle H_{st}''(t,s)u,u\right\rangle\le 0, \forall u\in R^n$ т.е. $H_{st}''(t,s)\le 0, \quad \forall(t,s)\in G$,

$$\left\langle\frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u,u\right\rangle\ge\alpha(t)\left\|u\right\|^2, \forall u\in R^n, \alpha(t)\in C[a,\infty), \alpha(t)\ge 0$$

при почти всех $t\in[a,\infty)$.

в) осуществляется как минимум одно из дальнейших условий:

1) $\left\langle H_t^{'}(t,a)u,u\right\rangle < 0,\ \forall u \in R^n, u \neq 0$ т.е. $H_t^{\prime}(t,a) < 0 \quad \forall \quad t \in [a,\infty)$;

2) $\lim\limits_{t\to\infty}\left\langle H_s^{'}(t,s)u,u\right\rangle > 0,\ \forall u \in R^n, u \neq 0$ т.е. $H_s^{\prime}(t,s) > 0 \quad \forall \quad s \in [a,\infty)$;

3) $\left\langle H_{st}^{''}(t,s)u,u\right\rangle < 0,\ \forall u \in R^n, u \neq 0$ т.е. $H_{st}^{\prime\prime}(t,s) < 0 \quad \forall$

$(t,s) \in G = \{(t,s) : a \leq s \leq t < \infty\}$;

4) $\alpha(t) > 0 \quad \forall \quad t \in [a,\infty)$.

Теорема 7. Пусть выполняются условия а), б), и в). Тогда решение системы (3.3.1) в пространстве $L_2\left(\left[a,\infty\right), R^n\right) \cap C\left(\left[a,\infty\right); R^n\right)$ – единственно.

ВЫВОДЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В результате проведенного исследования в данной диссертационной работе были решены следующие задачи и сформированы нижеследующие теоретические и практические выводы:

- для линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси определены достаточные условия единственности решения;
- для линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на оси определены достаточные условия единственности решения;
- для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси сформированы оценки устойчивости решений и осуществлено построение регуляризирующих операторов по М.М. Лаврентьеву;
- для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси сформированы оценки устойчивости решений и осуществлено построение регуляризирующих операторов по М.М. Лаврентьеву;
- для линейных систем интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси определены достаточные условия единственности решения;
- для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси сформированы оценки устойчивости и осуществлено построение регуляризирующих операторов по М.М. Лаврентьеву;
- для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси сформированы оценки устойчивости решений и осуществлено построение регуляризирующих операторов по М.М. Лаврентьеву.

В диссертационной работе исследованы вопросы регуляризации, устойчивости и единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода и их систем неограниченных областях. Теоремы единственности решений линейных интегральных уравнений первого и третьего рода на оси и на полуоси, а также системы линейных интегральных уравнений третьего рода на полуоси доказаны методом неотрицательных квадратичных форм. Используя методы функционального анализа и неравенств, построение регуляризирующих операторов и получены оценки устойчивости для решения линейных интегральных уравнений первого рода и систем линейных интегральных уравнений первого рода на оси и на полуоси.

Теоремы единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода на оси доказаны методом неотрицательных квадратичных форм. Используя методы функционального анализа и неравенств, построены регуляризирующие операторы и получены оценки устойчивости для решений линейных интегральных уравнений первого рода и систем линейных интегральных уравнений первого рода на оси.

Полученные результаты диссертационного исследования выводы по вопросам единственности и регуляризации решений линейных интегральных уравнений первого рода и систем линейных интегральных уравнений первого рода в неограниченных областях могут быть использованы в различных областях науки и техники.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ РАБОТ:

1. Орозмаматова Ж.Ш. О единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси [Текст] /З. А. Каденова, Ж.Ш. Орозмаматова // Известия вузов Кыргызстана. - №11. - Бишкек, 2015. - стр. 3-7.
2. Орозмаматова Ж.Ш. Регуляризация систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неорганиченных областях [Текст] / Ж.Ш. Орозмаматова // Символ науки. - Вып. 5. - часть 3. – Уфа: «Омега Сайнс», 2016. – стр. 39-43.
3. Орозмаматова Ж.Ш. Регуляризация и оценка устойчивости решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси [Текст] / Ж.Ш. Орозмаматова // Известия вузов Кыргызстана. - №11. - Бишкек, 2017. - стр.17-23.

