**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**им. Ж. БАЛАСАГЫНА**

**Диссертационный совет Д 01.12.001**

**На правах рукописи**

УДК 517.968.72

**ЖАПАРОВА ЗИЙНАТ АБДИЛЛАЕВНА**

**СПЕЦИФИЧЕСКИЕ ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ТИПА ВОЛЬТЕРРА**

**01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы**

**и оптимальное управление**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени**

**кандидата физико–математических наук**

**Бишкек – 2014**

Работа выполнена в лаборатории теории интегро-дифференциальных уравнений Института теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики.

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, с.н.с. **Искандаров С.**

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук, доцент **Омуралиев А. С.,**

кандидат физико-математических наук, доцент **Пахыров З.**

**Ведущая организация:** Казахский Национальный университет

им. аль-Фараби.

Адрес: Республика Казахстан, 050038, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71.

Защита диссертации состоится «\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2014 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.12.001 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан “\_\_\_” \_\_\_\_\_\_\_\_2014 г.

Ученый секретарь диссертационного

совета, д.ф.-м.н., доцент Канетов Б. Э.

**ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

**Актуальность темы диссертации.**

В связи с изучением вопросов устойчивости дифференциальных уравнений с последействием в докторской диссертации Л.М. Березанского (1991 г.) сказано, что “актуальность темы определяется известной ролью задач об устойчивости в приложениях и тем, что свойство устойчивости является важной внутренней характеристикой каждого отдельного уравнения”. Поэтому актуальными являются исследования по ограниченности и другим асимптотическим свойствам решений интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) типа Вольтерра при неограниченном возрастании независимой переменной.

Трудами ученых многих стран мира создано мощное научное направление-исследование асимптотического поведения решений ИДУ типа Вольтерра при неограниченном возрастании независимой перемененной. В связи с теоретической и практической важностью исследований по этому направлению, начиная с работ В. Вольтерра (конец XIX- начало XX века) в последнее пятидесятилетие появилось огромное количество работ, многие из которых отражены в монографиях Я.В. Быкова (1957 г.), Р. Беллмана, К.Л. Кука (1967 г.), C. Corduneanu’ (1973 г.), М.И. Иманалиева (1974 г.), В.Б. Колмановского, В.Р. Носова (1981 г.), Н.Х. Арутюняна, В.Б. Колмановского (1983 г.), В. Резвана (1983 г.), Дж. Хейла (1984 г.), Б.С. Разумихина (1988 г.), А.А. Мартынюка, В. Лакшимикантама, С. Лилы (1989 г.), А.А. Мартынюка, Д. Като, А.А. Шестакова (1990 г.), А.А. Шестакова (1990 г.), G. Gripenberg’s, S.- O. Londen’s, O. Staffans’ (1990 г.), Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной (1991 г.), В. Лакшмикантама, С. Лилы, А.А.Мартынюка (1991 г.), М.К. Дауылбаева (1999 г.),Н.В. Азбелева, П.М. Симонова (2001 г.), С. Искандарова (2002 г.), Т.A. Burton’s (2005 г.) и в обзорных статьях J.A. Nohel’s (1964 г., 1971 г.), Н.В. Азбелева, Л.Ф. Рахматуллиной (1978 г.), C.M. Dafermos’, J.A. Nohel’s (1979 г.), Н.В. Азбелева (1985 г., 1988 г.), Н.В. Азбелева, В.П. Максимова (1982 г.), М.И. Иманалиева, Б.В. Хведелидзе, Т.Г. Гегелия, А.А. Бабаева, А.И. Боташева (1982 г.), Н.Х. Арутюняна, А.Д. Дроздова, В.Б. Колмановского (1987 г.), O.J. Staffans’ (1988 г.), S. Elaydi’, S. Sivasundaram’s (1989 г.), М.И. Иманалиева, А.И. Боташева (1990 г.), Н.В. Азбелева, Л.М. Березанского, А.В. Чистякова (1989 г.), М.И. Иманалиева, С. Искандарова (2000 г.). В них разработаны новые методы и начертаны новые направления научных исследований.

При изучении качественных свойств решений ИДУ типа Вольтерра возникает проблема влияния интегральных членов на асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений при неограниченном возрастании независимой переменной.

