

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Ж.БАЛАСАГЫНА

**Диссертационный совет Д 01.12.001**

*На правах рукописи*  
**УДК 517.928.2+517.955.8**

**Турсунов Дилмурат Абдиллажанович**

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ  
ОБЫКНОВЕННЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**

специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические  
системы и оптимальное управление

**АВТОРЕФЕРАТ**  
**диссертации на соискание ученой степени**  
**доктора физико-математических наук**

**Бишкек – 2014**

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии Ошского государственного университета.

**Научный консультант:** доктор физико-математических наук, профессор, член-корр. НАН КР **Алымкулов Келдибай**

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК **Отелбаев Мухтарбай**

доктор физико-математических наук,  
доцент **Омуралиев Асан Сыдыгалиевич**

доктор физико-математических наук,  
доцент **Алыбаев Курманбек Сарманович**

**Ведущая организация:** Казахский национальный университет им. Аль-Фараби.  
Адрес: Республика Казахстан, 480012, г. Алматы, ул. Масанчы, 39/47.

Защита диссертации состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2014 г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д 01.12.001 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, д.ф.-м.н., с.н.с.

Искандаров С.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Во многих областях науки, таких как: биология, экология, химия, космическая динамика, квантовая механика, теория течений вязкой жидкости, теория упругости, электромагнитная теория, электроника, астрофизика и др. сложные задачи описываются так называемыми «дифференциальными уравнениями с малыми параметрами».

Уравнения с малыми параметрами называются возмущенными по названию метода возмущений, применяемого для их решения. Часто требуется определить, насколько существенно изменит поведение решения эти малые члены. Возмущение называется *регулярным*, если решение задачи при стремлении малого параметра к нулю равномерно переходит в предельное состояние – решение предельной (невозмущенной) задачи. Если равномерный переход решения в предельное состояние оказывается невозможным, то такие возмущения называются *сингулярными*.

Возмущение называется бисингулярным, если в сингулярном возмущении предельное уравнение имеет особенность (сингулярность). Большому количеству сингулярно и бисингулярно возмущенных задач свойственно быстрое изменение решения в некоторых узких областях – пограничных и переходных слоях.

Случаи, когда дифференциальные уравнения с малыми параметрами имеют явные решения, крайне редки. При достаточно малых значениях параметра определить поведение решения – весьма трудоемкая задача даже для современных компьютеров. Математики осознали важность асимптотических рядов в теории дифференциальных уравнений с малыми параметрами. С помощью асимптотических рядов можно определить структуры решений дифференциальных уравнений с малыми параметрами. Поэтому в настоящее время интенсивно разрабатываются различные методы получения асимптотики решения таких уравнений.

Систематическое развитие асимптотической теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений было начато А.Н. Тихоновым. К настоящему времени различные классы сингулярно возмущенных задач исследованы в работах М.Н. Вишика, Л.А. Люстерника, А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова, Л.С. Понтрягина, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розова, А.М. Ильина, С.А. Ломова, М.И. Иманалиева, П.С. Панкова, К. Алымкулова, С. Каримова, К. Какишова, К.С. Алыбаева, А.С. Омуралиева, А.М. Джураева, W. Wasow, N. Levinson, W. Eckhaus, E.M. De Jager, J. Kevorkian, J.D. Cole, J. Grasman, P.P.N. De Groen и др.

Вместе с тем, проблема построения асимптотических разложений решений для некоторых классов сингулярно возмущенных задач до сих пор остается актуальной. К числу таких задач и относятся так называемые бисингулярные задачи, в которых одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая – с негладкостью членов асимптотики. Отсюда следует, что сингулярно возмущенные уравнения с точками поворота являются бисингулярными.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию бисингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости и эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных.

Первый факт такого рода - явление задержки решения на некотором отрезке при потере асимптотической устойчивости – обнаружено в работе М. Шишковой (1973 г.) под руководством академика Л.С. Понтрягина. Далее, исследования по сингулярно возмущенным уравнениям при нарушении условия асимптотической устойчивости были продолжены для более общих случаев С. Каримовым и его учениками. К.С. Алыбаев разработал общий метод линий уровня для исследования сингулярно возмущенных задач при нарушении условия асимптотической устойчивости, примененный потом М.Р. Нарбаевым. Однако ранее во всех исследованиях по данному направлению предельное (соответствующее невозмущенное) уравнение имело только тривиальное решение, т.е. без особенностей. Случай, когда предельное уравнение имеет особенности, остался неисследованным. Кроме того, при использовании метода линий уровня окрестность критической линии уровня оставалась неисследованной, так как на этой линии

$$A_{11}(t_1, t_2) \equiv 0 \quad (A_{11}(t_1, t_2) = \operatorname{Re} \int_{t_0}^{t_1 + it_2} \lambda_1(s) ds).$$

Вопрос об асимптотическом разложении решения любой степени точности тоже оставался неисследованным.

Впервые краевая задача для бисингулярно возмущенных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка со слабой особой точкой для невозмущенного уравнения была исследована Ж. Коулом. К.В. Емельянов, применяя метод сращивания Ван-Дайка, построил асимптотику решения бисингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка для случаев, когда невозмущенное уравнение имеет регулярную или иррегулярную особую точку.

К. Алымкулов и А. Зулпукаров, используя метод структурного сращивания, построили равномерные асимптотические разложения решений бисингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. К. Алымкулов и Ж. Жээнтаева применили метод структурного сращивания для обыкновенных дифференциальных уравнений типа Лайтхилла первого порядка, которые тоже являются бисингулярными. К. Алымкулов, Т.Д. Асылбеков и С.Ф. Долбеева обобщенным методом погранфункций построили равномерное асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Методом сращивания А.М. Ильин исследовал: 1) бисингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка; 2) бисингулярно возмущенные эллиптические уравнения; 3) бисингулярно возмущенные гиперболические системы; 4) бисингулярно возмущенные квазилинейные параболические уравнения.

Недостатком метода сращивания является то, что обоснование формального асимптотического разложения решения является достаточно сложным. Оценка остаточного члена производится неточно.

Необходимость обобщения метода пограничных функций для возможности их единообразного применения к бисингулярно возмущенным задачам и определяет актуальность настоящей работы.

### **Связь темы диссертации с государственными программами.**

Работа выполнялась в рамках проектов по Институту фундаментальных и прикладных исследований при ОшГУ по темам:

1) «Сингулярно возмущенные обыкновенные и в частных производных дифференциальные уравнения с малым параметром и особой точкой», договор с МОН КР, СГЗ 14/08 от 8.01.2008 г.;

2) «Изучение математических моделей гидроаэродинамики, химической кинетики, тепло-массообмена и других явлений природы» № гос. регистрации 0005721, 20.04.2012 г.;

3) «Математические задачи гидроаэродинамики и других явлений природы», договор с МОН КР, УН 28/13 от 28.03.2013 г.

### **Цель и задачи исследования.**

1. Разработать алгоритм построения асимптотики решения бисингулярно возмущенных: а) линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости; б) линейных эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных.

2. Применить предложенный подход: а) для построения асимптотики решения обобщенного модельного уравнения Л.С. Понтрягина, при нарушении условия асимптотической устойчивости; б) для построений асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений с периодическими точками поворота.

3. Применить обобщенный метод погранфункций для построений равномерных асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости.

4. Применить обобщенный метод погранфункций для построений равномерных асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных эллиптических дифференциальных уравнений, когда особенность появляется: внутри области, на границе области, одновременно на границе и внутри области.

**Методика исследования** обусловлена целями и задачами исследования. В диссертационной работе используются методы интегрирования по частям, последовательных приближений, стационарной фазы, перевала и обобщенный метод погранфункций.

### **Научная новизна работы.**

Впервые в диссертационной работе построены:

- главные члены асимптотики решений сингулярно возмущенных линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости с периодическими точками поворота;
- главный член асимптотики решения обобщенного модельного уравнения Л.С. Понтрягина, при нарушении условия асимптотической устойчивости;
- главные члены асимптотики решений сингулярно возмущенных линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости с простыми и кратными точками поворота;
- равномерные асимптотические разложения решений с любой степенью точности бисингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости с применением обобщенных погранфункций;
- равномерные асимптотические разложения решений бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений, когда особенность появляется: внутри области, на границе области, на границе и внутри области одновременно.

Разработан алгоритм построения асимптотики решения бисингулярно возмущенных: а) линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости; б) линейных эллиптических дифференциальных уравнений.

**Теоретическая значимость** диссертационной работы определяется возможностью её применения в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Разработанные в диссертации алгоритмы могут быть применены для построения асимптотики решения различных классов бисингулярно (сингулярно) возмущенных задач.

**Практическая ценность** диссертационного исследования состоит в том, что полученные результаты могут быть применены в теории возмущений, гидродинамике, аэродинамике, химической кинетике, физике лазеров, биологии и в других отраслях науки. Результаты также могут быть использованы при чтении лекционных курсов по теории возмущений, специальному курсу для подготовки бакалавров и магистров по направлению «Математика», «Прикладная математика и информатика», кроме того, специалистам в области математики для решения различных теоретических задач, связанных с качественной теорией дифференциальных уравнений.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

- равномерные асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений: с простыми, периодическими и кратными точками поворота в комплексной плоскости;

- доказательство применимости метода погранфункций и равномерные асимптотические разложения решений любой степени точности сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с кратными точками поворота в комплексной плоскости;

- равномерные асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных эллиптических уравнений: с кратной точкой поворота внутри области; с особой границей; одновременно с кратной точкой поворота внутри и на границе области.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались:

- на семинаре кафедры алгебры и геометрии Ошского государственного университета под руководством профессора Г. Матиевой (г. Ош, 2006-2013 гг.).

- на межрегиональном семинаре математиков южного Кыргызстана «Актуальные проблемы математики и информатики» под руководством член-корр. НАН КР, профессора К. Алымкулова (г. Ош, 2007-2013 гг.).

- на международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвященной 60-летию со дня рождения академика А.А. Борубаева (г. Бишкек, 2010 г.).

- на международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (г. Новосибирск, Россия, май-июнь 2011 г.).

- на международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященной 80-летию академика М.И. Иманалиева (г. Бишкек, 2011 г.).

- на III и IV конгрессах всемирного математического общества тюркоязычных стран (г. Алматы, Казахстан, 2009; г. Баку, Азербайджан, 2011 г.).

- на международной конференции «Функциональный анализ и его приложения», посвященной 70-летию со дня рождения академика РК М. Отелбаева (г. Астана, Казахстан, октябрь 2012 г.).

