МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ НАН КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Диссертационный совет К 01.17.554

На правах рукописи

УДК: 517.968.74

Дыйканов Гапар Аскарович

О разрешимости смешанных задач для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы

и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ош – 2019

Работа выполнена на кафедре естественно-математических дисциплин Кызыл-Кийского педагогического института Баткенского государственного университета

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Юлдашев Турсун Камалдинович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Асанов Авыт (г. Бишкек, Кыргызстан)

доктор физико-математических наук, профессор
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович
(г. Ош, Кыргызстан)

Ведущая организация: Ферганский государственный университет
150100, г. Фергана, улица Мураббийлар, 19.

Зашита диссертации состоится « 1 » июня 2019 г. в 11:00 часов на заседании диссертационного совета К.01.17.554 по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете, Институте природных ресурсов Южного отделения НАН Кыргызской Республики и Жалал-Абадском государственном университете по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомиться в центральной библиотеке Ошского государственного университета (723500, Кыргызстан, г. Ош, ул. Ленина, 333) или на сайте http:/www.oshsu.kg.

Автореферат разослан « 30 » апреля 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент: Т. О. Бекешов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертационной работе рассматриваются смешанные задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Изучается обобщенная разрешимость поставленной в диссертации смешанных задач и построения их решений в виде ряда Фурье.

Актуальность темы диссертации. Теория дифференциальных уравнений в частных производных возникла и развивалась на основе изучения задач математической физики. Это объясняется тем фактом, что многие задачи математической физики приводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных. Основные уравнения математической физики – это уравнения: волновое, теплопроводности и Лапласа. Они имеют много приложений в математической физике. Сюда относятся явления, изучаемые в гидродинамике, теории упругости, электродинамике и т.д.

Задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, которые по одной переменной (по времени) являются начальными, а по другим переменным (по пространственным переменным) - граничными, часто называются смешанными.

Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений.

Смешанными задачами также являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок. Смешанные задачи часто встречаются и в гидродинамике. Это и нелинейные задачи теории крыла и глиссирования, теория струйных течений, теории качки корабля и удара тел о поверхность жидкости, фильтрации, теории взрыва, ряд задач гидроупругости. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных четвертого и высоких порядков.

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом используются в теории автоматического управления и автоколебательных систем, при изучении явлений в технических, экономических и экологических системах.

Уравнения с запаздывающим аргументом появляются в случае, когда в рассматриваемой физической или технической задаче сила, действующая на материальную точку, зависит от скорости и положения этой точки не только в данный момент, но и в некоторый момент, предшествующий данный.

Большой вклад в развитие теории функционально-дифференциальных уравнений внесли Н. В. Азбелов, Б. И. Ананьев, Л. А. Бекларян, С. А. Брыкалов, А. И. Булгаков, Ю. А. Ведь, В. Б. Колмановский, Н. Н. Красовский, А. В. Кряжимский, А. Б. Куржанский, М. И. Иманалиев, В. П. Максимов, А. А. Мартынюк, Г. И. Марчук, Ю. А. Митропольский, А. Д. Мышкис, С. Б. Норкин, В. Р. Носов, В. Г. Пименов, Л. Ф. Рахматуллина, В. П. Рубаник, А. М. Самойленко, Дж. Хейл, В. Н. Шевело, Л. Э. Эльсгольц, М. Г. Юмагулов и многие другие ученые.

В последние 35 лет начали изучать так называемые дифференциальные уравнения с отражающим аргументом, в правой части которых неизвестная функция зависит от « $-t$ ». Такие уравнения рассматривались в работах А.Р. Автабизаде, Ю.К. Хянг, Дж. Вайнер, Ю.А. Ведь, М.Т. Матраимова и других.

В данной диссертационной работе изучаются смешанные задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка, содержащие нелинейные отклонения.

Целью диссертационной работы является изучение следующих вопросов:

1. Установить достаточные коэффициентные условия однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения;

2. Установить достаточные коэффициентные условия однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения;

3. Установить достаточные коэффициентные условия однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

4. Разработать достаточные условия разрешимости смешанной задачи для нелинейного уравнения, содержащие параболические и гиперболические операторы.

5. Выявить достаточные условия разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа.

6. Разработать достаточные условия разрешимости смешанной задачи для линейного уравнения, содержащие параболические, гиперболические операторы и операторы смешанного типа.

Задачи диссертационной работы:

1. Доказать однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения;

2. Определить достаточные коэффициентные условия однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения;

3. Находить достаточные коэффициентные условия однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

4. Выявить разрешимость смешанной задачи для нелинейного уравнения, содержащие параболические и гиперболические операторы.

5. Установить разрешимость краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа.

6. Обосновать разрешимость смешанной задачи для линейного уравнения, содержащие параболические, гиперболические операторы и операторы смешанного типа.

Методика исследования. Использованы: основные теоремы математического анализа, неравенство Гельдера, неравенство Минковского и неравенство Бесселя, метод последовательных приближений в банаховом пространстве и методы интегральных неравенств.

Научная новизна. Впервые изучаются однозначная обобщенная разрешимость смешанных задач для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения; для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения; для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается корректной постановкой задач, применением строгих математических методов, полными математическими доказательствами.

Теоретическая значимость диссертации. В теоретическом отношении результаты данной диссертационной работы являются основами развития теории нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.