С проблемой влияния интегральных членов тесно связаны так называемыми специфические признаки наличия качественных свойств решений ИДУ типа Вольтерра. Это такие свойства, которые справедливы только при наличии интегральных членов. А именно такие свойства, которыми не обладают решения соответствующих дифференциальных уравнений (ДУ). Здесь уместно привести следующее высказывание из монографии Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной (1991 г., с.81): «… На наш взгляд было бы правильнее смотреть на дифференциальные уравнения как на специфический случай широкого класса функционально-дифференциальных уравнений с последействием и не удивляться, если какой - нибудь представитель этого класса обнаружит новое свойство, которым не обладает дифференциальное уравнение». Как подтверждение этому, в работе Ю.А. Ведь (1995 г.) построены разрешающие примеры, показывающие естественность исследований по установлению специфических признаков для линейных однородных ИДУ второго порядка типа Вольтерра. В монографии С.Искандарова (2002 г., с. 106-167) получены специфические признаки устойчивости, асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости решений линейных однородных ИДУ первого и второго порядков типа Вольтерра.

Анализ имеющихся работ показывает, что специфические свойства устойчивости и асимптотической устойчивости решений линейных однородных ИДУ типа Вольтерра высоких порядков являются мало исследованными. Отметим, что в этом направлении имеются работы С. Искандарова (2005 г., 2006 г., 2009 г.) для ИДУ третьего порядка, (2014 г.) для ИДУ пятого порядка; М. Иманалиева, С. Искандарова (2009 г.) для ИДУ четвертого порядка, (2014 г.) для ИДУ шестого порядка.

Дальнейшему развитию исследований специфических свойств устойчивости и асимптотической устойчивости решений линейных однородных ИДУ типа Вольтерра высоких порядков и посвящена настоящая диссертационная работа.

**Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами.**

Работа выполнена в рамках проектов НИР Института теоретической и прикладной математики НАН КР: «Асимптотические, аналитические и численные методы в теории нестационарных систем, описываемых дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями, и их приложения» (2008-2010 гг.), номер гос. регистрации № 0005171; «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем» (2011-2013), номер гос. регистрации № 0006227; «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач и в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений» (2012-2014), номер гос. регистрации № 0005756. Результаты работы включены в отчеты к этим проектам.

**Цели и задачи исследования.**

Получить достаточные признаки устойчивости, асимптотической устойчивости (АУ), экспоненциальной устойчивости (ЭУ) решений линейных однородных ИДУ типа Вольтерра второго, третьего, четвертого, пятого порядков в случаях, когда все ненулевые решения соответствующих линейных однородных ДУ второго, третьего, четвертого, пятого порядков не обладают изучаемыми асимптотическими свойствами. Такие признаки называются специфическими.

**Методика исследования.**

В диссертации применяется единый подход, а именно используются нестандартные методы сведения к системе; метод преобразования уравнений В. Вольтерра; метод, основанный на введение некоторой срезывающей функции не только для ядра, но и для коэффициента искомой функции (для ИДУ первого порядка типа Вольтерра) и коэффициента первой производной искомой функции (для ИДУ второго порядка типа Вольтерра), замены первую производную искомой функции в интегральном члене ее эквивалентом в силу заданного ИДУ первого порядка и вторую производную искомой функции в интегральном члене ее эквивалентом в силу заданного ИДУ второго порядка; метод интегральных неравенств; также метод весовых функций; метод возведения уравнений в квадрат; метод вариации произвольных постоянных Лагранжа для линейного неоднородного ДУ первого и второго порядков.

Эти методы сильно развиты в работах С. Искандарова для получения специфических признаков устойчивости, АУ, ЭУ решений ИДУ различных порядков типа Вольтерра.

**Научная новизна работы**.

Установлены достаточные условия АУ, ЭУ решений линейных однородных ИДУ второго, третьего, четвертого порядков, устойчивости и АУ решений линейного однородного ИДУ пятого порядка типа Вольтерра в случаях, когда любые ненулевые решения соответствующих линейных однородных ДУ второго, третьего, четвертого, пятого порядков не обладают соответствующими асимптотическими свойствами.