- на Сибирских конференциях по параллельным и высокопроизводительным вычислениям (г. Томск, Россия, 2009, 2011, 2013 г.).

- на Всероссийской конференции по математике и механике, посвященной 135-летию Томского государственного университета и 65-летию механико-математического факультета (г. Томск, Россия, 2013 г.).

- на научно-теоретической конференции «Актуальные проблемы физики, математики и информатики» посвященной 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Б. Арапова (г. Ош, 2013 г.).

- на международной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их применения» (г. Ташкент, Узбекистан, ноябрь 2013 г.).

- на международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвященной 20-летию образования Кыргызско-Российского Славянского университета и 100-летию основателя математической школы в Кыргызстане профессора Я.В. Быкова (с. Булан-Соготту, сентябрь 2013 г.).



Все научные результаты, отраженные в диссертации, получены автором лично.

**Публикации по теме диссертации.** По результатам исследований соискателем опубликована: 1 монография [1], 27 статей [2]-[28], и 6 тезисов докладов [29]-[34].

**Личный вклад автора в совместных работах.**

В совместных работах [3], [12], [29]-[31] К. Алымкулову принадлежат постановки проблем, а соискателю – их решения. В [8], [16], [17], [21], [28], [23]-[26] обсуждение результатов принадлежит соавторам, а постановка задачи, доказательство теорем и получение результатов – автору.

**Структура и объем диссертации:** Диссертационная работа состоит из перечня условных обозначений и определений; введения; шести глав, содержащих 26 разделов; вывода; списка использованных источников. Объем текста 192 страниц.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

### **Условные обозначения и определения, принятые в диссертационной работе**

- ОДУ – обыкновенные дифференциальные уравнения.
- ФАР – формальное асимптотическое разложение.
- Бисингулярность – двойная сингулярность.
- $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{R}$  – множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно.
- $i=\sqrt{-1}$  – мнимая единица.
- $\blacklozenge$  – конец доказательства теоремы, леммы.
- $\forall$  – квантор общности.
- $\exists$  – квантор существования.
- $\in$  – «принадлежность».
- $\sim$  – «эквивалентность».
- $\Rightarrow$  – «следует».
- $\Phi(D)$  – пространство аналитических функций в области  $D$ .
- $C^\infty(D)$  – множество бесконечно дифференцируемых функций в области  $D$ .

- $0 < \varepsilon \ll 1$  – малый положительный параметр,  $\lambda, \mu$  – такие же параметры, связанные с  $\varepsilon$ .
- $c, C > 0$  – постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ .
- Симметрию по умолчанию будем понимать относительно действительной оси.
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $\Delta_{r\phi} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$  – оператор Лапласа.
- $\|\cdot\|$  – норма; для непрерывных функций будем подразумевать максимум модуля функции (существует в ограниченных замкнутых областях).
- $O, o$  – символы порядка (Ландау).
- $U_{kj}$  – условие.
- Нули собственных значений матрицы-функции  $A(t)$  называются точками поворота уравнения  $\varepsilon x'(t, \varepsilon) = A(t)x(t, \varepsilon) + f(t)$ .
- Максимальная связная компонента линии уровня  $\operatorname{Re} u(z_0, z) = 0$  с началом в точке  $z_0$ , не содержащая других точек поворота, называется линией Стокса, где  $z_0$  – точка поворота,  $u(z_0, z) = \int_{z_0}^z \lambda(s) ds$ ; если на этой линии существуют другие точки поворота, то линия  $\operatorname{Re} u(z_0, z) = 0$  называется критической линией уровня.
- Нули функции  $q(x, y)$  называются точками поворота уравнения  $\varepsilon \Delta u = q(x, y)u + f(x, y)$ .

**В первой главе** диссертации приводится обзор литературы по теории сингулярно возмущенным уравнениям, по сингулярно возмущенным уравнениям при нарушении условия асимптотической устойчивости и по бисингулярно возмущенным обыкновенным и эллиптическим дифференциальным уравнениям. В заключении к первой главе формулируются нерешенные задачи, вытекающие из известных результатов других авторов.

**Вторая глава** состоит из трех разделов, где рассматриваются методы исследования. В первом разделе приводятся общеизвестные методы: метод стационарной фазы и метод перевала, а во втором разделе – обобщенный метод погранфункций. В заключении излагается необходимость и преимущество применения этих методов в рассматриваемых задачах.

**В третьей главе** исследованы линейные и нелинейные бисингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения в комплексной плоскости.

**В разделе 3.1** исследована задача

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = A(t)x(t, \varepsilon) + f(t), \quad (1)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \quad (2)$$

где  $t = t_1 + it_2$ ,  $A(t)$  – квадратная матрица-функция второго порядка с элементами  $a_{jk}(t) \in \Phi(D)$  имеет комплексно сопряженные собственные значения:

$$\lambda_{1,2}(t) = \alpha(t) \pm i\beta(t);$$

$$f(t) = \text{colon}(f_1(t), f_2(t)), f_k(t) \in \Phi(D),$$

$$x^0 = \text{colon}(x_1^0, x_2^0) - \text{постоянный вектор,}$$

$t \in D = \{t: \operatorname{Re}(u_1(t) - u_1(t_0)) \leq 0, \operatorname{Re}(u_2(t) - u_2(t_0)) \leq 0\}$ ,  $u_{1,2}(t) = \int \lambda_{1,2}(t) dt$  соответственно.

**U<sub>31</sub>.** Пусть  $\alpha(t_1, 0) < 0$ , при  $-c \leq t_1 < 0$ ;  $\alpha(t_1, 0) > 0$ , при  $0 < t_1 \leq T$ ;  $\alpha(0, 0) = 0$ ,  $\beta(0, 0) \neq 0$ ,  $\alpha(t_0, 0) < 0$ , где число  $T$  – определяется из условия

$$u_1(T, 0) = u_1(t_0, 0), u_1(t) = \int \lambda_1(t) dt.$$

**U<sub>32</sub>.** Пусть  $\operatorname{Re}(u_1(t_1^*, t_2^*) - u_1(t_0, 0)) = 0$ , т.е. граница области  $D$  является критической линией уровня (линией Стокса), где  $(t_1^*, t_2^*)$  – единственный простой корень собственного значения  $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ ,  $(\lambda_1(t_1^*, t_2^*) \equiv 0)$  в области  $D$ .

Из уравнения (1) при  $\varepsilon = 0$  получаем предельное уравнение:

$$A(t)\tilde{x}(t) + f(t) = 0.$$

Решение предельного уравнения в области  $D$  не является гладкой функцией, оно в точках поворота  $t = t_1^* \pm t_2^*$ , вообще говоря, имеет особенность, так как собственные значения матрицы-функции  $A(t)$  в этих точках обращаются в нуль:  $\lambda_1(t_1^*, t_2^*) \equiv 0$ ,  $\lambda_2(t_1^*, -t_2^*) \equiv 0$ . Поэтому, рассматриваемая задача называется бисингулярной.

Для приведения  $A(t)$  к диагональному виду выполняется преобразование:  $B_0^{-1}(t)A(t)B_0(t) = D(t)$ ,

$$\text{где } A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, B_0(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) - a_{22}(t) & \lambda_2(t) - a_{22}(t) \\ a_{21}(t) & a_{21}(t) \end{pmatrix},$$

$D(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ , в области  $D$  имеет место неравенство  $\det B_0(t) \neq 0$ .

Задача (1)-(2) после замены  $x(t, \varepsilon) = B_0(t)y(t, \varepsilon)$  принимает вид:

$$\varepsilon y'(t, \varepsilon) = D(t)y(t, \varepsilon) + \varepsilon B(t)y(t, \varepsilon) + h(t), \quad (3)$$

$$y(t_0, \varepsilon) = y^0, \quad (4)$$

где  $B(t) = -B_0^{-1}(t)B_0'(t)$ ,  $y^0 = B_0^{-1}(t_0)x^0$ ,  $h(t) = B_0^{-1}(t)f(t)$ .

Задача (3)-(4) заменяется интегральным уравнением:

$$y(t, \varepsilon) = E(t, t_0, \varepsilon)y^0 + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) \left( B(\tau)y(\tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}h(\tau) \right) d\tau, \quad (5)$$

где  $E(t, \tau, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t D(s) ds\right)$ .

Если ввести обозначение  $y(t, \varepsilon) = z(t, \varepsilon)/\varepsilon$ , то (5) примет вид:

$$z(t, \varepsilon) = \varepsilon E(t, t_0, \varepsilon)y^0 + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) (B(\tau)z(\tau, \varepsilon) + h(\tau)) d\tau. \quad (6)$$

Для того чтобы в каждом разделе не повторять один и тот же алгоритм метода последовательных приближений, доказана теорема.

**Теорема 3.1.1.** Пусть  $\|B(t)\| \leq c$  и для интеграла

$$\int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau, \quad (7)$$

в области  $D$  справедлива оценка

$$\left\| \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau \right\| \leq c\delta(\varepsilon), \text{ где } \varepsilon \leq c\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0,$$

тогда для решения системы интегральных уравнений (6) справедлива оценка:

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq c\delta(\varepsilon).$$

**В разделе 3.2** исследована задача Коши (1)-(2) в случае, когда  $\lambda_1(t) = t + ia$ ,  $\lambda_2(t) = t - ia$ , т.е. обобщенное модельное уравнение Л.С. Понтрягина. Построена равномерная асимптотика решения задачи (1)-(2) при  $t_0 = -a$ ,  $a > 0$ .

Задача рассматривается в области  $D$  – четырехугольник с вершинами  $(-a, 0)$ ,  $(0, -a)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(0, a)$ ,  $a > 0$ .

Доказана

**Лемма 3.2.1.** Если функции  $h_1(t)$  и  $h_2(t)$  в окрестности точек  $t = -ia$ ,  $t = ia$  соответственно разлагаются в ряды Тейлора по нечетным степеням:

$$h_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_{1,2k-1}(t + ia)^{2k-1}, \quad h_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_{2,2k-1}(t - ia)^{2k-1},$$

то справедливы разложения:

$$J_2(t, \varepsilon) = \int_{-a}^t e^{\frac{(t+ia)^2 - (\tau+ia)^2}{2\varepsilon}} h_1(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} h_{1,2k-1} \sum_{j=1}^k O(\varepsilon^j) (t + ia)^{2(j-1)},$$

$$\tilde{J}_2(t, \varepsilon) = \int_{-a}^t e^{\frac{(t-ia)^2 - (\tau-ia)^2}{2\varepsilon}} h_2(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} h_{2,2k-1} \sum_{j=1}^k O(\varepsilon^j) (t-ia)^{2(j-1)}.$$

Такие функции существуют, например  $h_{1,2}(t) = \sin(t \pm ia)$ . Таким образом, асимптотическое разложение решение задачи (1)-(2) существенно зависит от  $f(t)$ , ( $h(t) = B_0^{-1}(t)f(t)$ ).

