**ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ**

**Актуальность темы.** Дифференциальные уравнения с малыми параметрами при старших производных возникают при моделировании и исследовании ряда физических, биологических, химических явлений и процессов. Подобного рода уравнения встречаются также в теориях автоматического регулирования, нелинейных колебаний, в газовой динамике, при описании гироскопических систем. Эти уравнения называют сингулярно-возмущенными. Их особенностью является то, что порядок вырожденного уравнения, получающегося из исходного при нулевых значениях параметров, ниже порядка исходного уравнения. Вследствие этого решение вырожденного уравнения не может удовлетворить всем условиям, заданным для первоначального уравнения. Для достаточно широкого класса сингулярно-возмущенных задач характерно свойство быстрого изменения решения в некоторых областях - пограничных и переходных слоях.

В настоящее время асимптотические методы продолжают развиваться, несмотря на бурное развитие численных методов, вызванное появлением быстродействующих вычислительных машин, - численные и асимптотические методы не исключают, а взаимно дополняют друг друга.

Построение приближенных решений сингулярно возмущенных задач проводится различными как численными, так и асимптотическими методами. Общепризнанными среди асимптотических методов являются метод пограничных функций (А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Л.А. Люстерник, М.И. Вишик, М.И. Иманалиев), метод усреднения (Н.М. Крылов, H.H. Боголюбов, ЮА. Митропольский), метод регуляризации сингулярных возмущений (С.А. Ломов).

Начиная с 1948 года, сингулярно-возмущенные уравнения исследовались в работах Тихонова А.Н., в которых получен предельный переход от решения полного уравнения к решению вырожденного уравнения при стремлении малого параметра к нулю.

В работах Васильевой А.Б. построена асимптотика решения, по малому параметру состоящая из двух частей из функции погран слоя и регулярного члена.

В работах Иманалиева М.И. и его учеников исследовано интегро-дифференциальное уравнение с малым параметром, получена асимптотика решения.

Линейное интегро-дифференциальное уравнение в критическом случае рассматривалось в работе Саадабаева А. и доказана сходимость решения полной задачи к решению вырожденного уравнения при стремлении параметра к нулю.

Во всех этих работах выполняется так называемая устойчивость решения.

В данной диссертационной работе исследуются сингулярно-возмущенные интегро-дифференциальные уравнения, когда некоторые корни матрицы обращаются в нуль, т.е. условие теоремы Тихонова не выполняется, данный аспект отражает актуальность диссертационной работы.

Рассматриваются отдельно уравнения с интегральным оператором Вольтерра и Фредгольма. Такие задачи ранее не рассматривались. Доказательство предельного перехода от решения полного уравнения к решению вырожденного уравнения при стремлении малого параметра к нулю и построение асимптотики определяет актуальность данных задач.

**Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями.** Работа выполнена в рамках проекта «Операторные методы решений задач математической физики и прикладной математики» по Институту фундаментальных наук при КНУ им. Ж. Баласагына, 2007 год. №003800 госрегистрации темы. Полученные результаты включены в отчет по проекту.

**Цель работы.** Цель диссертационной работы - доказательство предельного перехода от решения сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального полного уравнения к решению вырожденного уравнения в критическом случае. Причем сходимость в случаях с интегральным оператором Фредгольма и отдельно интегрального оператора Вольтерра. Построение асимптотики нулевого порядка и доказательство оценки остаточного члена. Показать, что интегральный оператор существенно влияет на поведение решение сингулярно- возмущенного интегро-дифференциального уравнения.

**Научная новизна полученных результатов.**

* доказан предельный переход от решения полного уравнения к решению вырожденного уравнения для линейного интегро-дифференциального уравнения в критическом случае с интегральным оператором Фредгольма с одним и нескольким нулевым корнем и Вольтерра отдельно;
* доказан предельный переход от решения полного уравнения к решению вырожденного уравнения для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с интегральным оператором Вольтерра;
* доказан предельный переход от решения полного уравнения к решению вырожденного уравнения для слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения с интегральным оператором Фредгольма;
* получена оценка остаточного члена с нулевым асимптотическим разложением;
* показано, что для уравнения с интегралом Фредгольма с нулевым корнем отсутствует функции пограничного слоя;
* установлена связь между сингулярно-возмущенным интегро-дифференциальным уравнениям с некорректными задачами.