Практическая значимость диссертации. Доказательства теорем конструктивны и позволяют построить алгоритмы при численных расчетах прикладных задач. Полученные результаты могут найти применение в теории нелинейных колебаний и автоматического регулирования.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Результаты диссертации опубликовались в 11 статьях в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК КР, ВАК РФ, ВАК Украины и ВАК Республики Узбекистан и в 5 докладах в сборниках материалов международных научных конференций. Публикации [3-5, 7-14] входят в перечень РИНЦ.

Апробация результатов диссертации. Материалы диссертации докладывались на разных научных конференциях: КГПУ имени Арабаева (Бишкек, 2002 г.); ОшГУ (Ош, 2001-2003 гг.); БатГУ (Кызыл-Кия, 2001-2017 гг.) и ФерГУ (Фергана, 2001 г.). Некоторые положения диссертации обсуждались также на семинарах: по уравнениям в частных производных при ОшГУ (г. Ош, 2012-2019 гг., руководитель семинара - доктор физ.-мат. наук, профессор А. Сопуев); на межвузовском научном семинаре по актуальным вопросам теории дифференциальных уравнений при ОшГУ (г.Ош, 2012-2019 гг., руководитель семинара - член-корр. НАН КР К. Алымкулов); на семинаре по дифференциальным уравнениям при ЖАГУ (г. Жалал-Абад, 2013-2019 гг., руководитель семинара - доктор физ.-мат. наук, профессор К. С. Алыбаев); на семинаре по дифференциальным уравнениям механики сплошных сред при СибГУ им. М. Ф. Решетнева (г. Красноярск, 2011 г., руководитель семинара - доктор физ.-мат. наук, профессор С. И. Сенашов).

Личный вклад соискателя. Во всех публикациях в соавторстве, включенных в диссертацию, реализация поставленных задач принадлежит диссертанту.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на 24 параграфов, выводов и библиографии из 172 наименований. Объем диссертации 129 страниц.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Установление достаточных коэффициентных условий однозначной обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения;

2. Установление достаточных коэффициентных условий однозначной обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения;

3. Установление достаточных коэффициентных условий однозначной обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

4. Определение достаточных условий разрешимости смешанной задачи для нелинейного уравнения, содержащие параболические и гиперболические операторы.

5. Выявление достаточных условий разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа.

6. Доказательство существования достаточных условий разрешимости смешанной задачи для линейного уравнения, содержащие параболические, гиперболические операторы и операторы смешанного типа.

Пользуясь случаем, я выражаю благодарность своему научному руководителю доценту Т.К. Юлдашеву за постановку задач и постоянный интерес к данной работе. Я признателен также профессору С.И. Сенашову и доценту К.Х. Шабадикову за полезные советы при обсуждении моей диссертационной работы.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы и отмечена научная новизна работы, а также кратко изложено содержание глав диссертации.

Первая глава состоит из четырех параграфов. § 1.1 носит вспомогательный характер и содержит основные обозначения, определения и факты из функционального анализа и теории уравнений математической физики.

В § 1.2 приводится краткий обзор литературы по теме диссертации. В § 1.3 приводится краткий обзор результатов диссертации и сформулированы постановки смешанных задач. В § 1.4 приводится заключение по главе 1.

В главе 2 в области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),u(\delta(t,x),x)\right) \qquad (1)$$

с начально-граничными условиями

$$\begin{aligned} &u(t,x)_{|\,t\in(-\infty,0\,]}=\varphi_1(t,x),\ u(t,x)_{|\,t\in(\,T,\infty\,)}=0,\\ &u_t(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_2(x),\ u_{tt}(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_3(x), \end{aligned} \qquad (2)$$

$$u(t,x)_{|\,x=0}=u(t,x)_{|\,x=l}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=l}=0, \qquad (3)$$

где $f(t,x,u\,\vartheta)\in C(D\times R^2)$, $\varphi_i(x)\in C^4(D_l)$, $\varphi_i(x)_{|\,x=0}=\varphi_i(x)_{|\,x=l}=$
$=\varphi_i''(x)_{|\,x=0}=\varphi_i''(x)_{|\,x=l}=0$, $i=\overline{1,3}$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$,
$0<l<\infty$, $0<T<\infty$, $\delta(t,x)\neq t$.

Решение данной задачи разыскивается в виде ряда Фурье:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, b_n(x)\,,\quad (t,x)\in D, \qquad (4)$$

где $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\dfrac{n\pi}{l},\ n=1,2,\dots$.

Определение 1. Если функция $u(t,x)\in \hat{W}_2^3(D),$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\left\{u(t,y)\left[-\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Phi-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi\right]-f\,\Phi\right\}d\,y\,d\,t=$$

$$=-\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right]_{t=0}d\,y+$$

$$+\int_0^l\varphi_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right]_{t=0}d\,y-\int_0^l\varphi_3\left[\Phi\right]_{t=0}d\,y$$

для любого $\Phi(t,x)\in C^{3,4}(D)$, то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3).

Согласно определению решение задачи (1)-(3) разлагается в ряд Фурье по собственным функциям дифференциального оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ почти для всех $t\in D_T$, причем единственным образом. Если $u(t,x)$ является обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3), то имеет место разложение (4) почти при всех $t\in D_T$ в смысле $L_2(D)$ и $a_n(t)=\int_0^l u(t,y)b_n(y)d\,y$, $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\dfrac{n\pi}{l},\ n=1,2,\dots$.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. $f\,Q:B_2(T)\to L_2(D)$ непрерывен;
2. $u(t,x)$ является решением смешанной задачи (1)-(3) и $a_n(t)=\int_0^l u(t,y)b_n(y)d\,y$.