Доказана

**Теорема 3.2.3.** Пусть  $\lambda_{1,2}(t) = t \pm ia$ ,  $t_0 = -a$ ,  $a > 0$ ,  $f(\pm ia) \neq 0$ . Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq c \Omega_{124}(t, \varepsilon),$$

$$\text{где } \Omega_{124}(t, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in H_0 \cap \tilde{H}_0, \\ 1/\varepsilon^\gamma, & \text{при } t \in H_1 \cup \tilde{H}_1, t_1 \leq a + (1-2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, \\ 1/\sqrt{\varepsilon}, & \text{при } t \in H_2 \cup \tilde{H}_2, 0 \leq \gamma < 1/2, \end{cases}$$

$$H_0 = H_{00} \cup H_{01}, H_1 = H_{10} \cup H_{11}, H_2 = H_{20} \cup H_{21}, D = H_0 \cup H_1 \cup H_2,$$

$$H_{00} = \{t: 0 \leq t_1 + t_2 + a, t_1 \leq 0, 0 \leq t_1 - (t_2 - a), \delta \leq |t_1 + i(t_2 + a)|\},$$

$$H_{01} = \{t: t_1 + t_2 - a \leq 0, 0 \leq t_1, u_{11}(t_1, t_2) \leq \varepsilon \ln \varepsilon, \delta \leq |t_1 + i(t_2 + a)|, t_2 \geq -a\},$$

$$H_{10} = \{t: -a \leq t_2, |t_1 + i(t_2 + a)| = C\varepsilon^{2\gamma}, -C\varepsilon^\gamma/2 \leq t_1 \leq \delta_1(\varepsilon)\},$$

$$\delta_1(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon^{2\gamma}C + (1-2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon)},$$

$$H_{11} = \{t: u_{11}(t_1, t_2) = (1-2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, \delta_1(\varepsilon) \leq t_1 \leq a + (1-2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon / (4a)\},$$

$$H_{20} = \{t: u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, -a \leq t_2, |t_1 + i(t_2 + a)| \leq \varepsilon C\},$$

$$H_{21} = \{t: -\delta \varepsilon \leq u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, t_1 + t_2 - a \leq 0, \varepsilon C \leq |t_1 + i(t_2 + a)|, C\varepsilon^{1/2} \leq t_1, t_2 > -a\},$$

$\tilde{H}_0, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2$  – симметричны относительно действительной оси соответственно областям  $H_0, H_1, H_2$ .

Для оценки интеграла вида (7) применены методы стационарной фазы и перевала.

**В разделе 3.3** доказана

**Теорема 3.3.3.** Пусть  $\lambda_{1,2}(t) = \sin t \pm iacost$ ,  $0 < a < 1$ ,

$$t_0 = -\arccos(\sqrt{1-a^2}) \in (-\pi, 0), f(\pm i\alpha) \neq 0 (\alpha = \ln \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}).$$

Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq c \Omega_{133}(t, \varepsilon),$$

$$\text{где } \Omega_{133}(t, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in H_0 \cap \tilde{H}_0, \\ 1/\varepsilon^\gamma, & \text{при } t \in H_1 \cup \tilde{H}_1, t_1 \leq -t_0 + (1/2 - \gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, \\ 1/\sqrt{\varepsilon}, & \text{при } t \in H_2 \cup \tilde{H}_2, 0 \leq \gamma < 1/2, \end{cases}$$

$$u_{11}(t_1, t_2) = \operatorname{Re}(u_1(t_1, t_2) - u_1(t_0, 0)) = -\cos t_1 (\operatorname{ch} t_2 + a \operatorname{sh} t_2) + \sqrt{1 - a^2},$$

$$u_{21}(t_1, t_2) = \operatorname{Re}(u_2(t_1, t_2) - u_2(t_0, 0)) = -\cos t_1 (\operatorname{ch} t_2 - a \operatorname{sh} t_2) + \sqrt{1 - a^2},$$

$$H_{00} = \{t: u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, u_{21}(t_1, t_2) \leq 0, t_1 \leq -\delta, \delta^2 \leq |t_1 + i(t_2 + \alpha)|\};$$

$$H_{01} = \{t: u_{21}(t_1, t_2) \leq 0, -\delta \leq t_1, u_{11}(t_1, t_2) \leq (\varepsilon \ln \varepsilon)/2, \delta^2 \leq |t_1 + i(t_2 + \alpha)|\},$$

$$H_{10} = \{t: u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, -\alpha \leq t_2, |t_1 + i(t_2 + \alpha)| = \varepsilon^{2\gamma} \delta^2, -\varepsilon^\gamma c \leq t_1 \leq \delta_1(\varepsilon)\},$$

$$H_{11} = \{t: u_{11}(t_1, t_2) = (1/2 - \gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, \delta_1(\varepsilon) \leq t_1 \leq -t_0 + c(1/2 - \gamma)\varepsilon \ln \varepsilon\},$$

$$H_{20} = \{t: u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, -\alpha \leq t_2, |t_1 + i(t_2 + \alpha)| \leq \varepsilon \delta^2\}, \delta - \text{достаточно малое число},$$

$$H_{21} = \{t: -c\varepsilon \leq u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, u_{21}(t_1, t_2) \leq 0, c\varepsilon^{1/2} \leq t_1, t_2 > -\alpha\},$$

$$H_0 = H_{00} \cup H_{01}, H_1 = H_{10} \cup H_{11}, H_2 = H_{20} \cup H_{21}, D = H_0 \cup H_1 \cup H_2.$$

Область  $D$  является криволинейным четырехугольником и нули собственных значений  $A(t)$  находятся на двух вершинах этого четырехугольника.

**В разделе 3.4** исследован общий случай  $\lambda_{1,2}(t) = \alpha(t) \pm i\beta(t)$ . Доказана

**Теорема 3.4.3.** Пусть выполняются условия  $U_{31}, U_{32}$  и  $f(t_1^*, t_2^*) \neq 0, f(t_1^*, -t_2^*) \neq 0$ . Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq c\Omega_{145}(t, \varepsilon),$$

$$\text{где } \Omega_{145}(t, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in H_0 \cap \tilde{H}_0, \\ 1/\varepsilon^\gamma, & \text{при } t \in H_1 \cup \tilde{H}_1, t_1 \leq T + (1 - 2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, \\ 1/\sqrt{\varepsilon}, & \text{при } t \in H_2 \cup \tilde{H}_2, 0 \leq \gamma < 1/2, \end{cases}$$

$$H_{00} = \{t: \varepsilon \ln \varepsilon \leq u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, u_{21}(t_1, t_2) \leq 0, |t_2| \leq |t_2^*|, |t - t^*| \geq \delta, t_1 < t_2(t_1^*/t_2^*)\},$$

$$H_{01} = \{t: u_{11}(t_1, t_2) \leq \varepsilon \ln \varepsilon, u_{21}(t_1, t_2) \leq 0, |t_2| \leq |t_2^*|, |t - t^*| \geq \delta\},$$

$$H_{10} = \{t: |t - t^*| = \varepsilon^\gamma \delta, u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, t_1^0 \leq t_1 \leq t_1^1, |t_2| \leq |t_2^*|\},$$

$$H_{11} = \{t: u_{11}(t_1, t_2) = (1/2 - \gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, u_{21}(t_1, t_2) \leq 0, t_1^1 \leq t_1, |t_2| \leq |t_2^*|\},$$

$$H_{20} = \{t: |t - t^*| \leq \sqrt{\varepsilon} \delta, u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, |t_2| \leq |t_2^*|\},$$

$$H_{21} = \{t: -c\varepsilon \leq u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, u_{21}(t_1, t_2) \leq 0, |t - t^*| \geq c\sqrt{\varepsilon}, |t_2| \leq |t_2^*|\},$$

$H_0=H_{00}\cup H_{01}$ ,  $H_1=H_{10}\cup H_{11}$ ,  $H_2=H_{20}\cup H_{21}$ ,  $D=H_0\cup H_1\cup H_2$ ,  $\tilde{H}_0$ ,  $\tilde{H}_1$ ,  $\tilde{H}_2$  – симметричны, относительно действительной оси, областям  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ , соответственно;  $u_{k1}(t_1, t_2)=Re(u_k(t_1, t_2)-u_k(t_0, 0))$ ,  $u_{k2}(t_1, t_2)=Im(u_k(t_1, t_2))$ ,  $k=1, 2$ .

**В разделе 3.5** исследован случай, когда уравнение (1) имеет четыре простых, периодических точек поворота. Этот случай отличается тем, что каждое собственное значение  $\lambda_{1,2}(t)=\sin t \pm i a \cos t$ , ( $a>1 - \text{const}$ ) имеет по два простых периодических нулей в рассматриваемой области

$$D=\{(t_1, t_2): u_{11}(t_1, t_2)\leq 0, u_{21}(t_1, t_2)\leq 0, |t_1|\leq \pi/2\},$$

которая является прямоугольником с вершинами  $A(-\pi/2, -\alpha)$ ,  $B(\pi/2, -\alpha)$ ,  $B_1(\pi/2, \alpha)$  и  $A_1(-\pi/2, \alpha)$ ,  $\alpha = \ln \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$ . Нули собственных значений  $A(t)$  находятся на вершинах прямоугольника. Такой случай исследовано впервые.

**U<sub>37</sub>.** Пусть в задаче (1)-(2) матрица-функция  $A(t)$  имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2}(t)=\sin t \pm i a \cos t, a>1 - \text{const}, \text{ и } t_0 = -\pi/2.$$

**U<sub>38</sub>.** Пусть  $h_1(-\pi/2, -\alpha)\neq 0$ ,  $h_1(\pi/2, -\alpha)\neq 0$ ,  $h_2(-\pi/2, \alpha)\neq 0$ ,  $h_2(\pi/2, \alpha)\neq 0$ .