**Практическая значимость полученных результатов.** Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации дополняют теорию асимптотических разложений решений сингулярно-возмущенных задач. Развитый в работе математический аппарат и полученные результаты могут использоваться при чтении спецкурсов для студентов – математиков и в качестве методических указаний по выполнению научных работ аспирантов.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

* доказательство предельного перехода от решения полного уравнения к решению вырожденного уравнения для линейного и нелинейного интегро-дифференциального уравнения в критическом случае с интегральным оператором Фредгольма с одним и нескольким нулевым корнем и Вольтерра отдельно;
* получение оценки остаточного члена с нулевым асимптотическим разложением;
* установление оценки и пограничных функций с нулевым корнем матрицы коэффициентов;
* доказательство того, что для уравнения с интегралом Фредгольма с нулевым корнем отсутствует функции пограничного слоя;
* доказательство того, что сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра имеет пограничные функции в граничных точках.

**Личный вклад соискателя.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[10]. В совместных работах [1]-[6] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а получение основных результатов – автору, а получение оценок – соавтору.

**Апробация работы.** Результаты исследований докладывались на международных конференциях, симпозиумах и межвузовских, вузовских конференциях:

* международная научно-практическая конференция «Проблемы образования и науки» НГУ, Нарын, 2001;
* международная научно-практическая конференция Ош ГУ, Ош, 2001;
* международная научно-практическая конференция «Проблемы образования и науки» НГУ, Нарын, 2002;
* на семинаре кафедры высшей математики Института новых информационных технологий;
* на семинаре кафедры высшей и прикладной математики Института горного дела и горных технологий им. академика У.Асаналиева;
* на пятом всемирном конгрессе математиков тюркского мира (Иссык-Куль, 2014г.).

**Полнота отражения результатов диссертации в публикациях.** Основные результаты диссертации опубликованы в 9 научных статьях, в том числе в реферируемых журналах Кыргызской Республики -4 и в реферируемых зарубежных журналах -1 и материалах конференций -3, в единоличном авторстве -2. По материалам первой главы опубликованы 3 статьи, по материалам второй главы опубликованы одна статья, по материалам третьей главы опубликованы 3 статьи.

**Структура, объем и краткое содержание диссертации.** Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, трех глав, разбитых на параграфы, выводов и списка использованных источников из 67 наименований. Нумерация разделов – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья - на порядковый номер в разделе. Объем диссертации составляет 123 страницы, включая библиографический список из 41 ссылок.

**Краткое содержание работы**

Работа состоит из десяти параграфов, объединенных в три главы, и списка использованной литературы.

В первой главе рассматривается краткий обзор литературы по теме диссертации, и приводятся некоторые результаты, используемые в работе и заимствованные из других источников.

В §1.1 рассматривается дополнительные сведения по теории сингулярно возмущенных уравнений.

В §1.2 исследуется сингулярно возмущенное интегро-дифференциальное уравнение типа Фредгольма в критическом случае. Рассмотрим уравнение с вырожденным ядром

с начальным условием

Полагая получаем вырожденное уравнение

Допустим, что функции и непрерывные функции на сегменте и линейно независимые. Задача (1), (2) эквивалентно интегральному уравнению

Доказана

**Теорема 1.** Пусть: 1) такова, что уравнение (3) имеет решение; 2) функции , непрерывны на сегменте и ортонормированные. Тогда решение задачи (1), (2) или интегрального уравнения (4) существует и сходится при к одному из решений вырожденного уравнения (3).

Рассмотрим интегральное уравнение с общим ядром

с начальным условием

Доказана

**Теорема 2.** Пусть: 1) ядро является положительным и симметричным; 2) функция такова, что сходится числовой ряд  3) решение уравнения существует и единственно. Тогда решение задачи (5), (6) существует и сходится при к решению уравнения по норме пространства .

В §1.3 рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра в критическом случае

с начальным условием

где непрерывная функция в квадрате: и непрерывно дифференцируемо по аргументу - непрерывно дифференцируемо на сегменте и удовлетворяет условию

**Теорема 3.** Пусть: 1) ядро непрерывно и имеет непрерывную производную в области ; 2) 3) ядро непрерывно и ограничено 4) постоянная удовлетворяет условию где - известная постоянная. Тогда задача имеет единственное решение , причем это решение при сходится к решению вырожденного уравнения

на интервале

В §1.4 рассматривается примеры задача Коши для интегро-дифференциального уравнения с малым параметром при производной, которое имеет вид

с начальным условием

Решение полного уравнения сходится к одному решению вырожденного уравнения.