Тогда коэффициенты Фурье решения смешанной задачи (1)-(3) по собственным функциям $b_n(x)$ удовлетворяют следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_n(t)=\psi_n(t)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y))\right)b_n(y)G_n(t,s)\,d\,y\,d\,s, \qquad (5)$$

где

$$\psi_n(t)=\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{\lambda_n^4\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}\cos\lambda_n t+$$

$$+\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+(1+\lambda_n^2)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^3+\lambda_n^5}\sin\lambda_n t,$$

$$G_n(t,s)=\mu_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-s)}+\lambda_n\sin\lambda_n(t-s)-\cos\lambda_n(t-s)\right],\ \ \mu_n=\left[\lambda_n(1+\lambda_n^2)\right]^{-1}.$$

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t \left\| f\left(s,x,Q\vec{a}^0(s),Q\vec{a}^0(\delta(s,x,Q\vec{a}^0(s)))\right)\right\|_{L_2(D_l)} ds\le\Delta<\infty;$

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\left\{F_1(t,x)|_{u,\vartheta}\right\}$, где $\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t\|F_1(s,x)\|_{L_2(D_l)}ds<\infty;$

3. $\delta(t,x,u)\in Lip\left\{F_2(t,x)|_u\right\}$, где $\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t\|F_2(s,x)\|_{L_2(D_l)}ds<\infty;$

4. $\|\vec{\psi}(t)\|_{B_2(T)}<\infty.$

Тогда ССНИУ (5) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$. Кроме того, имеет место оценка

$$\left\|\vec{a}^{k+1}(t)-\vec{a}^k(t)\right\|_{B_2(T)}\le\frac{\delta_1}{k!}\left[\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t F(s)ds\right]^k\exp\left\{\delta_2\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t F(s)ds\right\},$$

где $F(s)=2\|F_1(s,x)\|_{L_2(D_l)}+\Delta\left\|F_1(s,x)F_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}$, δ_1 и δ_2 - некоторые положительные постоянные.

Подставляя ССНИУ (5) в ряд (4), получим формальное решение смешанной задачи (1)-(3):

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\big[\psi_n(t)+$$
$$+\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y,Q\vec{a}(s)))\right)b_n(y)G_n(t,s)dyds \tag{6}$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Если $\vec{a}(t)\in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (5), то ряд (6) будет решением смешанной задачи (1)-(3).

Смешанная задача (1)-(3) изучена и в случае отклонения

$$\delta=\delta\left(t,x,\int\limits_0^t K(t,s)Q\vec{a}(s)ds\right) \text{ и } \delta=\delta\left(t,x,\int\limits_0^t K\left(t,s,Q\vec{a}(s)\right)ds\right).$$

Методом суммирования Чезаро изучается существование слабого решения смешанной задачи (1)-(3). Как известно, что частичные суммы Чезаро тригонометрического ряда для любой непрерывной функции равномерно сходятся к ней. Поэтому представляет интерес искать слабое решение задачи (1)-(3) в виде

$$u(t,x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)a_n(t)\,b_n(x)\,, \tag{7}$$

$b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x\,,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{l}\,.$

Подставляя ряд (7) в уравнение (1), получим следующую ССНИУ:

$$a_n(t)=\psi_n(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(s)b_\nu(y),\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(\delta(s,y))b_\nu(y)\right)\times$$

$$\times b_n(y)\cdot G_n(t,s)\,d\,y\,d\,s,$$

$$\psi_n(t)=\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{\lambda_n^4\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}\cos\lambda_n t+$$

$$+\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+(1+\lambda_n^2)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^3+\lambda_n^5}\sin\lambda_n t,$$

$$\overline{G}_n(t,s)=\overline{\mu}_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-s)}+\lambda_n\sin\lambda_n(t-s)-\cos\lambda_n(t-s)\right],$$

$$\overline{\mu}_n=\left[\lambda_n^2(1+\lambda_n^2)\right]^{-1},\ b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{l},\ n=1,2,\dots .$$

Отсюда получим

$$u(t,x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)a_n(t)b_n(x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)b_n(x)\big[\psi_n(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(s)b_\nu(y),\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(\delta(s,y))b_\nu(y)\right)\times$$

$$\times b_n(y)\overline{G}_n(t,s)\,d\,y\,d\,s\,\big].$$

Теорема 4. Пусть выполняются следующие условия:

1. $f(t,x,u,\vartheta)$ при фиксированном $t\in D_T$ непрерывна по $(x,u,\vartheta)\in D_l\times R$, по x удовлетворяет условию Гельдера;
2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\{h(t)|_{u,\vartheta}\}$, где $\int_0^t h(s)\,d\,s<\infty$;
3. $\left\| f\left(t,x,u_0(t,x),u_0(\delta(t,x),x)\right)\right\|_C\le h(t)$;
4. $\psi_1(t,x)\in C^1(D)$, где $\psi_1(t,x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)\psi_n(t)b_n(x)$.

Тогда уравнение

$$u(t,x)=\psi_1(t,x)+\int_0^t\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)f_n(u)b_n(x)\overline{G}_n(t,s)\,d\,s,$$

где $f_n(u)=\int_0^l f\left(s,y,u(t,y),u(\delta(t,y),y)\right)b_n(y)\,d\,s$, имеет единственное решение в классе $C^1(D)$.