**Теоретическая и практическая ценность.**

Настоящая работа носит теоретический характер и ее результаты могут найти применение в качественной теории ДУ с последействием и новых классов ИДУ типа Вольтерра высоких порядков; при качественном исследовании некоторых процессов из механики, из теории переноса космических лучей, из теории автоматического регулирования, аэроавтоупругости.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

Достаточные условия:

* АУ любого решения линейного однородного ИДУ второго порядка типа

Вольтерра с неположительным коэффициентом первой производной искомой функции;

* АУ, ЭУ любого решения линейного однородного ИДУ второго порядка

типа Вольтерра с нулевым коэффициентом первой производной искомой функции и нулевым ядром с первой производной искомой функции;

* АУ любого решения линейного однородного ИДУ третьего порядка типа

Вольтерра с неположительным коэффициентом второй производной искомой функции;

* ЭУ любого решения линейного однородного ИДУ третьего порядка типа

Вольтерра с нулевым коэффициентом второй производной искомой функции;

* АУ любого решения линейного однородного ИДУ четвертого порядка

типа Вольтерра с неположительным коэффициентом третьей производной искомой функции;

* ЭУ любого решения ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра с нулевым коэффициентом третьей производной искомой функции;
* устойчивости и АУ любого решения линейного однородного ИДУ пятого

порядка типа Вольтерра с неположительным коэффициентом четвертой производной искомой функции.

**Апробация результатов диссертации.**

Результаты настоящей работы доложены и обсуждены на:

* III Международной конференции «Асимптотические, топологические и

компьютерные методы в математике» (9-11 сентября 2010г., КРСУ);

* IV Международной научной конференции «Асимптотические,

топологические и компьютерные методы в математике», посвященной 80-летию академика М.И. Иманалиева (г. Бишкек - с. Бостери, Иссык-Кульская обл., сент. 2011 г.);

* научном семинаре отдела математики КТУ «Манас» (рук. - д.ф.-м.н.,

проф. А. Асанов, дек. 2012 г.);

* научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений КНУ им.

Ж. Баласагына » (рук. - д.ф.-м.н., с.н.с. А.Б. Байзаков, окт. 2013 г.);

* научном семинаре кафедры высшей математики КРСУ им. первого

президента РФ Б.Н. Ельцина (рук. - к.ф.-м.н., доц. Л.Г. Лелевкина, апр. 2014 г.);

* на V Конгрессе математиков Тюркского мира (5-7 июня 2014 г.,

пансионат «Аврора», пос. Булан Соготту Иссык-Кульская обл. КР).

**Публикации по теме диссертации.**

Основное содержание диссертации опубликовано в работах [1-11], приведенных в конце автореферата. В совместной работе [1] в обсуждении результатов принял участие Иманалиев М.И., в совместных работах [1, 2 - 4, 6 - 8, 11] постановка задачи и обсуждение результатов принадлежит

С. Искандарову, доказательство теорем, следствий и построение иллюстративных примеров - автору.

**Структура и объем диссертации.**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, содержащих 14 разделов, выводов и списка использованной литературы из 100 наименований, 108 стр. компьютерного текста.

В автореферате использована и сохранена система нумерации, принятая в диссертации: двойная сквозная нумерация внутри каждой главы. Например, формула (1.4) - это четвертая формула главы 1, теорема 2.3 - это третья теорема главы 2.

**Краткое содержание диссертации.**

Введем обозначения:

Все переменные и постоянные величины являются вещественными; символ «» означает «»; символ «» означает «принадлежит»;  - числовая ось;  - полуось;  - бесконечный полуинтервал, ; запись  означает  - пространство функций, определенных и  раз непрерывно дифференцируемых на полуинтервале  со значениями из 

 - пространство неотрицательных функций, интегрируемых на .

 const  такая, что  В этом случае говорят, что функция  ограничена на бесконечном полуинтервале .

Если  - const> 0 такая, что  то говорят, что функция  стремится к нулю при  по экспоненциальному закону. ИДУ - интегро-дифференциальное уравнение. ДУ - дифференциальное уравнение.

В настоящей работе рассматриваются линейные однородные ИДУ типа Вольтерра высоких порядков вида:

 

с непрерывными при  функциями  и речь будет идти о решениях  с любыми начальными данными . Как известно, каждое такое решение этих ИДУ существует и единственно.

Под устойчивостью решений линейного однородного ИДУ - го порядка  понимается ограниченность на полуинтервале  всех его решений и их производных до  - го порядка включительно; под АУ (соответственно ЭУ) решений ИДУ  понимается стремление к нулю (соответственно стремление к нулю по экспоненциальному закону) при  всех его решений и их производных до  - го порядка включительно.

Под «нестандартные методы сведения к системе» понимается «нестандартные методы сведения ИДУ высоких порядков к системе».

Под методом **М1** (соответственно методом **М2**) понимается метод, основанный на введение некоторой срезывающей функции не только для ядра, но и для коэффициента искомой функции в ИДУ первого порядка типа Вольтерра (соответственно для коэффициента первой производной искомой функции в ИДУ второго порядка типа Вольтерра), замены первую производную искомой функции (соответственно вторую производную искомой функции) в интегральном члене ее эквивалентом в силу заданного ИДУ первого порядка (соответственно ИДУ второго порядка).