Во второй главе рассматривается линейное сингулярно-возмущенное интегро-дифференциальное уравнение с интегралом типа Фредгольма.

В §2.1 рассматривается линейное уравнение

с условием

где – малый параметр, х – неизвестный вектор, – постоянная матрица,

– непрерывная в квадрате матрица.

Здесь рассматривается случай, когда корни характеристического уравнения

удовлетворяют условию

**Теорема 4.** Если собственные значения матрицы удовлетворяют (14), то для функции в справедлива оценка .

В §2.2 рассматривается оценка остаточного члена или задачи

.

**Теорема 5.** Ряд для резольвенты ядра - сходится абсолютно и равномерно при где – некоторая постоянная.

В §2.3 рассматривается оценка доказательство ограниченности остаточного члена

**Теорема 6.** Пусть: 1) корни характеристического уравнения удовлетворяют условию (14), а также все элементарные делители матрицы простые; 2) функции и непрерывно дифференцируемы по и непрерывно по ; 3) уравнение

(15)

имеет единственное решение ; 4) ядро симметрично и положительно определено; 5) равномерно сходятся ряды

(16)

(17)

(18)

Тогда при достаточно малых , удовлетворяющих неравенству

где – некоторые положительные постоянные, система линейных интегро-дифференциальных уравнений

с условием

имеет единственное непрерывное решение, представимое в виде

причем при это решение сходится к решению вырожденной системы

на полуинтервале .

В §2.4 рассматривается задача (11), (12) в случае, когда корни уравнения (13) удовлетворяют условию

В этом случае приходится накладывать значительно более сильные ограничения, чем в §1.1.

**Теорема 7.** Если собственные значения матрицы удовлетворяют (14), то для функции в справедлива оценка

В §2.5 рассматривается оценка остаточного члена или задачи

.

В §2.6 рассматривается оценка доказательство ограниченности остаточного члена .

**Теорема 8.** Пусть: 1) корни характеристического уравнения (14) удовлетворяют условию (22); 2) уравнение

имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение . Кроме того, оператор положительный, а также уравнение имеет единственное решение Тогда при

задача

с начальным условием (25)

имеет единственное решение, представимое в виде

В §2.7 рассматривается решение задачи Коши для сингулярно- возмущенного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в критическом случае.

Рассмотрим слабо нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

с начальным условием

**Теорема 9.** Если ядро является положительным, т.е. удовлетворяет неравенству то матрица

где является положительным, т.е. удовлетворяет неравенству

**Теорема 10.** Если выполнены условия теоремы 9, то матрица является положительной.

В третьей главе построена асимптотика решения линейных и нелинейных сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с интегралом типа Вольтерра. В этом случае дополнительные условия задаются на правом конце отрезка .

В §3.1 рассматривается линейное уравнение

с условием

где – неизвестный n – мерный вектор, – постоянная матрица, – непрерывная в квадрате матрица. Построена асимптотика решения задачи (29), (30) в случае, когда корни характеристического уравнения матрицы (13) удовлетворяют условию

**Теорема 11.** Если собственные значения матрицы удовлетворяют (31), то для функции в справедлива оценка .

**Теорема 12.** Если собственные значения матрицы удовлетворяют (32)

то для функции , в справедливы оценки

В §3.2 рассматривается оценка остаточного члена асимптотики.

Справедлива

**Теорема 13.** Если , то для функции Грина краевой задачи , имеет асимптотическое представление вида

а также справедлива оценка

где некоторая постоянная.

**Теорема 14.** Пусть: 1) корни характеристического уравнения (13) удовлетворяют условию (31); 1а) кроме того для ; 2) система интегральных уравнений

(35)

имеет дважды непрерывно дифференцируемое решение ; 3) функции дважды непрерывно дифференцируемы по и ; 4) функции непрерывно дифференцируемы и малых

Тогда при достаточно малых задача

(36)

с условиями

имеет единственное решение, представимое в виде

Это решение при стремится к решению вырожденного уравнения на интервале

В §3.3 построена асимптотика решения задачи

где – неизвестный вектор, – постоянная матрица, – непрерывный в области вектор, Здесь рассмотрен случай, когда корни уравнения (0.11) удовлетворяют условию (31).

**Теорема 15.** Если собственные значения матрицы удовлетворяют (31), то для функции в

справедлива оценка .

Далее, в §3.4 рассматривается оценка остаточного члена асимптотики.