В главе 3 в области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),\int_0^t K(t,s)u(\delta(s,x),x)\,d\,s\right)\qquad(8)$$

со смешанными условиями

$$u(t,x)|_{t\in(-\infty;0]}=\varphi_1(t,x),\ u(t,x)|_{t\in(T.\infty)}=0,\ u_t(t,x)|_{t=0}=\varphi_2(x),\qquad(9)$$

$$u(t,x)_{|\,x=0}=u(t,x)_{|\,x=l}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=l}=0, \tag{10}$$

где $f(t,x,u\,\vartheta)\in C(D\times R^2)$, $\varphi_i(x)\in C(D_l)$, $0<K(t,s)\in C(D_T^2)$, $\varphi_i(x)_{|\,x=0}=\varphi_i(x)_{|\,x=l}=\varphi_i''(x)_{|\,x=0}=\varphi_i''(x)_{|\,x=l}=0$, $i=\overline{1,2}$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$, $\delta(t,x)\neq t$.

Решение данной задачи тоже разыскивается в виде ряда Фурье (4).

Определение 2. Если функция $u(t,x)\in\hat{W}_2^2(D)$, удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\left\{u(t,y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}H+2\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}H+\frac{\partial^4}{\partial y^4}H\right]-f\,H\right\}dy\,dt=$$

$$=\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial}{\partial t}H\right]_{t=0}dy-\int_0^l\varphi_2\left[H\right]_{t=0}dy$$

для любой пробной функции $H(t,x)\in C^{2,4}(D)$, то она называется обобщенным решением смешанной задачи (8)-(10).

Теорема 5. Пусть выполняются следующие условия:

1. $f\,Q:B_2(T)\to L_2(D)$ непрерывен;
2. $u(t,x)$ является решением смешанной задачи (8)-(10) и

$$a_n(t)=\int_0^l u(t,y)\,b_n(y)\,dy\,.$$

Тогда коэффициенты Фурье решения смешанной задачи (8)-(10) по собственным функциям $b_n(x)$ удовлетворяет следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_n(t)=w_n(t)+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),\int_0^s K(s,\theta)Q\vec{a}\left(\delta(\theta,y)\right)d\theta\right)\times$$
$$\times\, b_n(y)P_n(t,s)\,dy\,ds,\quad t\in D_T\,, \tag{11}$$

где $w_n(t)=\left[\varphi_{1n}+t\left(\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{2n}\right)\right]\cdot e^{-\lambda_n^2 t}$, $\quad P_n(t,s)=(t-s)\cdot e^{-\lambda_n^2(t-s)}$.

Теорема 6. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\max\limits_{t\in D_T}\int_0^t\left\|f\left(s,x,Q\vec{a}^0(s),\int_0^s K(s,\theta)Q\vec{a}^0\left(\delta(\theta,x,Q\vec{a}^0(\theta))\right)d\theta\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds\le\Delta<\infty$;
2. $f(t,\,x,\,u,\vartheta)\in Lip\left\{H(t,x)_{|\,u};F_1(t,x)_{|\,\vartheta}\right\}$,

где $\|H(t,x)\|_{L_2(D_l)}=\alpha_1(t)>0$, $\|F_1(t,x)\|_{L_2(D_l)}=\alpha_2(t)>0$;

3. $\delta(t,x,u)\in Lip\left\{F_2(t,x)_{|\,u}\right\}$,

где $\left\|F_1(t,x)\int_0^t K(t,s)F_2(s,x)\,ds\right\|_{L_2(D_l)}=\alpha_3(t)>0$;

4. $\|\vec{w}(t)\|_{B_2(T)}<\infty$.

Тогда ССНИУ (11) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$.

Подставляя ССНИУ (11) в ряд (4), получим формальное решение смешанной задачи (8)-(10):

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)\left[w_n(t)+\right.$$
$$\left.+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q^{2,\eta}\vec{a}\left(\delta(s,y,Q\vec{a}(s))\right)\right)b_n(y)P_n(t,s)\,dy\,ds\right] \qquad (12)$$

Теорема 7. Пусть выполняются условия теоремы 6. Если $\vec{a}(t)\in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (11), то ряд (12) будет решением смешанной задачи (8)-(10).

Смешанная задача (8)-(10) изучена и в случае отклонение

$$\delta=\delta\left(t,x,\int_0^t K(t,s)Q\vec{a}(s)\,ds\right).$$

В главе 4 рассматриваются смешанные задачи для уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

Сначала рассматриваются линейные интегральные неравенства с отражением аргумента. Далее в области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),u\left(\delta(t,x,u(-t,x)),x\right)\right) \qquad (13)$$

с начальными

$$u(t,x)_{|\,t\in(-\infty;-T]}=0,\ u(0,x)=\varphi_1(x),\ u(t,x)_{|\,t\in(T,\infty)}=0,$$
$$u_t(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_2(x),\ u_{tt}(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_3(x), \qquad (14)$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|\,x=0}=u(t,x)_{|\,x=l}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=l}=0, \qquad (15)$$

где $f(t,x,u\vartheta)\in C(D\times R^2)$, $\varphi_i(x)\in C^4(D_l)$, $\varphi_i(x)_{|\,x=0}=\varphi_i(x)_{|\,x=l}=$
$=\varphi_i''(x)_{|\,x=0}=\varphi_i''(x)_{|\,x=l}=0$, $i=\overline{1,3}$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[-T,T]$, $D_l\equiv[0,l]$,
$0<l<\infty$, $0<T<\infty$, $\delta(t,x)\neq t$.

Решение данной задачи разыскивается в виде ряда Фурье (4).

Определение 3. Если функция $u(t,x)\in\hat{W}_2^3(D)$, удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_{-T}^{T}\int_0^l\left\{u(t,y)\left[-\frac{\partial^3}{\partial t^3}\overline{\Phi}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right)-\frac{\partial^4}{\partial y^4}\overline{\Phi}\right]-f\,\overline{\Phi}\right\}dy\,dt=$$
$$=-\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{\Phi}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right]_{t=0}dy+$$
$$+\int_0^l\varphi_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Phi}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right]_{t=0}dy-\int_0^l\varphi_3\left[\overline{\Phi}\right]_{t=0}dy$$

для любого $\overline{\Phi}(t,x)\in C^{3,4}(D)$, то она называется обобщенным решением смешанной задачи (13)-(15).