Доказана

**Теорема 3.5.4.** Пусть выполняются условия **U<sub>37</sub>**, **U<sub>38</sub>**. Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq c \Omega_{154}(t, \varepsilon),$$

$$\text{где } \Omega_{154}(t, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in H_0 \cap \tilde{H}_0, \\ 1/\varepsilon^\gamma, & \text{при } t \in H_1 \cup \tilde{H}_1, t_1 \leq \pi/2 + (1-2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, \\ 1/\sqrt{\varepsilon}, & \text{при } t \in H_2 \cup \tilde{H}_2, 0 \leq \gamma < 1/2, \end{cases}$$

$$H_{00}=\{t: 0 \leq t_1 + \pi/2 \leq \delta, \delta \leq t_2 + \alpha \leq 2\alpha\}, H_{10}=\{t: 0 \leq t_1 + \pi/2 \leq \delta \varepsilon^\gamma, t_2 + \alpha = \delta \varepsilon^\gamma\},$$

$$H_{01}=\{t: -\pi/2 + \delta \leq t_1, u_{11}(t_1, t_2) \leq (\varepsilon \ln \varepsilon)/2, \delta \leq |(t_1 - \pi/2) + i(t_2 + \alpha)|, t_2 \leq \alpha\},$$

$$H_{11}=\{t: -((1-2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon)/2 \leq t_2 + \alpha \leq \delta \varepsilon^\gamma, t_1 + \pi/2 = \delta \varepsilon^\gamma\},$$

$$H_{12}=\{t: |t_1| \leq \pi/2 - \delta \varepsilon^\gamma, u_{11}(t_1, t_2) = ((1-2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon)/2\},$$

$$H_{13}=\{t: -((1-2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon)/2 \leq t_2 + \alpha \leq \delta \varepsilon^\gamma, t_1 = \pi/2 - \delta \varepsilon^\gamma\},$$

$$H_{14}=\{t: -\delta \varepsilon^\gamma \leq t_1 - \pi/2 \leq ((1-2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon)/2, t_2 + \alpha = \delta \varepsilon^\gamma\},$$

$$H_{15}=\{t: u_{11}(t_1, t_2) = ((1-2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon)/2, \delta \varepsilon^\gamma \leq t_2 + \alpha \leq 2\alpha\},$$

$$H_{20}=\{t: 0 \leq t_1 + \pi/2 \leq \delta \sqrt{\varepsilon}, 0 \leq t_2 + \alpha \leq \delta \sqrt{\varepsilon}\}, H_{21}=\{t: |t_1| \leq \pi/2 - \delta \sqrt{\varepsilon},$$

$$(\varepsilon \ln \varepsilon)/2 \leq u_{11}(t_1, t_2) \leq 0\}, H_{22}=\{t: -\delta \sqrt{\varepsilon} \leq t_1 - \pi/2 \leq 0, (\varepsilon \ln \varepsilon)/2 \leq u_{11}(t_1, t_2) \leq 0\},$$

$$u_{11}(t_1, t_2) = -\cos t_1(\operatorname{ch} t_2 + a \operatorname{sh} t_2), \quad u_{21}(t_1, t_2) = -\cos t_1(\operatorname{ch} t_2 - a \operatorname{sh} t_2), \quad 0 < \delta < 1 -$$

$$\text{достаточно малое число, } H_0 = H_{00} \cup H_{01}, \quad H_1 = \bigcup_{k=0}^5 H_{1k}, \quad H_2 = \bigcup_{k=0}^2 H_{2k},$$

$D = H_0 \cup H_1 \cup H_2$ .  $\tilde{H}_0, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2$  – симметричны, относительно действительной оси, областям  $H_0, H_1, H_2$  соответственно.

**В разделе 3.6** исследована нелинейная задача

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = D(t)x(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon^m \tilde{g}(t, x(t, \varepsilon)), \quad (8)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \quad (9)$$

где  $D(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \lambda_2(t)\}$ ,  $\lambda_{1,2}(t) = \alpha(t) \pm \beta(t)$  удовлетворяют условиям  $U_{31}$ ,

$U_{32}$ . Область  $D$  та же, что в разделе 3.4.  $\tilde{g}(t, x) = \sum_{j=1}^p g_j(t)x^j$ ,  $g_p(t) \neq 0$ ,  $\|g_j(t)\| < c$ ,

$$t \in D, f(t), g_j(t) \in \Phi(D), m = \operatorname{const} \in (0, +\infty), x^0 = \operatorname{colon}(x_1^0, x_2^0).$$

Доказана

**Теорема 3.6.1.** Пусть выполняются условия  $U_{31}$ ,  $U_{32}$ ,  $f(t_1^*, t_2^*) \neq 0$ ,  $f(t_1^*, -t_2^*) \neq 0$  и  $m \geq (p+1)/2 - q$  ( $0 \leq q < 1/2$ ). Тогда задача (8)-(9) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq c \Omega_{161}(t, \varepsilon),$$

$$\text{где } \Omega_{161}(t, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in H_0 \cap \tilde{H}_0, \\ 1/\varepsilon^\gamma, & \text{при } t \in H_1 \cup \tilde{H}_1, t_1 \leq T + (1 - 2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, \\ 1/\sqrt{\varepsilon}, & \text{при } t \in H_2 \cup \tilde{H}_2, 0 \leq \gamma < 1/2, \end{cases}$$

области  $H_0, H_1, H_2, \tilde{H}_0, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2$  определены в разделе 3.4. Приводится иллюстративный пример.

Простая точка поворота обобщается на  $n$ -кратную. Доказана

**Теорема 3.6.2.** Пусть выполняются условия  $U_{31}$ ,  $f(t_1^*, t_2^*) \neq 0$ ,  $f(t_1^*, -t_2^*) \neq 0$ , собственные значения  $\lambda_{1,2}(t) = \alpha(t) \pm i\beta(t)$  на границе области  $D$  имеют единственный  $n$ -кратный нуль и  $m \geq n(p+1)/(n+1) - q$  ( $0 \leq q < n/(n+1)$ ). Тогда задача (8)-(9) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq c/\varepsilon^{n/(n+1)}.$$

**3.7. Заключение по третьей главе.** Исследование показало, что асимптотическое поведение решения бисингулярно возмущенных ОДУ в комплексной плоскости существенно зависит от неоднородной части уравнения  $f(t)$  и от кратности точек поворота. Полученные асимптотические оценки являются неулучшаемыми.



В главе IV с помощью обобщенного метода погранфункций построены равномерные асимптотические разложения решения с любой степенью точности задачи Коши для бисингулярно возмущенных ОДУ в комплексной плоскости.

В разделе 4.1 исследован случай простой точки поворота. Задача (3)-(4) рассмотрена в области  $D = \{t: \operatorname{Re}(t+i)^2 \leq 0, \operatorname{Re}(t-i)^2 \leq 0\}$  – четырехугольник с вершинами  $(-1,0)$ ,  $(0,-1)$ ,  $(0,1)$  и  $(1,0)$ .

$U_{41}$ .  $B(t), h(t) \in \Phi(D)$ ,  $t_0 = -1$ ,  $D(t) = \operatorname{diag}(t+i, t-i)$ ,  $y = \operatorname{colon}(z, u)$ ,

$$h_1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{1j}(t+ia)^j, \quad h_2(t) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{2j}(t-ia)^j, \quad b_{k1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{k1j}(t+ia)^j, \quad b_{k2}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{k2j}(t-ia)^j,$$

$$\text{где } h_{1j} = \frac{1}{j!} h_1^{(j)}(-ia), \quad h_{2j} = \frac{1}{j!} h_2^{(j)}(ia), \quad b_{k1j} = \frac{1}{j!} b_{k1}^{(j)}(-ia), \quad b_{k2j} = \frac{1}{j!} b_{k2}^{(j)}(ia).$$

**Теорема 4.1.1.** Пусть выполняется условие  $U_{41}$ . Тогда для решения задачи (3)-(4) в области  $D$  справедливы асимптотические разложения

$$\begin{cases} z(t, \varepsilon) = \frac{\pi_{-1}(\tau)}{\sqrt{\varepsilon}} + \sum_{k=0}^n v_k(t) \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{2n} \pi_k(\tau) \varepsilon^{k/2} + O(\varepsilon^{n+1/2}), \\ u(t, \varepsilon) = \frac{\vartheta_{-1}(\eta)}{\sqrt{\varepsilon}} + \sum_{k=0}^n w_k(t) \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{2n} \vartheta_k(\eta) \varepsilon^{k/2} + O(\varepsilon^{n+1/2}), \end{cases}$$

где  $\tau = (t+i)/\mu$ ,  $\eta = (t-i)/\mu$ ,  $\mu^2 = \varepsilon$ ,  $v_0(t) = (\alpha_0 - h_1(t))/(t+i)$ ,  $w_0(t) = (\beta_0 - h_2(t))/(t-i)$ ,  $\alpha_0 = h_1(-i)$ ,  $\beta_0 = h_2(i)$ ;

$$v_k(t) = \frac{v'_{k-1}(t) - (b_{11}(t)v_{k-1}(t) + b_{12}(t)w_{k-1}(t)) + \alpha_k}{t+i}, \quad \alpha_k = -(v'_{k-1}(-i) - (b_{11}(-i)v_{k-1}(-i) + b_{12}(-i)w_{k-1}(-i))),$$

$$w_k(t) = \frac{w'_{k-1}(t) - (b_{21}(t)v_{k-1}(t) + b_{22}(t)w_{k-1}(t)) + \beta_k}{t-i}, \quad \beta_k = -(w'_{k-1}(i) - (b_{21}(i)v_{k-1}(i) + b_{22}(i)w_{k-1}(i)));$$

$$\pi_{-1} = \alpha_0 e^{\tau^2/2} \int_{(i-1)/\mu}^{\tau} e^{-s^2/2} ds, \quad \vartheta_{-1} = \beta_0 e^{\eta^2/2} \int_{-(i+1)/\mu}^{\eta} e^{-s^2/2} ds;$$

$$\pi_{2k} = -v_k(-1) e^{\frac{(\tau\mu)^2 - (i-1)^2}{2\mu^2}} + e^{\frac{\tau^2}{2}} \int_{(i-1)/\mu}^{\tau} e^{\frac{s^2}{2}} \sum_{j=0}^{2k} \tau^j (b_{11j} \pi_{2k-1-j} + b_{12j} \vartheta_{2k-1-j}) ds, \quad k=0,1,\dots;$$

$$\vartheta_{2k} = -w_k(-1) e^{\frac{(\eta\mu)^2 - (i+1)^2}{2\mu^2}} + e^{\frac{\eta^2}{2}} \int_{-(i+1)/\mu}^{\eta} e^{\frac{s^2}{2}} \sum_{j=0}^{2k} \eta^j (b_{21j} \pi_{2k-1-j} + b_{22j} \vartheta_{2k-1-j}) ds, \quad k=0,1,\dots;$$

$$\pi_{2k-1} = e^{\frac{\tau^2}{2}} \int_{(i-1)/\mu}^{\tau} e^{\frac{s^2}{2}} \left( \sum_{j=0}^{2k-1} \tau^j (b_{11j} \pi_{2k-2-j} + b_{12j} \vartheta_{2k-2-j}) + \alpha_k \right) ds, \quad k=1,2,\dots;$$

$$\vartheta_{2k-1} = e^{\frac{\eta^2}{2}} \int_{-(i+1)/\mu}^{\eta} e^{-\frac{s^2}{2}} \left( \sum_{j=0}^{2k-1} \eta^j (b_{21j} \pi_{2k-2-j} + b_{22j} \vartheta_{2k-2-j}) + \beta_k \right) ds, \quad k=1, 2, \dots$$

**В разделе 4.2** исследован случай, когда  $\lambda_{1,2}(t) = (t \pm i)^2$ . Заметим, что каждое собственное значение имеет двукратные корни. Задача (3)-(4) исследована в области  $D = \{t: \operatorname{Re}(t+i)^3 \leq 0, \operatorname{Re}(t-i)^3 \leq 0, 0 \leq t_1 \leq \sqrt{3}\}$  – треугольник с вершинами  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$  и  $(\sqrt{3}, 0)$ .