**Теорема 16.** Для пограничной функции справедливо неравенство

где и – некоторые постоянные.

**Теорема 17.** Пусть: 1) корни уравнения (13) удовлетворяют условию (31); 2) вырожденное уравнение

имеет единственное дважды непрерывно дифференцируемое решение ; 3) функция имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно в окрестности точек ; 4) удовлетворяет неравенству

Тогда при достаточно малых задача

с дополнительными условиями

имеет единственное решение представимое в виде (40). Это решение при стремится к решению вырожденного уравнения (42) на интервале .

**ВЫВОДЫ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Впервые доказан предельный переход от решения полного уравнения к решению вырожденного уравнения для линейного интегро-дифференциального уравнения в критическом случае с интегральным оператором Фредгольма с одним нулевым корнем и Вольтерра отдельно. Доказано предельный переход от решения полного уравнения к решению вырожденного уравнения для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с интегральным оператором Вольтерра.

Впервые доказан предельный переход слабо нелинейного сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения в критическом случае с интегральным оператором Фредгольма.

Впервые получена оценка остаточного члена с нулевым асимптотическим разложением и оценка для пограничной функции. Показано, что для уравнения с интегралом Фредгольма с нулевым корнем отсутствует функции пограничного слоя.

Установлена связь между сингулярно-возмущенным интегро-дифференциальным уравнением в критическом случае с некорректными задачами.

Впервые получена асимптотика фундаментального решения сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с переменным коэффициентам. Построена функции Грина и доказана оценка.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю, профессору А. Саадабаеву за постановки задач, ценные советы и постоянное внимание при проведении настоящих исследований.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. **Солтонкулова, Ж.М.** Определение членов асимптотического ряда решений одного дифференциального уравнения с малым параметром [Текст] / Ж.М. Солтонкулова, А. Саадабаев // Проблемы образования и науки. - Нарын, 2001. - ч2. - С. 69-76.
2. **Солтонкулова, Ж.М.** О предельном переходе в задаче Коши интегро-дифференциального уравнения в критическом случае [Текст] / Ж.М. Солтонкулова, А. Саадабаев // Ош, 2001.
3. **Солтонкулова, Ж.М.** Решение задачи Коши для сингулярно возмущенного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в критическом случае [Текст] / Ж.М. Солтонкулова, А. Саадабаев // Проблемы образования и науки. - Нарын, 2002.
4. **Солтонкулова, Ж.М.** Сингулярно возмущенное линейное интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтера в критическом случае [Текст] / Ж.М. Солтонкулова, А. Саадабаев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям.- Вып. 42.- Бишкек, 2010.- С. 11-15.
5. **Солтонкулова, Ж.М.** Оценка остаточного члена асимптотического разложения в критическом случае [Текст] / Ж.М. Солтонкулова, А. Саадабаев // Наука и инновации. - Специальный выпуск №2.- Бишкек, 2013. - С. 72-79.
6. **Солтонкулова, Ж.М.** Асимптотическое разложение решения задачи Коши для линейных си стем типа Вольтерра в случае нескольких нулевых корней [Текст] / Ж.М. Солтонкулова, А. Саадабаев // Наука и инновации. - Специальный выпуск №1.- Бишкек, 2013. - С. 23-27.
7. **Солтонкулова, Ж.М.** Асимптотика решения задачи Коши для линейных систем типа Вольтерра в случае одного нулевого корня [Текст] / Ж.М. Солтонкулова // Поиск. – Сер. естественных и технических наук .- №4(1). - Алматы, 2012. - С. 102-106.
8. **Солтонкулова, Ж.М.** Предельный переход в решении сингулярно-возмущенных задач в критическом случае [Текст] / Ж.М. Солтонкулова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Вып. 43. - Бишкек, 2010. - С. 94-98.
9. **Солтонкулова, Ж.М.** Решения интегро-дифференциальных уравнений методом Чаплыгина [Текст] / Ж.М. Солтонкулова, А. Кутанов // Вестник. - КГУ им. И. Арабаева. – Бишкек, 2012. - №4. - С.197-200.
10. **Soltonkulova, J.M.** Limit of the solution of a singularly perturbed nonlinear integro-differential equation of second order Volterra type [Text] / Soltonkulova J.M., Saadabaev A. // The V Congress of Turkic World Mathematicians.- Bulan-Sogottu. - Kyrgyzstan, 2014. - C. 131.