4. Орозмаматова Ж.Ш. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси [Текст] / Ж.Ш. Орозмаматова // Известия вузов Кыргызстана. - №11. - Бишкек, 2017. - стр. 3-9.
5. Орозмаматова Ж.Ш. О единственности решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси [Текст] /З.А Каденова, Ж.Ш. Орозмаматова // Символ науки. - №1. Уфа: «Омега Сайнс», 2018. - стр.8-12.
6. Орозмаматова Ж.Ш. Регуляризация и оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси // Символ науки. -№1. Уфа: «Омега Сайнс», 2018. - стр.12-18.
7. Орозмаматова Ж.Ш. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на оси [Электронный ресурс] / А.Асанов, Ж.Ш. Орозмаматова // Постулат. – 2018. - №8. - стр.79-85.
8. Орозмаматова Ж.Ш. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси [Текст] / А.Асанов, Ж.Ш. Орозмаматова // Синергия. - 2018. - №4. - стр. 33-39.

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы Орозмаматовой Жыпаргул Шермаматовны на тему «Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниченных областях», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма первого рода, и третьего рода единственность решения, регуляризация, оценка устойчивости.

Объектом исследования являются различные классы интегральных уравнений Фредгольма.

Цель работы заключается в построении регуляризации и доказательстве единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого и третьего родов в неограниченных областях и разработке эффективных методов их решения с теоретическим обоснованием.

Методика исследования. В ходе проведенного исследования использованы методы функционального анализа, метод неотрицательных квадратичных форм, метод регуляризации М.М. Лаврентьева, методы интегральных преобразований.

Научная новизна:

- установлены достаточные условия единственности решения для линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;
- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;
- установлены достаточные условия единственности решения для линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на оси;
- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси;
- установлены достаточные условия единственности решения для линейных систем интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;
- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;
- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные по результатам исследования теоретические результаты могут быть применены в различных областях науки и техники.

Область применения. Решение интегральных уравнений имеет большое прикладное значение, в частности, могут быть применены при математической обработке (интерпретации) результатов измерений в физических экспериментах, моделировании экономических систем, геофизике, астрофизике, обработке изображений, колебательной спектроскопии, электронной микроскопии, акустике. Результаты исследования могут быть использованы в качестве дополнительного материала при прочтении курса дифференциальных уравнений в высших учебных заведениях.

Орозмаматова Жыпаргүл Шермаматовнанын «Чексиз аймактарда биринчи түрдөгү Фредгольм сызыктуу интегралдык теңдемелерин регуляризациялоо жана чечиминин жалгыздыгы» деген темада 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн даярдалган диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: биринчи жана үчүнчү, туруктуулугун баалоо

Изилдөөнүн объектиси катары Фредгольм интегралдык теңдемелеринин ар түрдүү класстары каралды.

Иштин максатын биринчи жана үчүнчү түрдөгү Фредгольм сызыктуу интегралдык теңдемесин чексиз аймактарда чыгаруу үчүн регуляризацияны тургузуу жана чечимдеринин жалгыздыгын далилдөө, жана аларды чыгаруунун натыйжалуу ыкмаларын теориялык жактан негиздөө менен иштеп чыгуу түздү.

Изилдөөнүн методикасы. Изилдөөнүн жүрүшүндө функционалдык анализ, тескери эмес квадраттык формалар, М.М. Лаврентьевдин регуляризациялоо ыкмасы, интегралдык өзгөртүүлөр ыкмалары ж.б. колдонулду.