**U<sub>42</sub>.**  $h(t) \in \Phi(D)$ ,  $B(t) \equiv 0$ ,  $D(t) = \operatorname{diag}((t+i)^2, (t-i)^2)$ ,  $y = \operatorname{colon}(z, u)$ ,  $t_0 = 0$ .

Доказана

**Теорема 4.2.1.** Если выполняется условие **U<sub>42</sub>**, то для решения задачи (3)-(4) в области  $D$  справедливы асимптотические разложения

$$\begin{cases} z(t, \varepsilon) = \frac{\pi_{-2}(\tau)}{\sqrt[3]{\varepsilon^2}} + \frac{\pi_{-1}(\tau)}{\sqrt[3]{\varepsilon}} + \sum_{k=0}^n v_k(t) \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{3n} \pi_k(\tau) \varepsilon^{k/3} + O(\varepsilon^{n+1/3}), \\ u(t, \varepsilon) = \frac{\vartheta_{-2}(\eta)}{\sqrt[3]{\varepsilon^2}} + \frac{\vartheta_{-1}(\eta)}{\sqrt[3]{\varepsilon}} + \sum_{k=0}^n w_k(t) \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{3n} \vartheta_k(\eta) \varepsilon^{k/3} + O(\varepsilon^{n+1/3}), \end{cases}$$

где  $\tau = (t+i)/\mu$ ,  $\eta = (t-i)/\mu$ ,  $\mu^3 = \varepsilon$ ,  $v_0(t) = (\alpha_{00} + \alpha_{01}(t+i) - h_1(t))/(t+i)^2$ ,  $\alpha_{00} = h_1(-i)$ ,

$\alpha_{01} = h'_1(-i)$ ,  $w_0(t) = (\beta_{00} + \beta_{01}(t-i) - h_2(t))/(t-i)^2$ ,  $\beta_{00} = h_2(i)$ ,  $\beta_{01} = h'_2(i)$ ,

$$v_k(t) = \frac{v'_{k-1}(t) + \alpha_{k0} + \alpha_{k1}(t+i)}{(t+i)^2}, \quad w_k(t) = \frac{w'_{k-1}(t) + \beta_{k0} + \beta_{k1}(t-i)}{(t-i)^2},$$

$\alpha_{k1} = -v''_{k-1}(-i)$ ,  $\beta_{k0} = -w'_{k-1}(i)$ ,  $\beta_{k1} = -w''_{k-1}(i)$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ ;

$$\pi_{3k-2} = \alpha_{k0} e^{\tau^3/3} \int_{i/\mu}^{\tau} e^{-s^3/3} ds, \quad \pi_{3k-1} = \alpha_{k1} e^{\tau^3/3} \int_{i/\mu}^{\tau} s e^{-s^3/3} ds, \quad \pi_{3k} = -v_k(0) e^{(\mu^3 \tau^3 + i)/3\mu^3},$$

$$\vartheta_{3k-2} = \beta_{k0} e^{\eta^3/3} \int_{-i/\mu}^{\eta} e^{-s^3/3} ds; \quad \vartheta_{3k-1} = \beta_{k1} e^{\eta^3/3} \int_{-i/\mu}^{\eta} s e^{-s^3/3} ds; \quad \vartheta_{3k} = -w_k(0) e^{(\mu^3 \eta^3 - i)/3\mu^3},$$

$k=0, 1, \dots$

**В разделе 4.3** исследован случай  $\lambda_{1,2}(t) = (t \pm i)^n$ .

**U<sub>43</sub>.**  $t_0 = S_{n,j}$ , где  $j$  – нечетное фиксированное число,

$S_{n,k} = \operatorname{ctg}((\pi + 2\pi k)/(2n+2))$ ,  $k=0, 1, \dots, n$ .

$D = \{t: \operatorname{Re}(t_1 + i(t_2 + 1))^{n+1} \leq 0, \operatorname{Re}(t_1 + i(-t_2 + 1))^{n+1} \leq 0, t_0 \leq t_1 \leq T\}$ .

**U<sub>44</sub>.**  $B_0(t) = \operatorname{const}$ ,  $f(t) \in \Phi(D)$ ,  $D(t) = \operatorname{diag}((t+i)^n, (t-i)^n)$ ,  $y = \operatorname{colon}(z, u)$ .

Доказана

**Теорема 4.3.1.** Если выполняются условия **U<sub>43</sub>**, **U<sub>44</sub>** тогда задача (3)-(4) имеет единственное решение, и в области  $D$  справедливы асимптотические разложения

$$\begin{cases} z(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m v_k(t) \varepsilon^k + \sum_{k=-n}^{m \times (n+1)} \pi_k(\tau) \varepsilon^{k/(n+1)} + O(\varepsilon^{m+1/(n+1)}), \\ u(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m w_k(t) \varepsilon^k + \sum_{k=-n}^{m \times (n+1)} \vartheta_k(\eta) \varepsilon^{k/(n+1)} + O(\varepsilon^{m+1/(n+1)}), \end{cases}$$

где  $\tau = (t+i)/\mu$ ,  $\eta = (t-i)/\mu$ ,  $\mu = \varepsilon^{1/(n+1)}$ ,  $v_0(t) = (\alpha_{00} + \alpha_{01}(t+i) + \dots + \alpha_{0(n-1)}(t+i)^{n-1} - h_1(t))/ (t+i)^n$ ,  $\alpha_{0j} = h_{1j}$ ,  $h_{1j} = h_1^{(j)}(-i)/j!$ ;  $w_0(t) = (\beta_{00} + \beta_{01}(t-i) + \dots + \beta_{0(n-1)}(t-i)^{n-1} - h_2(t))/ (t-i)^n$ ,  $\beta_{0j} = h_{2j}$ ,  $h_{2j} = h_2^{(j)}(i)/j!$ ,  $j=0, 1, \dots, n-1$ ;

$$v_k(t) = \left( v'_{k-1}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{kj}(t+i)^j \right) / (t+i)^n, \quad w_k(t) = \left( w'_{k-1}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{kj}(t-i)^j \right) / (t-i)^n,$$

$$\alpha_{kj} = -v_{k-1}^{(j+1)}(-i)/j!, \quad \beta_{kj} = -w_{k-1}^{(j+1)}(i)/j!, \quad k=1, 2, \dots, m;$$

$$\pi_{k \times (n+1) - n + j} = \alpha_{kj} e^{\frac{\tau^{n+1}}{n+1}} \int_{(t_0+i)/\mu}^{\tau} s^j e^{-\frac{s^{n+1}}{n+1}} ds, \quad \vartheta_{k \times (n+1) - n + j} = \beta_{kj} e^{\frac{\eta^{n+1}}{n+1}} \int_{(t_0-i)/\mu}^{\eta} s^j e^{-\frac{s^{n+1}}{n+1}} ds,$$

$$j=0, 1, \dots, n-1, \quad k=0, 1, \dots, m;$$

$$\pi_{k \times (n+1)} = -v_k(t_0) e^{\frac{\tau^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left( \frac{t_0+i}{\mu} \right)^{n+1}}, \quad \vartheta_{k \times (n+1)} = -w_k(t_0) e^{\frac{\eta^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left( \frac{t_0-i}{\mu} \right)^{n+1}},$$

$$k=0, 1, \dots, m.$$

**4.4. Заключение по главе 4.** С применением обобщенного метода погранфункций построены асимптотические разложения решений для любой степени точности задач Коши для бисингулярно возмущенных ОДУ в комплексной плоскости. Получены точные оценки для остаточных членов, т.е. строго обоснованы ФАР решения. Полученные разложения представляют собой ряд Пюизо (ряд по дробным степеням малого параметра).

**В главе V** обобщенным методом погранфункций построены равномерные асимптотические разложения решений бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений с точками поворота внутри области.

**В разделе 5.1** исследован случай простой точки поворота в центре круга. Вводится быстрая переменная  $\tau = r/\mu$  и другие.