Теорема 8. Пусть выполняются следующие условия:

1. $f\,Q: B_2(T)\to L_2(D)$ непрерывен;

2. $u(t,x)$ является решением смешанной задачи (13)-(15) и

$$a_n(t)=\int_0^l u(t,y)b_n(y)dy.$$

Тогда коэффициенты Фурье решения смешанной задачи (13)-(15) по собственным функциям $b_n(x)$ оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ удовлетворяет следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_n(t)=\omega_n(t)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y,Q\vec{a}(-s)))\right)\times$$
$$\times b_n(y)G_n(t,s)\,dy\,ds,\ t\in D_T, \tag{16}$$

где

$$\omega_n(t)=\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2(1-\lambda_n^2)}e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{\lambda_n^3\varphi_{1n}+\lambda_n(1+\lambda_n)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{2\lambda_n^2(1+\lambda_n)}e^{\lambda_n t}+$$
$$+\frac{-\lambda_n^3\varphi_{1n}-\lambda_n(1-\lambda_n)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{2\lambda_n^2(1-\lambda_n)}e^{-\lambda_n t},\ \mu_n=2\lambda_n(1-\lambda_n^2),$$
$$G_n(t,s)=\frac{1}{\mu_n}\left[-e^{-\lambda_n^2(t-s)}+2\left(ch\lambda_n(t-s)-\lambda_n sh\lambda_n(t-s)\right)\right].$$

Теорема 9. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\left|\max\limits_{t\in D_T}\int_0^t\left\| f\left(s,x,Q\vec{a}^0(s),Q\vec{a}^0(\delta(s,x,Q\vec{a}^0(-s)))\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds\right|\le\Delta<\infty;$

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\left\{h_1(t,x)_{|u,\vartheta}\right\}$, где $\int_0^t\left\|h_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}ds<\infty;$

3. $\delta(t,x,u)\in Lip\left\{h_2(t,x)_{|u}\right\}$, где $\int_0^t\left\|h_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}ds<\infty;$

4. $\left\|\vec{\omega}(t)\right\|_{B_2(T)}<\infty.$

Тогда ССНИУ (16) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$.

Подставляя ССНИУ (16) в ряд (4), получим формальное решение смешанной задачи (13)-(15):

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\left[\omega_n(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y,Q\vec{a}(-s)))\right)b_n(y)G_n(t,s)\,dy\,ds\right. \tag{17}$$

Теорема 10. Пусть выполняются условия теоремы 9. Если $\vec{a}(t) \in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (16), то ряд (17) будет решением смешанной задачи (13)-(15).

В главе 5 рассматриваются смешанные задачи для уравнений, содержащих суперпозицию параболического, гиперболического оператора и операторы смешанного типа.

В разделе 5.1 области D рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x)\right) \tag{18}$$

с условиями

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi_1(x),\ u_t(t,x)|_{t=0}=\varphi_1(x),\ u_{tt}(t,x)|_{t=0}=\varphi_1(x), \tag{19}$$

$$u(t,x)_{|\,x=0}=u(t,x)_{|\,x=l}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=l}=0= \\ =u_{xxxx}(t,x)_{|\,x=0}=u_{xxxx}(t,x)_{|\,x=l}=0, \tag{20}$$

где $f(t,x,u(t,x))\in C(D\times R),\quad \varphi_i(x)\in C(\Omega_l),$

$\varphi_i(x)|_{x=0}=\varphi_i(x)|_{x=l}=\varphi_i''(x)|_{x=0}=\varphi_i''(x)|_{x=l}=\varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=0}=$

$=\varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=l}=0,\ i=\overline{1,3},\ D\equiv\Omega_T\times\Omega_l,\ \Omega_T\equiv(0,T),\ \Omega_l\equiv(0,l),\quad i=\overline{1,3}$,

$0<l<\infty,\ 0<T<\infty.$

Решение данной задачи ищем в виде ряда Фурье:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\,b_n(x),\quad (t,x)\in D, \tag{21}$$

где функции $b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{l},\ n=1,2,\ldots$. удовлетворяют граничным условиям

$$b_n(0)=b_n(l)=b_n''(0)=b_n''(l)=b_n^{(IV)}(0)=b_n^{(IV)}(l)=0.$$

Тогда из (21) для $a_n(t),\ n=1,2,\ldots$ получим следующую счетную систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$a_n^{III}(t)+\lambda_n^2 a_n^{II}(t)+\lambda_n^4 a_n^{I}(t)+\lambda_n^4 a_n(t)= \\ =\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l f(t,x,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(t)\cdot b_\nu(x))b_n(x)dx \tag{22}$$

где $a_n(t)=\int_0^l u(t,x)b_n(x)dx,\ n=1,2,\ldots$

Решая систему (1.3.22) методом вариации произвольных постоянных, получим следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_n(t)=\psi_n(t)+\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l\int_0^l f(s,x,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(s)\cdot b_\nu(x))b_n(x)G_n(t,s,)dx\,ds,\ t\in\Omega_T, \tag{23}$$

где

Итак, изучение разрешимости смешанной задачи (18)-(20) свели к изучению однозначной разрешимости ССНИУ (1.3.23).