Изилдөөнүн илимий жаңылыктары:

- биринчи түрдөгү Фредгольм сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классы үчүн жарым окто чечимдеринин жалгыздыгы теоремасы далилденди;
- биринчи түрдөгү Фредгольм сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классы үчүн жарым окто чыгарылышынын М.М.Лаврентьев боюнча регуляризациялоо оператору тургузулду жана туруктуулугу бааланды;
- биринчи түрдөгү Фредгольм сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классы үчүн окто чечимдеринин жалгыздыгы теоремасы далилденди;
- үчүнчү түрдөгү Фредгольм сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классы үчүн окто чечимдеринин М.М.Лаврентьев боюнча регуляризациялоо оператору тургузулду жана туруктуулугу бааланды;
- биринчи түрдөгү Фредгольм сызыктуу интегралдык теңдемелеринин системасынын бир классы үчүн жарым окто чечимдеринин жалгыздыгы теоремасы далилденди;
- биринчи түрдөгү Фредгольм сызыктуу интегралдык теңдемелеринин системасынын бир классы үчүн окто чечимдеринин М.М.Лаврентьев боюнча регуляризациялоо оператору тургузулду жана туруктуулугу бааланды;
- үчүнчү түрдөгү Фредгольм сызыктуу интегралдык теңдемелер системасынын жарым окто чечимдеринин жалгыздыгы теоремасы далилденди**.**

Иштин теоретиялык жана практикалык маанилүүлүгү. Иш теориялык мүнөзгө ээ. Изилдөөнүн натыйжасында алынган теориялык жыйынтыктар илимдин жана техниканын ар кандай аймактарында колдонулушу мүмкүн.

Колдонуу чөйрөлөрү. Интегралдык теңдемелердин чыгарылыштары зор колдонмо мааниге ээ, алсак, физикалык эксперименттерде, экономикалык системаларды моделдештирүүдө, геофизикада, астрофизикада, сүрөттөрдү иштетүүдө, термелүүчү спектроскопияда, электрондук микроскопияда, акустикада колдонулушу мүмкүн. Изилдөөнүн натыйжаларын жогорку окуу жайларында дифференциалдык теңдемелер курсун окутууда кошумча материал катары пайдаланууга болот.

SUMMARY

of the thesis of Orozmamatova Zhipargul Shermamatovna on the theme “Regularization and uniqueness of solutions of Fredholm linear integral equations of the first kind in unbounded domains”, submitted for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in specialty 01.01.02-differential equations, dynamic systems and optimal control.

Keywords: Fredholm integral equation of the first kind,, uniqueness of the solution, regularizing stability estimate.

The object of the research is various classes of Fredholm integral equations.

The goal of the work is to construct a regularization and proof of the uniqueness of the solutions of the linear Fredholm integral equations of the first and third kinds in unbounded domains and to develop effective methods for their solution with theoretical justification.

Research methodology. In the course of the study, functional analysis, the method of nonnegative quadratic forms, the method of regularization of M.M. Lavrentev, the method of integral transformations were used.

Scientific novelty:

-established sufficient conditions for the uniqueness of the solution for the Fredholm linear integral equations of the first kind on the semi-axis;

-configured operators according to M.M. Lavrentev and obtained estimates of the stability of solutions for a class of Fredholm linear integral equations of the first kind on a semi-axis;

-established sufficient conditions for the uniqueness of the solution for the Fredholm linear integral equations of the third kind on the axis;

- regularizing operators were constructed according to M.M. Lavtent'ev and estimates were obtained for the stability of solutions for one class of Fredholm linear integral equations of the first kind on the axis;

-established sufficient conditions for the uniqueness of the solution for linear systems of Fredholm integral equations of the first kind on a semi-axis;

- regularized operators according to M. M.Lavtentyev were constructed and estimates were obtained for the stability of solutions for a class of systems of Fredholm linear integral equations of the first kind on a semi-axis;

- regularized operators according to M. M.Laventyev were constructed and estimates of the stability of solutions were obtained for a class of systems of Fredholm linear integral equations of the first kind on the axis.

Theoretical and practical significance. The work is theoretical. The theoretical results obtained from the research results can be applied in various fields of science and technology.

Application area. The solution of integral equations is of great practical importance, in particular, can be applied in mathematical processing (interpretation) of measurement results in physical experiments, modeling of economic systems, geophysics, astrophysics, image processing, vibrational spectroscopy, electron microscopy, acoustics. The results of the study can be used as additional material when reading the course of differential equations in higher educational descriptions.

Тираж 50 экз. Формат 60 х 84/16.
Объём 1,25 п.л.
Отпечатано в РИО ОшТУ
г. Ош, ул. Исанова, 81