Всюду в настоящей работе все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при , а также аналогично С. Искандарову (2002 г.) предполагается, что – некоторая срезывающая функция, .

Переходим к изложению краткого содержания настоящей работы.

Глава 1, состоящая из трех разделов, содержит обзор работ других авторов по теме диссертации, формулу Остроградского-Лиувилля, леммы о некоторых преобразованиях, лемму об интегральном неравенстве и заключение.

Глава 2, состоящая из пяти разделов, посвящена установлению достаточных признаков специфической АУ, ЭУ решений линейных однородных интегро-дифференциальных уравнений второго и третьего порядков типа Вольтерра.

Всюду в этой главе выполняется следующее условие:

. 

В разделе 2.1 установлены достаточные условия АУ решений линейного однородного ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида:

 (2.1)

при условии:

 

т.е. в случае асимптотической неустойчивости любого ненулевого решения соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка:

, (2.10)

что подтверждается формулой Остроградского –Лиувилля.

К ИДУ (2.1) применяется нестандартный метод сведения к системе, а именно следуя С. Искандарову (2005 г.), в ИДУ (2.1) делается нестандартная замена:

, (2.2)

где  – некоторый вспомогательный параметр, причем – некоторая весовая функция,  – новая неизвестная функция. Тогда ИДУ (2.1) сводится к эквивалентной системе (2.5), состоящей из одного ДУ (2.2) для  и из одного ИДУ типа Вольтерра для . К этой системе (2.5) применяются метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод **М1**, метод интегральных неравенств и в конце к ДУ (2.2) применяется метод вариации произвольных постоянных Лагранжа. Такова схема исследования АУ ИДУ (2.1).

В разделе 2.2 установлены достаточные условия АУ, ЭУ решений следующего линейного однородного ИДУ второго порядка типа Вольтерра:

, (2.17)

т. е. в случае асимптотической (экспоненциальной) неустойчивости любого ненулевого решения соответствующего ДУ второго порядка:

,  (2.17)

что подтверждается формулой Остроградского-Лиувилля.

Приведем основной результат этого раздела. К ИДУ (2.17) применяется нестандартный метод сведения к системе, т.е. в ИДУ (2.17) аналогично

С. Искандарову (2008 г.) проводится нестандартная замена:

 (2.18)

где - некоторые весовые функции, - новая неизвестная функция, при этом применяется метод введения некоторого нового ядра. Тогда ИДУ (2.17) сводится к эквивалентной системе из ДУ первого порядка (2.18) для и ИДУ первого порядка типа Вольтерра для . В диссертации эта система обозначена через (2.24). К системе (2.24) развиваются метод возведения уравнений в квадрат, метод преобразования уравнений В.Вольтерра, метод **М1**, метод интегральных неравенств.

Введем обозначения: - некоторое новое ядро; , , , , ;

Предположим, что

,  (), ()

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть 1) выполняются условия , , , , , ; 2) ; 3) существует число  такое, что ; 4) существует функция  такая, что ; 5) , , ; 6) 

.

Тогда для любого решения  системы (2.24) справедливы следующие утверждения:

,,, 

Пусть, кроме того, 7); 8) .

Тогда верны утверждения:

, .

Пусть, дополнительно, 9). Тогда

, т. е. любое решение  ИДУ (2.17) АУ.

ПРИМЕР 2.2. Для ИДУ второго порядка

выполняются все условия теоремы 2.2 при , здесь , , , ,, , , , , ,

. Значит, любое решение этого ИДУ является АУ.

В разделе 2.3 установлены достаточные условия АУ решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида:



 (2.38)

при условии:

, 

т.е. в случае, когда любое ненулевое решение соответствующего линейного однородного ДУ третьего порядка:

,  (2.380)

не является АУ, что подтверждается формулой Остроградского-Лиувилля.

В этом разделе аналогично С. Искандарову (2006 г., 2009 г.) в ИДУ (2.38) делается замена (2.2), как в разделе 2.1 и ИДУ третьего порядка (2.38) сводится к эквивалентной системе, состоящей из ДУ первого порядка (2.2) и из ИДУ второго порядка типа Вольтерра для новой неизвестной функции . Обозначим эту систему как в диссертации через (2.40). Система (2.40) исследуется применением метода весовых функций, метода преобразования уравнений В. Вольтерра, метода **М2**, метода интегральных неравенств.