Рассматривается задача

$$\varepsilon \Delta_{r\phi} u - q(r, \phi) u = f(r, \phi), \quad (r, \phi) \in D = \{(r, \phi) | 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq r < 1\}, \quad (10)$$

$$u(1, \phi, \varepsilon) = \psi(\phi, \varepsilon), \quad (11)$$

$$\text{где } f(r, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\phi) r^k, \quad f_k(\phi) = \frac{\partial^k f(0, \phi)}{k! \partial r^k}, \quad u = u(r, \phi, \varepsilon).$$

Доказана

**Теорема 5.1.1.** Пусть  $q(r, \phi) = r$ ,  $f(r, \phi) \in C^\infty(\bar{D})$ ,  $f(0, 0) \neq 0$ , тогда для решения задачи (10)-(11) справедливо асимптотическое разложение

$$u(r, \phi, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} w_{-1}(\tau, \phi) + v_0(r, \phi) + w_0(\tau, \phi) + \pi_0(\eta, \phi) + O(\varepsilon^{2/3}), \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\text{где } \eta = (1-r)/\lambda, \lambda = \varepsilon^{1/2}, \mu = \varepsilon^{1/3}, v_0(r, \phi) = -\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\phi) r^{k-1},$$

$$\pi_0(\eta, \phi) = (\psi_0(\phi) - v_0(1, \phi)) e^{-\eta}, w_{-1}(\tau, \phi) = O(\tau^{-1}), w_0(\tau, \phi) \equiv 0, \text{ при } \tau \rightarrow \infty.$$

**В разделе 5.2** рассматривается задача (10)-(11) в случае двукратной точки поворота в центре круга. Доказана

**Теорема 5.2.1.** Если  $q(r, \phi) = r^2$ ,  $f(r, \phi) \in C^\infty(\bar{D})$ ,  $f(0, 0) \neq 0$ , тогда для решения задачи (10)-(11) справедливо разложение

$$u(r, \phi, \varepsilon) = \frac{w_{-2}(\tau, \phi)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{w_{-1}(\tau, \phi)}{\sqrt[4]{\varepsilon}} + v_0(r, \phi) + \pi_0(\eta, \phi) + O(\sqrt{\varepsilon}), \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\text{где } \eta = (1-r)/\mu^2, \mu = \varepsilon^{1/4}, v_0(r, \phi) = -\sum_{k=2}^{\infty} f_k(\phi) r^{k-2}, \pi_0(\eta, \phi) = (\psi_0(\phi) - v_0(1, \phi)) e^{-\eta},$$

$$w_{-2}(\tau, \phi) = O(\tau^{-2}), w_{-1}(\tau, \phi) = O(\tau^{-1}), \text{ при } \tau \rightarrow \infty.$$

**В разделе 5.3** рассматривается задача (10)-(11) в случае  $n$ -кратной точки поворота в центре круга. Доказана

**Теорема 5.3.1.** Если  $q(r, \phi) = r^n$ ,  $f(r, \phi) \in C^\infty(\bar{D})$ ,  $f(0, 0) \neq 0$ , тогда для решения задачи (10)-(11) справедливо асимптотическое разложение

$$u(r, \phi, \varepsilon) = \sum_{k=-n}^{-1} w_k(\tau, \phi) \mu^k + v_0(r, \phi) + \pi_0(\eta, \phi) + O(\varepsilon^{2/(n+2)}), \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\text{где } \eta = (1-r)/\varepsilon^{1/2}, \mu = \varepsilon^{1/(n+2)}, \tau = r/\mu, v_0(r, \phi) = -\sum_{j=n}^{\infty} f_j(\phi) r^{j-n}, \pi_0(\eta, \phi) = (\psi_0(\phi) -$$

$$-v_0(1, \phi)) e^{-\eta}, w_{-n+j}(\tau, \phi) = O(\tau^{-n+j}), \text{ при } \tau \rightarrow \infty, j=0, 1, 2, \dots, n-1, n \in \mathbb{N}.$$

**5.4. Заключение по главе 5.** Впервые с помощью обобщенного метода погранфункций построены равномерные асимптотические разложения решений задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений второго порядка в круге. Рассмотрены следующие случаи: уравнение имеет простую точку поворота внутри области, т.е. в центре круга; уравнение имеет двукратную точку поворота в центре круга; уравнение имеет  $n$ -кратную точку поворота в центре круга.

Построены формальные асимптотические разложения решений, и они строго обоснованы математическими доказательствами в виде теорем.

Построены асимптотические разложения решений по дробным степеням малого параметра и эти степени зависят от кратности точек поворота.

**В главе VI** исследованы бисингулярно возмущенные эллиптические уравнения, с особенностью на границе области.

**В разделе 6.1** рассматривается задача

$$\varepsilon \Delta u - q(\rho)u = f(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (\rho, \varphi) \in D = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \leq \rho < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}, \quad (12)$$

$$u(1, \varphi, \varepsilon) = \psi(\varphi, \varepsilon), \quad (13)$$

где  $\psi(\varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(\varphi) \varepsilon^k$ ,  $\psi_k(\varphi) \in C^\infty[0, 2\pi]$ ,  $q(\rho), \psi(\varphi, \varepsilon), f(\rho, \varphi, \varepsilon)$  – заданные функции,  $u = u(\rho, \varphi, \varepsilon)$  – искомая функция,  $q(1) = 0$ . Вводится быстрая переменная

$$U_{61}. \text{ Пусть } f(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\rho, \varphi) \varepsilon^k, \quad f_k(\rho, \varphi) \in C^\infty(\bar{D}), \quad f(1, \varphi, 0) \neq 0.$$

Доказаны следующие теоремы:

**Теорема 6.1.1.** Если выполняется условие  $U_{61}$  и  $q(\rho) = (1-\rho)$ , тогда для решения задачи (12)-(13) справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} w_{-1}(\tau, \varphi) + v_0(\rho, \varphi) + w_0(\tau, \varphi) + O(\varepsilon^{2/3}),$$

$$\text{где } \tau = (1-\rho)/\mu, \quad \mu = \varepsilon^{1/3}, \quad v_0(\rho, \varphi) = - \sum_{j=1}^{\infty} f_{0,j}(\varphi) (1-\rho)^{j-1}, \quad f_{0,j}(\varphi) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^{(j)} f_0(1, \varphi)}{\partial \rho^j},$$

$$w_{-1}(\tau, \varphi) = -\pi f_{0,1}(\varphi) \left( \text{Ai}(\tau) \int_0^\tau \text{Bi}(s) ds - \sqrt{3} \text{Ai}(\tau) \int_0^\infty \text{Ai}(s) ds + \text{Bi}(\tau) \int_\tau^\infty \text{Ai}(s) ds \right),$$

$$w_0(\tau, \varphi) = -\pi \left( \text{Ai}(\tau) \left( \int_0^\tau \text{Bi}(s) \frac{\partial w_{-1}(s, \varphi)}{\partial s} ds - \sqrt{3} \int_0^\infty \text{Ai}(s) \frac{\partial w_{-1}(s, \varphi)}{\partial s} ds \right) + \right.$$

$$\left. + \text{Bi}(\tau) \int_\tau^\infty \text{Ai}(s) ds \right) + \frac{\psi_0(\varphi) - v_0(1, \varphi)}{\text{Ai}(0)} \text{Ai}(\tau), \quad \text{Ai}(t), \text{Bi}(t) - \text{функции Эйри},$$

$$w_{-1}(\tau, \varphi) = O(1/\tau), \quad w_0(\tau, \varphi) = O(1/\tau^3), \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty.$$

**Теорема 6.1.2.** Если выполняется условие  $U_{61}$  и  $q(\rho) = (1-\rho)^n$ , то для решения задачи (12)-(13) справедливо асимптотическое разложение

$$u = \frac{w_{-n}(\tau, \varphi)}{n+2\sqrt[n]{\varepsilon}} + \frac{w_{-n+1}(\tau, \varphi)}{n+2\sqrt[n]{\varepsilon^{n-1}}} + \dots + \frac{w_{-1}(\tau, \varphi)}{n+2\sqrt[n]{\varepsilon}} + w_0(\tau, \varphi) + v_0(\rho, \varphi) + O(\varepsilon^{2/(n+2)}),$$

$$\text{где } \tau = (1-\rho)/\mu, \quad \mu = \varepsilon^{1/(n+2)}, \quad v_0(\rho, \varphi) = - \sum_{j=n}^{\infty} f_{0,j}(\varphi) (1-\rho)^{j-n}, \quad f_{0,j}(\varphi) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^{(j)} f_0(1, \varphi)}{\partial \rho^j},$$

$$\begin{aligned}
w_{-n}(\tau, \varphi) &= -f_{0,0}(\varphi) \left( z_2(\tau) \int_0^\tau z_1(s) s^{-n/2} ds - z_1(\tau) \int_\tau^\infty z_2(s) s^{-n/2} ds \right), \\
w_{-n+k}(\tau, \varphi) &= - \left( z_2(\tau) \int_0^\tau \Phi_{n,k}(s, \varphi) z_1(s) s^{-n/2} ds - z_1(\tau) \int_\tau^\infty \Phi_{n,k}(s, \varphi) z_2(s) s^{-n/2} ds \right), \quad k=1, \dots, n-1; \\
w_0(\tau, \varphi) &= - \left( z_2(\tau) \int_0^\tau \Phi_{n,n}(s, \varphi) z_1(s) s^{-n/2} ds - z_1(\tau) \int_\tau^\infty \Phi_{n,n}(s, \varphi) z_2(s) s^{-n/2} ds \right) + \\
&+ \frac{\psi_0(\varphi) - v_0(1, \varphi)}{z_2(0)} z_2(\tau). \quad z_1(\tau) = \sqrt{\tau} I_{1/2q} \left( \frac{1}{q} \tau^q \right), \quad z_2(\tau) = \sqrt{\tau} K_{1/2q} \left( \frac{1}{q} \tau^q \right), \quad q=(n+2)/2,
\end{aligned}$$

$I_\nu(s), K_\nu(s)$  – модифицированные функции Бесселя,  $\Phi_{n,1}(\tau, \varphi) = \frac{\partial w_{-n}}{\partial \tau} - \tau f_{0,1}(\varphi)$ ,

$$\Phi_{n,k}(\tau, \varphi) = \sum_{j=0}^{k-1} \tau^{k-1-j} \frac{\partial w_{-n+j}}{\partial \tau} - \sum_{j=0}^{k-2} (k-1-j) \tau^{k-2-j} \frac{\partial^2 w_{-n+j}}{\partial \tau^2} - \tau^{k-1} f_{0,k-1}(\varphi), \quad k=2, 3, \dots, n;$$

$w_{-n+k}(\tau, \varphi) = O(\tau^{-n+k})$ , при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $k=0, 1, \dots, n$ .