**РЕЗЮМЕ**

**диссертационной работы Солтонкуловой Жамили Мурзабековны**

**на тему «Асимптотическое разложение решения интегро-дифференциального уравнения в критическом случае» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»**

**Ключевые слова:** Интегральное уравнение, дифференциальные уравнения, сингулярно-возмущенное интегро-дифференциальное уравнение, линейное и нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, вырожденное уравнение, асимптотика нулевого порядка, сходимость, пограничный слой, устойчивость решения.

**Научная новизна и теоретическая значимость исследования:** Впервые доказан предельный переход от решения полного уравнения к решению вырожденного уравнения для линейного и нелинейного интегро-дифференциального уравнения в критическом случае с интегральным оператором Фредгольма с одним нулевым и несколькими нулевыми корнями и Вольтерра отдельно.

Впервые получена оценка остаточного члена с нулевой асимптотикой и оценка для пограничной функции с нулевым корнем матрицы .

Показано, что для уравнения с интегралом Фредгольма с нулевым корнем отсутствует функции пограничного слоя.

Впервые установлена связь между сингулярно-возмущенными интегро-дифференциальными уравнениями в критическом случае с некорректными задачами.

**Солтонкулова Жамила Мурзабековнанын 01.01.02 – «Дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу» адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган «Критикалык учурдагы интегро-дифференциалдык теңдеменин чыгарылышынын асимптотикалык ажыралышы» аттуу диссертациялык ишинин**

**РЕЗЮМЕСИ**

**Урунттуу сөздөр:** интегралдык теңдеме, дифференциалдык теңдеме, сингулярдуу-козголгон интегро-дифференциалдык теңдеме, сызыктуу жана сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдеме, нөлүнчү тартиптеги асимптотика, кубулган теңдеме, жыйналуучулук, пограндык катмар, чыгарылыштын турумдуулугу.

**Изилдөөнүн илимий жаңылыгы жана теориялык маанилүүлүгү:** Биринчи жолу критикалык учурдагы сызыктуу жана сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн толук теңдеменин чыгары­лышынан болгондо пайда болгон теңдеменин чыгарылышына пределдик өтүүсү далилденди. Бул изилдөө Фредгольмдун интегралдык операторунун жалгыз нөлдүк чыгарылышы жана өзүнчө Вольтеррдин интегралдык оператору үчүн жүргүзүлдү.

Интегралдык операторлуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн толук теңдеменин чыгарылышынан кубулган теңдеменин чыгарылышына пределдик өтүүсү далилденди.

Биринчи жолу нөлдүк асимптотиканын калдык мүчөсүнүн баалосу жана пограндык функциялар үчүн матрицасынын нөлдүк тамырынын баалосу алынды. Фредгольмдун интегралдык теңдемесинин нөлдүк чыгары­лышы үчүн пограндык катмардын функциялары болбой тургандыгы көрсөтүлдү.

Биринчи жолу критикалык учурдагы сингулярдуу-козголгон интегро-дифференциалдык теңдемелер менен корректүү эмес маселелердин ортосундагы байланыш түзүлдү.

**SUMMARY**

**Soltonkulova Jamila Murzabekovna. Dissertation on the theme "The asymptotic expansion of the solution of integro-differential equation in the critical case" submitted for the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences on specialty 01.01.02 - "Differential equations, dynamical systems and optimal control"**

**Key words:** integral equation, differential equations, singularly perturbed integro-differential equation, linear and nonlinear integro-differential equation, degenerate equation, asymptotic behavior of the zero-order, convergence, boundary layer, stability of the solution.

**Scientific novelty and theoretical significance of the research:** to prove at the limiting transition from the solution of the complete equation to the solution of the degenerate equation for linear and nonlinear integro-differential equation in the critical case of Fredholm integral operators with a single zero and multiple zero root and Volterra separately.

It is got evaluation of an estimate of the remainder term of the asymptotic behavior of the zero and the estimate for the border function with a zero root of the matrix A.

It is shown that for Fredholm integral equations with a zero root no boundary layer functions.

It is established the connection between the singularly perturbed integro-differential equations in the critical case with the incorrect problems.

Подписано в печать 22.08.2014. Формат 60×84 1/16

Офсетная печать. Объем 1,5 п.л.

Тираж 100 экз. Заказ 788.

Отпечатано в типографии ЧП «Сарыбаев Т.Т.»

г. Бишкек, ул. Раззакова, 49. т. 62-66-76

e-mail: talant550@gmail.com