Приведем результаты этого раздела.

Введем обозначения:

,

, , , ; , ; (*t*,;

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть 1) выполняются условия , ,(*t*)*+*(*t*), (*t*)>0, 2) 3)существует функция такая, что ; 4) существует число такое, что ; 5) существует функция такая, что ; 6)

.

Тогда для любого решениясистемы (2.40) справедливы утверждения:

(J,), Отметим, что идея введения условия 5) теоремы 2.3 заимствована из работы С. Искандарова, Д.Н. Шабданова (Алматы, 2008 г.).

Из теоремы, в частности, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Если выполняются все условия теоремы 2.3 и при существуют постоянные такие, что , то для любого решения ИДУ (2.38) справедливы оценки:

т. е. любое решение ИДУ (2.38) степенно АУ,

где .

ПРИМЕР 2.3. ИДУ третьего порядка:

где

,

удовлетворяет всем условиям теоремы 2.3 и следствия 2.5 при здесь , ,

. Значит, для любого решения этого ИДУ справедливы оценки: т. е.

*.* Следовательно, любое решение приведенного ИДУ третьего порядка АУ и степенно АУ.

В разделе 2.4 установлены достаточные условия АУ решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра (2.38). В этом случае, следуя С. Искандарову (2007 г.), в ИДУ (2.38) делается нестандартная замена:

, (2.53)

где  - некоторые вспомогательные параметры, причем  - некоторая весовая функция;  - новая неизвестная функция. Тогда ИДУ (2.38) сводится к эквивалентной системе (2.54), состоящей из ДУ второго порядка (2.53) для и ИДУ первого порядка типа Вольтерра для . В этом состоит суть нестандартного метода сведения к системе для (2.38). К системе (2.54) применяются метод возведения уравнений в квадрат, метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод **М1**, метод интегральных неравенств и в конце используется лемма Люстерника-Соболева (1965 г.).

В разделе 2.4 установлены достаточные условия ЭУ решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида:



 (2.66)

т. е. в случае, когда любое ненулевое решение соответствующего ДУ третьего порядка:

 (2.66)

не является ЭУ, что вытекает из формулы Остроградского-Лиувилля.

Отметим, что в этом случае также используется нестандартная замена (2.53) и к полученной эквивалентной системе (2.67) для ИДУ (2.66), состоящей из одного ДУ второго порядка (2.53) и из одного ИДУ типа Вольтерра первого порядка для , используются метод преобразования уравнений В.Вольтерра, метод **М1**, метод интегральных неравенств. В конце используется формула Коши, получаемая методом вариации произвольных постоянных Лагранжа, для ДУ (2.53).

В разделе 2.5 подытожены результаты исследований главы 1.

В главе 3, состоящей из четырех разделов, исследуются вопросы специфической АУ, ЭУ и устойчивости, АУ решений линейных однородных интегро-дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков типа Вольтерра.

В разделе 3.1 получены достаточные условия АУ решений линейного однородного ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида:

(3.1)

при

, ()

т. е. в случае, когда любое ненулевое решение соответствующего ДУ четвертого порядка:

(3.10)

не являются АУ, что подтверждается формулой Остроградского-Лиувилля.

Опишем схему получения основного результата этого раздела. В ИДУ (3.1) аналогично С. Искандарову (2010 г.) делаются нестандартные замены:

(3.2)

(3.3)

где - некоторые вспомогательные параметры, - некоторые весовые функции, - новые неизвестные функции. Тогда ИДУ четвертого порядка (3.1) сводится к следующей эквивалентной системе:

где

,

,

,

(ядро с),

.

В получении системы (3.8) состоит суть нестандартного метода сведения к системе для ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра (3.1).

Далее к системе (3.8) развивается метод весовых функций С. Искандарова (1980 г.) и метод преобразования уравнений В. Вольтерра. Для произвольно фиксированного решения системы (3.8) ее первое уравнение умножается на (- некоторая весовая функция), второе уравнение - на (- некоторая весовая функция), третье уравнение - на , полученные соотношения сложатся, затем интегрируется в пределах от до , в том числе по частям, при этом вводятся функции,

, к двойному интегралу с применяется лемма 1.2 из автореферата докторской диссертации С. Искандарова (2003 г.). После применения метода **М2**, осуществляется переход к интегральному неравенству, к которому применяется лемма 1 об интегральном неравенстве Ю.А. Ведь, З. Пахырова (1973 г.). В результате устанавливаются достаточные условия, дающие следующие оценки для любого решения ИДУ четвертого порядка (3.1):

(3.23)

где

+

Из (3.23), в частности, вытекает, что если , то любое решение ИДУ (3.1) является АУ.