**В разделе 6.2** рассматривается задача (12)-(13), при  $q(\rho) = (1-\rho)^n \rho^m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Отметим, что соответствующее предельное (невозмущенное) уравнение имеет две особенности: на границе круга и в центре круга одновременно. Доказаны

**Теорема 6.2.1.** Пусть  $q(\rho) = (1-\rho)\rho$  и выполняются условия  $U_{61}$  и  $f(0, \varphi, 0) \neq 0$ . Тогда для решения задачи (12)-(13) справедливо асимптотическое разложение

$$\begin{aligned}
u(\rho, \varphi, \varepsilon) &= v_0(\rho, \varphi) + \pi_{-1}(\tau, \varphi)/\mu + \pi_0(\tau, \varphi) + w_{-1}(\eta, \varphi)/\mu + w_0(\eta, \varphi) + O(\varepsilon^{2/3}), \\
\text{где } \tau &= (1-\rho)/\mu, \quad \eta = \rho/\mu, \quad \mu = \varepsilon^{1/3}, \quad v_0(\rho, \varphi) = -(f_0(\rho, \varphi) - f_0(1, \varphi)\rho - f_0(0, \varphi)(1-\rho))/ \\
&/ (1-\rho)\rho, \quad \pi_{-1}(\tau, \varphi) = O(\tau^{-1}), \quad \pi_0(\tau, \varphi) = O(\tau^{-3}), \quad w_{-1}(\eta, \varphi) = O(\eta^{-1}), \quad w_0(\eta, \varphi) = O(\eta^{-3}).
\end{aligned}$$

**Теорема 6.2.2.** Пусть  $q(\rho) = (1-\rho)^n \rho^m$  и выполняются условия  $U_{61}$  и  $f(0, \varphi, 0) \neq 0$ , тогда равномерное асимптотическое разложение решения задачи (12)-(13) с любой степенью точности представимо в виде:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \varepsilon^k + \sum_{k=-n}^{\infty} \pi_k(\tau, \varphi) \mu^k + \sum_{k=-m}^{\infty} w_k(\eta, \varphi) \lambda^k,$$

где  $\tau = (1-\rho)/\mu, \eta = \rho/\lambda, \mu = \varepsilon^{1/(n+2)}, \lambda = \varepsilon^{1/(m+2)}$ .

$$v_0(\rho, \varphi) = - \frac{f_0(\rho, \varphi) - \left( \sum_{k=0}^{m-1} f_{0,k}(\varphi) \rho^k \right) (1-\rho) - \left( \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{f}_{0,k}(\varphi) (1-\rho)^k \right) \rho}{(1-\rho)^n \rho^m},$$

$$f_{0,k}(\varphi) = \frac{1}{k!} \frac{\partial f_0^{(k)}(0, \varphi)}{\partial \rho^k}, \quad \tilde{f}_{0,k}(\varphi) = \frac{1}{k!} \frac{\partial f_0^{(k)}(1, \varphi)}{\partial \rho^k}, \quad v_k(\rho, \varphi) = \frac{h_k(\rho, \varphi) + \Delta v_{k-1} - f_k(\rho, \varphi)}{(1-\rho)^n \rho^m},$$

$$h_k(\rho, \varphi) = \left( \sum_{j=0}^{m-1} g_{k,j}(\varphi) \rho^j \right) (1-\rho) + \left( \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{g}_{k,j}(\varphi) (1-\rho)^j \right) \rho, \quad g_k = f_k - \Delta v_{k-1},$$

$$g_{k,j}(\varphi) = \frac{1}{j!} \frac{\partial g_k^{(j)}(0, \varphi)}{\partial \rho^j}, \quad \tilde{g}_{k,j}(\varphi) = \frac{1}{j!} \frac{\partial g_k^{(j)}(1, \varphi)}{\partial \rho^j},$$

$$w_{-m+k}(\eta, \varphi) = O(\eta^{-m+k}), \quad \pi_{-n+k}(\tau, \varphi) = O(\tau^{-n+k}), \quad \text{при } \eta, \tau \rightarrow \infty, \quad k=0, 1, \dots$$

**В разделе 6.3** рассматривается случай, когда предельное уравнение имеет особенность только в одной граничной точке области.

Рассматривается задача

$$\varepsilon \Delta u - q(x)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad (14)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad (15)$$

где  $f(x, y) \in C^\infty(\bar{D})$  – заданная функция,  $u = u(x, y, \varepsilon)$  – искомая функция.

Доказаны

**Теорема 6.3.1.** Пусть  $q(x) = (1-x)$ ,  $f(x, y) \in C^\infty(\bar{D})$ ,  $f(1, 0) \neq 0$ , тогда для решения задачи (14)-(15) справедливо асимптотическое разложение

$$u(x, y) = v_0(x, y) + \pi_0(\eta, \phi) + w_{-2}(\tau, \xi)/\mu^{-2} + w_{-1}(\tau, \xi)/\mu^{-1} + w_0(\tau, \xi) + O(\varepsilon^{2/3}),$$

где  $\eta = (1-r)/\lambda$ ,  $\tau = (1-x)/\mu^2$ ,  $\xi = y/\mu$ ,  $\lambda = \varepsilon^{1/2}$ ,  $\mu = \varepsilon^{1/6}$ ,  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ ,

$$v_0(x, y) = -\sum_{j=1}^{\infty} f_j(y) (1-x)^{j-1}, \quad \pi_0(\eta, \phi) = -e^{-\sqrt{1-\cos \phi} \eta} v_0(1, \phi),$$

$$w_{-2} = O(\tau^{-1}), \quad w_{-1} = O(\xi \tau^{-1}), \quad w_0 = O(\xi^2 \tau^{-1}), \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty, \quad \xi \rightarrow \infty.$$

**Теорема 6.3.2.** Пусть  $q(x) = (1-x^2)$ ,  $f(x, y) \in C^\infty(\bar{D})$ ,  $f(1, 0) \neq 0$ ,  $f(-1, 0) \neq 0$ , тогда для решения задачи (14)-(15) справедливо разложение

$$u(x, y) = v_0(x, y) + \pi_0(\eta, \phi) + g_{-2}(\gamma, \xi)/\mu^{-2} + g_{-1}(\gamma, \xi)/\mu^{-1} + g_0(\gamma, \xi) + w_{-2}(\tau, \xi)/\mu^{-2} + w_{-1}(\tau, \xi)/\mu^{-1} + w_0(\tau, \xi) + O(\varepsilon^{2/3}),$$

где  $\eta = (1-r)/\lambda$ ,  $\gamma = (1+x)/\mu^2$ ,  $\tau = (1-x)/\mu^2$ ,  $\xi = y/\mu$ ,  $\lambda = \varepsilon^{1/2}$ ,  $\mu = \varepsilon^{1/6}$ ,  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ ,  $g(\gamma, \xi)$  – обобщенная погранфункция в окрестности точки  $(-1, 0)$ , а  $w(\tau, \xi)$  – обобщенная погранфункция в окрестности точки  $(1, 0)$ ,

$$v_0(x, y) = -(f(x, y) - (f(1, y)(1+x) + f(-1, y)(1-x))/2)/(1-x^2), \quad \pi_0(\eta, \phi) = -e^{-|\sin \phi| \eta} v_0(1, \phi),$$

$$w_{-2} = O(\tau^{-1}), \quad w_{-1} = O(\xi \tau^{-1}), \quad w_0 = O(\xi^2 \tau^{-1}), \quad g_{-2} = O(\gamma^{-1}), \quad g_{-1} = O(\xi \gamma^{-1}), \quad g_0 = O(\xi^2 \gamma^{-1}),$$

при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ .

**6.4. Заключение по главе 6.** Впервые доказана применимость обобщенного метода пограничных функций для построения равномерных асимптотических разложений решений задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений в случаях, когда особенность

появлялась: на границе, т.е. во всех точках круга; на границе и в центре круга одновременно; в одной граничной точке; в двух граничных точках. Построены формальные асимптотические разложения решений, и они строго обоснованы математическими доказательствами в виде теорем. Построены равномерные асимптотические разложения решений по дробным степеням малого параметра.

## ВЫВОДЫ

1. Построены равномерные асимптотические разложения решений задач Коши для сингулярно возмущенных линейных и нелинейных ОДУ с простыми точками поворота в комплексной плоскости.

2. Построены равномерные асимптотические разложения решений задач Коши для сингулярно возмущенных линейных и нелинейных ОДУ с периодически-ми точками поворота в комплексной плоскости.

3. Построены равномерные асимптотические разложения решений задач Коши для сингулярно возмущенных линейных и нелинейных ОДУ с кратными точками поворота в комплексной плоскости.

4. С помощью обобщенного метода погранфункций построены равномерные асимптотические разложения решений, любой степени точности, задач Коши для сингулярно возмущенных ОДУ с кратными точками поворота в комплексной плоскости.

5. Построены равномерные асимптотические разложения решений задач Дирихле для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений: с кратной точкой поворота внутри области; с особой границей; с кратной точкой поворота внутри и на границе области одновременно.

6. Показано, что асимптотическое поведение решения бисингулярно возмущенных задач существенно зависит от неоднородной части уравнения. Асимптотические разложения решений исследованных задач представляет собой ряд Пюйзо.

7. Проведенное исследование доказывает преимущество применения обобщенного метода погранфункций к построению асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач.

*Автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору, член-корреспонденту НАН КР, заслуженному деятелю науки КР Алымкулову Келдибаю за постоянное внимания к работе и обсуждение результатов.*



## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений [Текст] / Д.А. Турсунов. – Ош: Билим, 2013. – 150 с.
2. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения [Текст] / Д.А. Турсунов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013, 6(26). – С. 37–44.
3. Турсунов, Д.А. Обобщенный метод погранфункций для эллиптического уравнения, случай внешнего касания особой характеристики с границей области [Текст] / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: вторая между-народная научная конференция, посвященная 20-летию образования КРСУ и 100-летию основателя математической школы в Кыргызстане проф. Я.В. Быкова. – Бишкек, 2013. Т.1. – С. 92-97.
4. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с кратной точкой поворота внутри области [Текст] / Д.А. Турсунов // Естественные и математические науки в современном мире. № 9-10 (10): сборник статей по материалам IX-X международной научно-практической конференции. – Новосибирск: Изд. «СибАК», 2013. – С. 31-38.
5. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения с двумя точками поворота в комплексной плоскости [Текст] / Д.А. Турсунов // Естественные и математические науки в современном мире. № 9-10 (10): сборник статей по материалам IX-X международной научно-практической конференции. – Новосибирск: Изд. «СибАК», 2013. – С. 24-31.
6. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи с периодической точкой поворота [Электронный ресурс] / Д.А. Турсунов // Интернет журнал ВАК КР. 2014 г.
7. Tursunov, D.A. Uniform asymptotic solutions of the Cauchy problem for a generalized model equation of L.S. Pontryagin in the case of violation of conditions of asymptotic stability [Text] / D.A. Tursunov // Science Journal of Applied Mathematics and Statistics. – Vol. 1, – N 3. New York – 2013, – P. 25-29.
8. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного ОДУ с кратной точкой поворота в комплексной плоскости [Текст]/ Д.А. Турсунов, Э.А. Турсунов// Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 266-270.