Теорема 11. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\| \vec{\psi}(t) \|_{B_p(T)} < \infty;$

2. $\int_0^t \left\| f\left(s, x, \sum_{v=1}^{\infty} \psi_v(s) \cdot b_v(x) \right) \right\|_{L_p(D_l)} ds = \Delta < \infty;$

3. $f(t,x,u) \in Lip\{q(t,x)|_u\},$

где

$$\int_0^t \left\| q(s,x) \right\|_{L_p(\Omega_l} ds < \infty, \ \left\| q(s,x) \right\|_{L_p(\Omega_l} \equiv \left\{ \int_0^l q^p(s,x) dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда ССНИУ (23) имеет единственное решение в пространстве $B_p(T)$.

Теорема доказывается методом последовательных приближений.

Теорема 12. Пусть $\vec{a}(t)$ является решением ССНИУ (23). Тогда последовательность функций $\{u(t,x)\} = \{Q\vec{a}^k(t)\}$ к функции $u(t,x) = Q\vec{a}(t)$, которая является единственным решением смешанной задачи (18)-(20).

Доказательство теоремы следует из справедливости следующего соотношения

$$\left| u^k(t,x) - u(t,x) \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n^k(t) - a_n(t) \right| \cdot \left| b_n(x) \right| \le$$

$$\le M_2 \cdot \left\| \vec{a}^k(t) - \vec{a}(t) \right\|_{B_p(T)}.$$

В разделе 5.2 в области $D \equiv D_1 \times D_2$ рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{ttt}(t,x) + u_{xxx}(t,x), & (t,x) \in D_1, \\ u_{ttt}(t,x) - u_{ttt}(t,x), & (t,x) \in D_2 \end{cases} \tag{24}$$

с условиями

$$u(t,x)|_{t=-T} = \varphi_1(x), \ u(t,x)|_{t=T} = \varphi_2(x), u_t(t,x)|_{t=T} = \varphi_3(x), \tag{25}$$

$$u(t,x)|_{x=-1} = u(t,x)|_{x=0} = u(t,x)|_{x=1} = 0, \tag{26}$$

где $D_1 \equiv E_T^+ \times E_0$, $D_2 \equiv E_T^- \times E_0$, $E_T^- \equiv (-T,0)$, $E_T^+ \equiv (0,T)$, $E_0 \equiv (-1,1)$, $\varphi_i(x) \in C^4(E_0)$, $\varphi_i(x)_{|x=-1|} = \varphi_i(x)_{|x=0|} = \varphi_i(x)_{|x=1|} = 0$, $i = \overline{1,3}$.

Задачу (24)-(25) будем изучать при следующих условиях склеивания:

$$u(+0,\chi) = u(-0,\chi), u_t(+0,\chi) = u_t(-0,\chi), u_{tt}(+0,\chi) = u_{tt}(-0,\chi). \tag{27}$$

Под решением уравнения (24) в области D будем понимать функцию $u(t,x)$ из класса $C(\overline{D}) \cap C(D)$, которая в областях D_1 и D_2 является регулярным решением соответствующего уравнения и удовлетворяет условиям (25)-(27). Регулярность означает непрерывность в D всех производных, входящих в уравнение.

Решение данной задачи ищем в виде следующего ряда Фурье:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot b_n(x). \tag{28}$$

Основные результатом этого раздела является следующая

Теорема 1.3.13. Функция $u(t,x)$, определяемая рядом (28), имеет непрерывные производные по аргументам t, x четвертого порядка и удовлетворяет уравнению (24) и условиям (25)-(27). При этом возможно почленное дифференцирование рядом (28) по аргументам t, x и полученные ряды будут сходиться абсолютно и равномерно.

В разделе 5.3 в области $D \equiv D_1 \times D_2$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + sign t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x) = 0 \qquad (29)$$

с условиями

$$u(t,x)_{|t=-\tau} = \varphi_1(x), u(t,x)_{|t=\tau} = \varphi_2(x), u_t(t,x)_{|t=\tau} = \varphi_3(x), \qquad (30)$$

$$\begin{aligned} &u(t,x)|_{x=0} = u(t,x)|_{x=l} = u_{xx}(t,x)|_{x=0} = u_{xx}(t,x)|_{x=l} = \\ &= u_{xxxx}(t,x)|_{x=0} = u_{xxxx}(t,x)|_{x=0} = 0,\ t \in E_\tau, \end{aligned} \qquad (31)$$

где

$$\varphi_i(x) \in C^7(E_0), \varphi_i(x)|_{x=0} = \varphi_i(x)|_{x=l} = \varphi_i''(x)|_{x=0} = \varphi_i''(x)|_{x=l} =$$

$$= \varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=0} = \varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=l} = 0,\ i = \overline{1,3},$$

$$D_1 \equiv E_\tau^+ \times E_0, D_2 \equiv E_\tau^- \times E_0,$$

$$E_\tau^- \equiv (-\tau, 0)\ ,\ E_\tau^+ \equiv (0,\tau)\ ,\ E_0 \equiv (0,l),\ 0 < l < \infty,\ 0 < \tau < \infty,$$

$0 < \varepsilon$ - малый параметр.

Задачу (29)-(31) будем изучать при следующих условиях склеивания

$$u(+0,x) = u(-0,x),\ u_t(+0,x) = u_t(-0,x),\ u_{tt}(+0,x) = u_{tt}(-0,x), \qquad (32)$$

при этом предположим $u(+0;0) = u(-0;0) = u(+0;\,l) = u(-0;\,l) = 0.$

Под решением уравнения (29) в области D будем понимать функцию $u(t,x)$ из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D),$ которая в областях D_1 и D_2 является регулярным решением соответствующего уравнения и удовлетворяет условиям (30)-(32). Регулярность означает непрерывность в D всех производных, входящих в уравнение (29).