В разделе 3.2 получены достаточные условия ЭУ решений линейного однородного ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра:

, (3.24)

т. е. в случае, когда любое ненулевое решение соответствующего ДУ четвертого порядка:

 (3.24)

не является ЭУ, что вытекает из формулы Остроградского-Лиувилля.

В этом случае также делается нестандартная замена (2.53) и ИДУ (3.24)

сводится эквивалентной системе (3.29), состоящей из ДУ второго порядка (2.53) и ИДУ второго порядка типа Вольтерра для новой неизвестной функции

. К системе (3.29) применяются метод преобразования уравнений В.Вольтерра, метод **М2**, метод интегральных неравенств. В конце используется формула Коши, получаемая методом вариации произвольных постоянных Лагранжа, для ДУ (2.53), аналогично как в разделе 2.4.

В разделе 3.3 получены достаточные условия устойчивости решений линейного однородного ИДУ типа Вольтерра вида:



 (3.43)

в случае выполнения условия:

 

т.е. в случае неустойчивости любого ненулевого решения соответствующего линейного однородного ДУ пятого порядка:

, (3.430)

что подтверждается формулой Остроградского -Лиувилля.

К ИДУ (3.43) применяется нестандартный метод сведения к системе, т.е.

аналогично С. Искандарову (2007 г.) делаются следующие нестандартные замены:

, (3.44)

, (3.45)

где  - некоторые вспомогательные параметры,  - некоторые весовые функции,  - новые неизвестные функции, и тогда ИДУ пятого порядка (3.43) сводится к эквивалентной системе (3.49), состоящей из двух ДУ второго порядка (3.44), (3.45) и из одного ИДУ первого порядка типа Вольтерра для неизвестной функции  К системе (3.49) развивается метод преобразования уравнений В.Вольтерра, метод **М1**, метод интегральных неравенств.

В разделе 3.4 получены достаточные условия АУ решений линейного однородного ИДУ типа Вольтерра пятого порядка вида (3.43) в случае выполнения условия:

, ()

т.е. в случае асимптотической неустойчивости любого ненулевого решения соответствующего линейного однородного ДУ пятого порядка (3.430), что подтверждается формулой Остроградского-Лиувилля.

Отметим, что в этом разделе, следуя С. Искандарову (2006 г.), делаются следующие нестандартные замены:

 (3.55)

 (3.56)

где - некоторые вспомогательные параметры, - некоторые весовые функции; - новые неизвестные функции, и ИДУ (3.43) сводится к эквивалентной системе (3.62), состоящей из одного ДУ первого порядка (3.55), одного ДУ второго порядка (3.56) и ИДУ второго порядка для новой неизвестной функции  В этом заключается суть нестандартного метода сведения к системе для ИДУ пятого порядка типа Вольтерра (3.43). К системе (3.62) применяются метод весовых функций, метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод **М2**, метод интегральных неравенств.

В разделе 3.5 проведен анализ результатам главы 3.

На все теоремы и на некоторые следствия глав 2, 3 построены иллюстративные примеры, подтверждающие естественность установленных условий.

В конце диссертации проделаны выводы, вытекающие из результатов проведенных исследований и о возможных теоретических и практических применениях полученных результатов.

**Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:**

1. Иманалиев М.И. Специфическая теорема об устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, С. Искандаров, З.А. Жапарова // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып.40. – С. 8-13.
2. Искандаров С. Об асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / С. Искандаров, З.А. Жапарова // Там же. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып.40. – С. 57-64.
3. Искандаров С. Специфическая экспоненциальная устойчивость решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / С. Искандаров, З.А. Жапарова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. Сер. 3. Естественно-техн. науки. Математика. Информатика. Кибернетика. – Бишкек: КНУ, 2010. – Вып.4. – С. 27-37.
4. Искандаров С. Одна специфическая теорема об экспоненциальной устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / С. Искандаров, З.А. Жапарова // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып. 42. – С. 22-28.
5. Жапарова З.А. Специфический признак асимптотической устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / З.А. Жапарова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек: КНУ, 2011. – Спец. вып. – С. 307-311.
6. Iskandarov S. On specific asymptotic stability of solutions of Volterra fourth order linear homogeneous integro-differential equations [Текст] / S. Iskandarov, Z.A. Japarova // Abstracts of the Fourth Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Baku, July 1-3, 2011. – Baku, 2011. – P. 383.
7. Искандаров С. Оценки и специфические асимптотические свойства решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / С. Искандаров, З.А. Жапарова// Междунар. науч. конф. «Функциональный анализ и его приложения», Астана, окт. 2012 г.: Тез.докл. – Астана, 2012. – С. 130-131.
8. Искандаров С. Оценки и специфическая асимптотическая устойчивость решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка [Текст] / С. Искандаров, З.А. Жапарова // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. матем., мех., информатика. – Алматы, 2012. – №2(73). – С. 22-30.
9. Жапарова З.А. Об оценках и специфической асимптотической устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / З.А. Жапарова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек: КНУ, 2012. – Вып.5. – С. 20-25.
10. ЖапароваЗ.А. Специфическая асимптотическая устойчивость решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / З.А. Жапарова // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып.45. – С.25-33.
11. Japarova Z. On criterion specific asymptotic stability of solutions of linear homogeneous Volterra integro-differential equation of the third order [Текст] / Z. Japarova, S. Iskandarov // Abst. of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014 / Edited by akad. A. Borubaev. – Bishkek: Math. Society of Kyrgyz, 2014. – P. 111.

**РЕЗЮМЕ**

Жапарова Зийнат Абдиллаевна

«Жогорку тартиптеги Вольтерра тибиндеги бир тектүү сызыктууинтегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын турумдуулугунун спецификалык белгилери» темасы, 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу деген адистик боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн диссертация сунушталган

*Урунттуу сөздөр*: Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеме, турумдуулук, асимптотикалык турумдуулук, экспоненциалдык турумдуулук, спецификалык белгилер.

*Изилдөөнүн объектиси*: Жогорку тартиптеги Вольтерра тибиндеги бир тектүү сызыктуу интегро-дифференциалдык теңдемелер.

*Иштин максаты*: Экинчи, үчүнчү, төртүнчү, бешинчи тартиптеги Вольтерра тибиндеги бир тектүү интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын турумдуулугунун, асимптотикалык жана экспоненциалдык турумдуулугунун жеткиликтүү белгилерин бул теңдемелерге тиешелүү экинчи, үчүнчү, төртүнчү, бешинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү дифференциалдык теңдемелердин (ДТлердин) бардык нөл эмес чыгарылыштары изилденүүчү касиеттерге ээ эмес учурларында алуу.

*Изилдөөнүн методикасы (ыкмасы):* Системага келтирүүнүн стандарттык эмес методдору; В. Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүп түзүү методу; кесүүчү функцияны ядрого эле эмес, белгисиз функциянын коэффициентине (тиешелүү түрдө белгисиз функциянын биринчи туундусунун коэффициентине) кийирүү жана белгисиз функциянын биринчи туундусун (тиешелүү түрдө белгисиз функциянын экинчи туундусун) интегралдык мүчөдө анын берилген биринчи тартиптеги (тиешелүү түрдө берилген экинчи тартиптеги) интегро-дифференциалдык теңдемедеги эквивалентине алмаштыруу методу; интегралдык барабарсыздыктар методу; салмактык функциялар методу; теңдемелерди квадратка көтөрүү методу; бир тектүү эмес биринчи жана экинчи тартиптеги сызыктуу ДТлер үчүн Лагранждын каалагандай турактууларды вариациялоо методу.

*Илимий жаңылыктары:* Экинчи, үчүнчү, төртүнчү тартиптеги Вольтерра тибиндеги бир тектүү интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык жана экспоненциалдык турумдуулугунун, ушундай эле типтеги бешинчи тартиптеги теңдеменин чыгарылыштарынын турумдуулугунун жана асимптотикалык турумдуулугунун жеткиликтүү белгилери бул теңдемелерге тиешелүү экинчи, үчүнчү, төртүнчү, бешинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү ДТлердин бардык нөл эмес чыгарылыштары изилденүүчү асимптотикалык касиеттерге ээ эмес учурларында алынды. Экинчи тартиптеги теңдеменин биринчи туундусунун коэффициенти, үчүнчү тартиптеги теңдеменин экинчи туундусунун коэффициенти, төртүнчү тартиптеги теңдеменин үчүнчү туундусунун коэффициенти оң эмес жана нөлгө барабар, бешинчи тартиптеги теңдеменин төртүнчү туундусунун коэффициенти оң эмес учурлары каралды.