9. Турсунов, Д.А. Обобщенный метод погранфункции для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения [Текст] / Д.А. Турсунов // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. Выпуск. – С. 260-265.
10. Турсунов, Д.А. Аналог метода погранфункции для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения [Текст] / Д.А. Турсунов // Сб. научных трудов X межд. научной конф. молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук» Россия, Томск. – 2013. – С. 623-625.
11. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота [Текст] / Д.А. Турсунов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. 1(21). – С. 34–40.
12. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного уравнения с двумя точками поворота [Текст] / К. Алымкулов, Т.Д. Асылбеков, Д.А. Турсунов // Вестник ОшГУ. – 2012. – № 3. – С. 40–44.
13. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного ОДУ первого порядка в комплексной плоскости [Текст] / Д.А. Турсунов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып. 44. – С. 97-102.
14. Турсунов, Д.А. Равномерное асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи при нарушении условия асимптотической устойчивости [Текст] / Д.А. Турсунов // Вестник КНУ. – 2011. – № 10. – С. 229-231.
15. Турсунов, Д.А. Применение метода стационарной фазы для оценки решений сингулярно возмущенных задач при нарушении устойчивости [Текст] / Д.А. Турсунов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып. 40. – С. 182-186.
16. Турсунов, Д.А. Метод стационарной фазы для оценки решений одной сингулярно возмущенной задачи при нарушении устойчивости [Текст] / Д.А. Турсунов Д.А. Жураев // Вестник ОшГУ. – 2008. – № 6. – С. 116-118.
17. Турсунов, Д.А. Метод погранфункций для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет полюс второго порядка [Текст] / Д.А. Турсунов, А.Т. Бекмуратов // Вестник ОшГУ. – 2008. – № 6. – С. 112-116.
18. Турсунов, Д.А. Оценки решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений при нарушении условия устойчивости [Текст] / Д.А. Турсунов // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: материалы международной

юбилейной научной конференции, посвященной 15-летию образования КРСУ. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2008. – С.165-168.

19. Турсунов, Д.А. Равномерное приближение решения краевой задачи бисингулярно возмущенного уравнения второго порядка [Текст] / Д.А. Турсунов // Вестник ОшГУ. – 2008. – № 5. – С. 240-243.
20. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных задач при нарушении условия устойчивости [Текст] / Д.А. Турсунов // Алматы: Вестник КНУ им. Аль-Фараби. – 2007. – № 2(53). – С. 53-57.
21. Турсунов, Д.А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач, когда собственные значения имеют нули на действительной оси [Текст] / Д.А. Турсунов Э.А. Турсунов // Бишкек: Вестник КНУ. – 2007. Сер.3. Вып. 4. – С. 96-100.
22. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных краевых задач в случае смены устойчивости [Текст] / Д.А. Турсунов // ОшКУУ, НОТ. – 2007. – № 3. – С. 139-143.
23. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных задач при нарушении условия устойчивости [Текст] / Д.А. Турсунов, Э.А. Турсунов // Журнал «Естественные и технические науки». Москва. – 2007. – № 3(29). – С. 12-15.
24. Турсунов, Д.А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач, с точкой поворота на действительной оси [Текст] / Д.А. Турсунов, Э.А. Турсунов // Вестник ОшГУ. – 2007. – № 2. – С. 127-130.
25. Турсунов, Д.А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности критической точки [Текст] / Д.А. Турсунов, Э.А. Турсунов // Вестник ОшГУ. – 2006. – № 4. – С. 142-146.
26. Турсунов, Д.А. Асимптотика решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, когда собственные значения имеют нули на действительной оси [Текст] / Д.А. Турсунов, Ю.М. Аманбаева // Вестник ОшГУ. – 2006. – № 7. – С. 127-128.
27. Турсунов, Д.А. Асимптотика поведения решений сингулярно возмущенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений в окрестности критической точки [Текст] / Д.А. Турсунов // Журнал «Естественные и технические науки». Москва. – 2006. – № 3(23). – С. 23-25.
28. Турсунов, Д.А. Асимптотическое поведение решения одной сингулярно возмущенной задачи в случае смены устойчивости [Текст] / Д.А. Турсунов, Ю.М. Аманбаева // Вестник ОшГУ. – 2005. – № 3. – С. 119-123.

29. Турсунов, Д.А. Обобщенный метод погранфункций для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений в случае, когда особенность появляется на границе и внутри области [Текст] / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их применения». 21-23 ноября, 2013 г. – Ташкент. – С. 261– 263.
30. Турсунов, Д.А. Обобщение метода погранфункций для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений [Текст] / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Седьмая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям: программа и тезисы докладов. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2013. – С. 56-57.
31. Турсунов, Д.А. Обобщенный метод погранфункций для эллиптического уравнения, случай внешнего касания особой характеристики с границей области [Текст] / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений (тезисы докладов): вторая международная научная конференция, посвященная 20-летию образования КРСУ и 100-летию основателя математической школы в Кыргызстане проф. Я.В. Быкова. – Бишкек, 2013. – С. 73-74.
32. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения, когда невозмущенное уравнение имеет особенность на границе [Текст] / Д.А. Турсунов // Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 135-летию Томского государственного университета и 65-летию механико-математического факультета: Сборник тезисов (Томск, 02-04 октября 2013 г.) – Томск: Изд-во "Иван Федоров", 2013. – С.81.
33. Турсунов, Д.А. Метод стационарной фазы для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения при нарушении условия асимптотической устойчивости [Текст] / Д.А. Турсунов // Тезисы докладов между-народной конференции «Функциональный анализ и его приложения», г. Астана, 2-5 октября 2012 г. – С. 200-201.
34. Tursunov, D.A. Singular perturbation ordinary differential equations at violation of a condition of exponential stability [Text] / D.A.Tursunov // Almaty: The Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries. 2009. – P. 299.

**Турсунов Дилмурат Абдиллажановичтин «Бисингулярдуу  
козголгон кадимки жана эллиптикалык дифференциалдык  
теңдемелердин чыгарылыштарынын асимптотикасы» – деген  
темадагы 01.01.02 – «Дифференциалдык теңдемелер, динамикалык  
системалар жана оптималдык башкаруу» деген адистик боюнча  
физика-математикалык илимдердин доктору окумуштуулук  
даражасын алуу үчүн жазылган диссертациясынын  
РЕЗЮМЕСИ**

**Урунттуу сөздөр:** асимптотика, бисингулярдуу козголуу, кадимки дифференциалдык теңдеме, эллиптикалык теңдеме, Кошинин маселеси, Дирихленин маселеси, бурулуу чекити, Стокстун сызыгы, деңгээл сызыктар, аналитикалык функция, кичине параметр.

**Изилдөөнүн объекти:** Бисингулярдуу козголгон кадимки жана эллиптикалык жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер.

**Иштин максаттары.** Комплекстик тегиздикте бисингулярдуу козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши маселесинин чечимдеринин асимптотикаларын тургузуу.

Бисингулярдуу козголгон эллиптикалык типтеги дифференциалдык теңдемелер үчүн Дирихленин маселесинин чыгарылыштарынын асимптотикаларын тургузуу. Чыгарылыштарынын асимптотикасын тургузууда жалпыланган чектик функция усулун колдонуу.

**Изилдөөнүн ыкмалары:** бөлүктөп интегралдоо усулу, стационардык фаза усулу, ашуу усулу жана жалпыланган чектик функция усулу.

**Изилдөөнүн илимий жаңылыктары.** Бисингулярдуу козголгон кадимки жана эллиптикалык дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын асимптотикаларын тургузуу үчүн алгоритмдер иштелип чыгарылды. Комплекстик тегиздикте бисингулярдуу козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши маселесинин чыгарылыштарынын асимптотикаларынын башкы мүчөлөрү жана асимптотикалык ажыралмалары тургузулган. Өзгөчөлүктөр аймактын ичинде, чек-арасында жана бир учурда аймактын ичинде жана чекарасында пайда болгон учурда бисингулярдуу козголгон эллиптикалык типтеги дифференциалдык теңдемелер үчүн Дирихленин маселесинин чечимдеринин бир калыптагы асимптотикалык ажыралмалары тургузулган.

## РЕЗЮМЕ

**диссертационной работы Турсунова Дилмурата Абдиллажановича на тему: «Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»**

**Ключевые слова:** асимптотика, бисингулярное возмущение, обыкновенное дифференциальное уравнение, эллиптическое уравнение, задача Коши, задача Дирихле, точка поворота, линия Стокса, линии уровня, аналитические функции, малый параметр.

**Объект исследования:** бисингулярно возмущенные обыкновенные и эллиптические дифференциальные уравнения в частных производных.

**Цель работы.** Построить асимптотики решений задач Коши для бисингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости. Построить асимптотики решений задач Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических дифференциальных уравнений. При построении асимптотики решения применять обобщенный метод погранфункций.

**Методика исследования:** метод интегрирования по частям, метод стационарной фазы, метод перевала и обобщенный метод погранфункций.

**Научная новизна.** Разработаны алгоритмы для построения асимптотики решений бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений. Построены главные члены асимптотики и асимптотические разложения решений задач Коши для бисингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости. Построены равномерные асимптотические разложения решений задач Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических дифференциальных уравнений, когда особенность появляется внутри области, на границе области и одновременно внутри и на границе области.

## SUMMARY

**Tursunov Dilmurat Abdillajanovich**

**Dissertation «The asymptotic of solutions of bisingularly perturbed ordinary and elliptic differential equations» for the scientific degree of doctor of physical-mathematical sciences**

(specialty 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control)

**Key words:** asymptotic, bisingular perturbation, ordinary differential equation, elliptic equation, Cauchy problem, Dirichlet problem, turning point, Stokes line, level line, analytic function, small parameter.

**Object of research:** bisingularly perturbed ordinary and elliptic partial differential equations.

**Aim of research.** Construct the asymptotics of solutions of the Cauchy problem for bisingular perturbed ordinary differential equations in the complex plane. To construct the asymptotics of solutions of the Dirichlet problem for bisingularly perturbed elliptic differential equations. Apply the generalized method of boundary functions in constructing asymptotic of the solution.

**Methods of research:** method of integration by parts, the stationary phase method, the steepest descent method, the method of the level lines and the generalized method of boundary functions.

**Scientific novelty.** Algorithms for constructing the asymptotics of solutions of bisingularly perturbed ordinary and elliptic differential equations. Constructed main terms of the asymptotics and the asymptotic expansion of the solution of the Cauchy problem for bisingularly perturbed ordinary differential equations in the complex plane. Constructed uniform asymptotic expansions of the Dirichlet problem for bisingularly perturbed elliptic differential equations, when the singularity appears inside the area on the boundary and at the same time inside and on the boundary.

*Турсунов Дилмурат Абдиллажанович*

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ  
ОБЫКНОВЕННЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ

специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические  
системы и оптимальное управление

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени доктора  
физико-математических наук**

**Формат 60\*90<sub>1/16</sub>. Объем 2 п.л. Тираж 120 экз. Заказ № 12.**

**Опечатано в редакционно-издательском отделе ОшГУ «Билим»  
г. Ош, ул. Ленина, 331.**