Решение данной задачи ищем в виде следующего ряда Фурье

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cdot b_n(x),\ (t,x) \in D, \qquad (33)$$

где функции $b_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_n}x, \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1,2,\ldots,$ удовлетворяют граничным условиям:

$$b_n(0) = b_n(l) = b_n''(0) = b_n''(l) = b_n^{(IV)}(0) = b_n^{(IV)}(l) = 0.$$

Подставляя ряд (33) в уравнение (29), получим следующие функции

$$a_n(t) = A_{1n}e^{-\varepsilon\lambda_n t} + A_{2n}e^{\sqrt{\lambda_n}t} + A_{3n}e^{-\sqrt{\lambda_n}t},\ x \in E_\tau^+, \qquad (34)$$

$$a_n(t) = B_{1n}e^{-\varepsilon\lambda_n t} + B_{2n}\cos\sqrt{\lambda_n}t + B_{3n}\sin\sqrt{\lambda_n}t,\ x \in E_\tau^+, \qquad (35)$$

После определения коэффициентов A_{1n} и $B_{1n}, i = \overline{1,3}$ получим следующие представления:

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}e^{-\varepsilon\lambda_n t} + A_{2n}\,e^{\sqrt{\lambda_n}t} + A_{3n}\,e^{-\sqrt{\lambda_n}t}\right]\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}x; \qquad (36)$$

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_{1n}e^{-\varepsilon\lambda_n t} + B_{2n}\cos\sqrt{\lambda_n}t + B_{3n}\sin\sqrt{\lambda_n}t\right]\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}x. \qquad (37)$$

Теорема 14. Функция $u(t,x)$, определяемая рядами (36) и (37), имеет непрерывные производные по t третьего порядка и по x шестого порядка, удовлетворяет уравнению (29) и условиям (30)-(32). При этом возможно почленное дифференцирование рядов (36) и (37) по t три раза и по x шесть раз и полученные ряды будут сходиться абсолютно и равномерно.

Выводы

В данном диссертационном исследовании сформулирована и доказана однозначная обобщенная разрешимость смешанных задач: для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения; для нелинейных интегро–дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения; для нелинейных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения; для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

В теоретическом отношении результаты данной диссертационной работы внесет вклад для развития теории нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частых производных четвертого порядка.

Доказательство теорем конструктивны и позволяют построить алгоритмы при численных расчетах прикладных задач. Полученные результаты могут найти применение в теории нелинейных колебаний и автоматического регулирования.

В работе получены следующие научные результаты:

1. Установлены достаточные коэффициентные условия однозначной обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения.

2. Определены достаточные коэффициентные условия однозначной обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения.

3. Найдены достаточные условия однозначной обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

4. Обоснована разрешимость смешанной задачи для нелинейного уравнения, содержащие параболические и гиперболические операторы.

5. Установлена разрешимость краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа.

6. Доказана разрешимость смешанной задачи для линейного уравнения, содержащие параболические, гиперболические операторы и операторы смешанного типа.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Дыйканов Г.А. О смешанной задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с нелинейным отклонением по времени [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2010. – №2. – С. 164–169.
2. Дыйканов Г.А. Краевая задача для однородного эллиптико-гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Складні системи і процеси. – 2010. – №1. – С.19–24.
3. Дыйканов Г.А. О смешанной задаче для нелинейного уравнения четвертого порядка с нелинейным отклонением по времени [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Решетневские чтения. Материалы XIV межд. научн. конф., 10-12 ноября 2010 г., г. Красноярск. – Красноярск: СибГАУ, 2010. – Часть 2. – С. 465–466.
4. Дыйканов Г.А. Смешанная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с максимумами [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Решетневские чтения. Материалы XIV межд. научн. конф., 10-12 ноября 2011 г., г. Красноярск. – Красноярск: СибГАУ, 2011. – Часть 2. – С. 553–554.
5. Дыйканов Г.А. О разрешимости смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения шестого порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. – 2011. – №1. – С. 48–52.
6. Дыйканов Г.А. Краевая задача для смешанного уравнения шестого порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. - 2011. - №1. - С. 52–54.
7. Дыйканов Г.А. Смешанная задача для одного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [Текст] / Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. - 2017. - № 2. - С. 41–48.
8. Дыйканов Г.А. О смешанной задаче для одного дифференциального уравнения четвертого порядка с нелинейным отражающим отклонением [Текст] / Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. - 2018. - № 4. - С. 9–17.
9. Дыйканов Г.А. Обобщенная разрешимость смешанной задачи для одного интегро-дифференциального уравнения с нелинейным отклонением [Текст] / Г. А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. - 2018. - № 4. - С. 17–25.

Дыйканов Гапар Аскаровичтин 01.01.02 - «Дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу» адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн «Төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу сызыктуу эмес функционалдык-дифференциалдык теңдемелер үчүн аралаш маселелердин чечилүүчүлүгү жөнүндө» темасындагы диссертациялык ишине

Резюме

Ачкыч сөздөр: Аралаш маселелер, баштапкы жана чек аралык шарттар, жалпыланган чечимдин жашашы, гиперболалык, параболалык жана эллипстик операторлор, интегралдык теңдеме, сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин санактык системасы, чечимдин жалгыздыгы, чечимдин жашашы.

Изилдөөнүн обьекти: Төртүнчү тартиптеги параболалык жана гиперболалык операторлордун суперпозициясын кармаган теңдемелер үчүн аралаш маселелер, параболалык оператордун квадраты, параболалык жана эллипстик операторлордун суперпозициясы.