**РЕЗЮМЕ**

Жапарова Зийнат Абдиллаевна

Диссертация «Специфические признаки устойчивости решений линейных однородных интегро-дифференциальных уравнений высших порядков типа Вольтерра» представлена на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

*Ключевые слова:* Интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра, устойчивость, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость, специфические признаки.

*Объект исследования:* Линейные однородные интегро-дифференциальные уравнения высших порядков типа Вольтерра.

*Цель работы:* Получить достаточные признаки устойчивости, асимптотической устойчивости (АУ), экспоненциальной устойчивости (ЭУ) решений линейных однородных ИДУ типа Вольтерра второго, третьего, четвертого, пятого порядков в случаях, когда все ненулевые решения соответствующих линейных однородных ДУ второго, третьего, четвертого, пятого порядков не обладают изучаемыми асимптотическими свойствами.

*Методика исследования:* В диссертации применяется единый подход, а именно используются нестандартные методы сведения к системе; метод преобразования уравнений В. Вольтерра; метод, основанный на введение некоторой срезывающей функции не только для ядра, но и для коэффициента искомой функции (для ИДУ первого порядка) и коэффициента первой производной искомой функции (для ИДУ второго порядка), замены первую производную искомой функции в интегральном члене ее эквивалентом в силу заданного ИДУ первого порядка и вторую производную искомой функции в интегральном члене ее эквивалентом в силу заданного ИДУ второго порядка; метод интегральных неравенств; также метод весовых функций; метод возведения уравнений в квадрат; метод вариации произвольных постоянных Лагранжа для линейного неоднородного ДУ первого и второго порядков.

*Научная новизна:* Установлены достаточные условия АУ, ЭУ решений линейных однородных ИДУ второго, третьего, четвертого порядков, устойчивости и АУ решений линейного однородного ИДУ пятого порядка типа Вольтерра в случаях, когда любые ненулевые решения соответствующих линейных однородных ДУ второго, третьего, четвертого, пятого порядков не обладают соответствующими асимптотическими свойствами. Рассмотрены случаи с неположительным и нулевым коэффициентом первой производной искомой функции для ИДУ второго порядка; второй производной искомой функции для ИДУ третьего порядка; третьей производной искомой функции для ИДУ четвертого порядка; с неположительным коэффициентом четвертой производной искомой функции для ИДУ пятого порядка.

**SUMMARY**

**Japarova Ziynat Abdillaevna**

Dissertation “Specific criteria for the stability of solutions of linear homogeneous Volterra integro-differential equations of higher order” submitted for

the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences

on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems

and optimal control

*Key words:* Integro-differential equation of Volterra type, stability, asymptotic stability, exponential stability, the specific criteria.

*Object of research:* Linear homogeneous Volterra integro-differential equations of higher order.

*Aimofresearch:* Obtain sufficient conditions for stability, asymptotic stability (AS), exponential stability (ES) of solutions of linear homogeneous Volterra IDE of second, third, fourth and fifth orders in cases where any non-zero solutions of the corresponding homogeneous linear differential equations (DE) of the second, third, fourth, fifth order not have studied the asymptotic properties.

*Methods of research:* The thesis applies a unified approach, namely the use non-standard methods of reduction to system; Volterra conversion method of equations; method based on the introduction of a cutting function, not only for the kernel, but also for the coefficient of the unknown function (for the IDE offirst order) and the coefficient of the first derivative of the unknown function (for the IDE of second order), replacing the first derivative of the unknown function in the integral term with an equivalent effect from given IDE of first order and second derivative of the unknown function in the integral term with an equivalent effect from given IDE of second order; method of integral inequalities; method of weighting functions; method of squaring equations; Lagrange method of variation of arbitrary constants for linear DE of the first and second order.

*Scientific novelty:* Sufficient conditions are established for AS, ES of solutions of linear homogeneous Volterra IDE of the second, third, fourth order, stability and AS of solutions of linear homogeneous Volterra IDE of the fifth order in cases where any non-zero solutions of the corresponding homogeneous linear DE of the second, third, fourth, fifth orders do not have the corresponding asymptotic properties. Consider the case of non-positive and zero coefficient of the first derivative of the unknown function for the IDE of second order; the second derivative of the unknown function for the IDE of third order; the third derivative of the unknown function for the IDE of fourth order; non-positive coefficient of the fourth derivative of the unknown function for the IDE of fifth order.