Изилдөөнүн предмети: Параболалык жана гиперболалык операторлордун суперпозициясын, параболалык оператордун квадратын, параболалык жана эллипстик операторлордун суперпозициясын кармап турган төртүнчү тартиптеги теңдемелер үчүн аралаш маселелердин чечимдеринин жашашын жана жазгыздыгын изилдөө.

Изилдөөнүн максаты: Параболалык жана гиперболалык операторлордун суперпозициясын, параболалык оператордун квадратын, параболалык жана эллипстик операторлордун суперпозициясын кармап турган төртүнчү тартиптеги теңдемелер үчүн аралаш маселелердин бир маанилүү чечимдерге ээ болушунун коэффициенттик жетиштүү шарттардын тургузуу.

Изилдөөнүн методдору: Изилдөөдө интегралдык барабарсыздыктар, удаалаш жакындаштыруу методу, функционалдык анализдин жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер теориясынын методдору колдонулду.

Изилдөөнүн илимий жаңычылдыгы: Параболалык жана гиперболалык операторлордун суперпозициясын жана сызыктуу эмес четтөөлөрдү кармап турган сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелер үчүн, параболалык оператордун квадратын кармап турган сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн, параболалык жана эллипстик операторлордун суперпозициясын жана сызыктуу эмес чагылтуучу четтөөлөрдү кармап турган сызыктуу эмес теңдемелер үчүн аралаш маселелердин бир маанилүү жалпыланган чечилүүсү биринчи жолу изилдеп үйрөнүлгөн;

Изилдөөлөрдүн теориялык жана практикалык маанилүүлүгү: Диссертациядагы алынган жыйынтыктар сызыктуу эмес төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин теориясын өнүктүрүүгө салым кошот.

Теоремалардын далилдөөлөрү конструктивдүү жана прикладдык маселелердин сандык эсептөөлөрүндөгү алгоритмдердин түзүүгө өбөлгө түзөт.

Алынган жыйынтыктар сызыктуу эмес термелүүлөр теориясында жана автоматтык башкарып-түзөөлөрдө колдонулат.

РЕЗЮМЕ

Диссертационной работы Дыйканова Гапара Аскаровича на тему: "О разрешимости смешанных задач для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка" на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: Смешанные задачи, начальные и граничные условия, обобщенная разрешимость, гиперболический, параболический и эллиптические операторы, интегральные уравнения, счетные системы нелинейных интегральных уравнений, единственность решения, существование решения.

Объект исследования: Смешанные задачи для уравнений четвертого порядка, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов, квадрат параболического оператора, суперпозиция параболического и эллиптического операторов.

Предмет исследования: Исследования существования и единственности решения смешанных задач для уравнений четвертого порядка, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов, квадрат параболического оператора и суперпозицию параболического и эллиптического операторов.

Цель исследования: Установление достаточных коэффициентных условий однозначной обобщенной разрешимости смешанных задач для уравнений четвертого порядка, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов, квадрат параболического оператора и суперпозицию параболического и эллиптического операторов.

Методы исследования: При исследовании были использованы методы интегральных неравенств, метод последовательных приближений, методы функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.

Научная новизна исследования:

Впервые изучаются однозначная обобщенная разрешимость смешанных задач для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения; для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения; для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

Теоретическое и практическое значения исследования: В теоретическом отношении результаты данной диссертационной работы внесет вклад в развитие теории нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.

Доказательства теорем конструктивны и позволяют построить алгоритмы при численных расчетах прикладных задач.

Полученные результаты могут найти применение в теории нелинейных колебаний и автоматического регулирования.

SUMMARY

DYIKANOV GAPAR ASKAROVICH

The dissertation work of Dyikanov Gapar Askarovich on the topic: "On solvability of mixed problems for nonlinear fourth-order functional differential equations in partial derivatives" for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.01.02 - Differential Equations, Dynamical Systems and Optimal Control

Keywords: Mixed problems, initial and boundary conditions, generalized solvability, hyperbolic, parabolic and elliptic operators, integral equations, countable systems of nonlinear integral equations, uniqueness of a solution, existence of a solution.

Object of research: Mixed problems for fourth-order equations containing a superposition of parabolic and hyperbolic operators, the square of a parabolic operator, the superposition of parabolic and elliptic operators.

Subject of research: Studies on the existence and uniqueness of the solution of mixed problems for fourth-order equations containing a superposition of parabolic and hyperbolic operators, the square of a parabolic operator, and a superposition of parabolic and elliptic operators.

Aim of research: To establish sufficient coefficient conditions for the unambiguous generalized solvability of mixed problems for equations of the fourth order containing a superposition of parabolic and hyperbolic operators, a square of a parabolic operator, and a superposition of parabolic and elliptic operators.

Methods of research: The study used the methods of integral inequalities, the method of successive approximations, the methods of functional analysis and the theory of nonlinear integral equations.

Scientific novelty. The unique generalized solvability of mixed problems for nonlinear differential equations containing the superposition of parabolic and hyperbolic operators and nonlinear deviations are studied for the first time; for nonlinear integro-differential equations containing the square of a parabolic operator and nonlinear deviations; for nonlinear equations containing a superposition of parabolic and elliptic operators and nonlinear reflecting deviations.

Theoretical and practical implications of the study: Theoretically, the results of this dissertation will make a definite contribution to the development of the theory of nonlinear differential and integro-differential equations in partial derivatives of the fourth order.

The proofs of the theorems are constructive and allow us to construct algorithms for the numerical calculations of applied problems.

The results obtained can be applied in the theory of nonlinear oscillations and automatic control.