## МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

## КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

## КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

## ИМ. Ж. БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.15.513

## На правах рукописи

УДК 517.9.92.942

Темиров Бекжан Кайыпбекович

**«ОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО, ПЯТОГО И ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКОВ»**

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы

и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико–математических наук

Бишкек – 2015

Работа выполнена в Кыргызском Национальном Университете

## им. Ж. Баласагына

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,

профессор, заслуженный работник Высшей школы РК Сартабанов Ж.А.(г. Актобе, Казахстан)

доктор физико-математических наук,

профессор **АсановаА.Т.**(г.Алма-Ата,Казахстан).

доктор физико-математических наук,

профессор **Асанов А.** (г.Бишкек).

**Ведущая организация:** Институт прикладной математики при БГУ (г. Баку, Азербайджан).

Защита диссертации состоится «30» июня 2015 г. в 1400 часов на заседании диссертационного совета Д 01.15.513 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико–математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан “ 29 ” мая 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного

совета, д.ф.-м.н., с.н.с. Искандаров С.

**ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

**Актуальность темы.** Изучение разностных уравнений берёт начало от рубежа XVII – XVIII столетий и связано с работами Эйлера и Лагранжа, которые были посвящены исследованиям рекуррентных рядов и решениям некоторых задач из теории вероятностей. История развития теории уравнений в конечных разностях в XVIII и в первой половине XIX века изложена в [17]. Развитие экономики и автоматики привело к интенсивному использованию импульсных систем, которые описываются разностными уравнениями. Поэтому, становится актуальным, интересным и важным качественное исследование поведения решений разностных уравнений на колеблемость [1,9,10,11]. В настоящее время имеется обширная литература, посвященная разностным уравнениям, многочисленное применение их в различных областях математики и прикладной науке вызвал значительный интерес к теории уравнений в конечных разностях.

Разностные уравнения находят также применение в строительной механике [13], в экономике [14],экологии и биологии[1], в математической теории систем автоматического регулирования[3]. Исследованию многих задач математической физики конечно- разностными методами посвящены работы И.И. Боголюбова и Н.И. Крылова [12], где основное внимание уделено установлению оценок погрешностей решений при переходе от дифференциальных уравнений к разностным. С применением компьютеров (ЭВМ) были найдены способы вычислений приближенных решений различных задач математической физики[2]. Система с цифровыми вычислительными устройствами, входящая в импульсную систему основана на изучении осцилляционных свойств решений уравнений с конечными разностями. Методы дискретизации позволяют с помощью уравнений в конечных разностях проводить приближенные исследования дифференциальных уравнений, следовательно, и колебательных процессов, описываемых ими[4,5,6,7]. Этот метод обладает рядом достоинств, он применим к самым общим ситуациям, например, к уравнениям с переменными коэффициентами, к нелинейным уравнениям и даже к еще более сложным функциональным уравнениям. Как известно, при решении задач оптимизации непрерывных процессов на цифровых вычислительных машинах всегда имеют дело с разностными уравнениями.

В последние годы большое количество работ посвящено изучению поведения решений и, в частности, осцилляционных свойств решений как линейных, так и нелинейных разностных, интегро –разностных, интегро – дифференциально – разностных уравнений. Эти вопросы включают в себя выяснение признаков колеблемости любого решения. Интерес к этим задачам стимулируется все большей ролью, которую играют такие уравнения в построении математических моделей самых различных процессов, осуществляющихся в природе, технике и обществе (экология, теория автоматического регулирования, теория рынков).

При прогнозировании развития популяции требуется, в частности, выяснить условия неограниченности времени жизни популяции (существование неколеблющегося решения) или же, наоборот, - условия вымирания популяции при любом ее первоначальном состоянии (колеблемость всех решений).

Вопросы существования решений различных задач уравнений в частных разностях, существования периодических решений и условия устойчивости решений изучались в [15,16]. А в работе [101] при доказательстве существования разложения локально суммируемых функций в ряды по интегралам применены разности высших порядков.

В работе Я.В.Быкова [7], изучены осцилляционные свойства решений различных классов линейных, нелинейных, интегро-разностных и интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями первого порядка и здесь же приведен обзор литературы посвященный теориям разностных уравнений. А в работе Я.В.Быкова и Б.К.Темирова [8] установлены достаточные условия осциллируемости решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями второго, четвертого и произвольного *m*-четного порядков.

Вопрос осцилляции решений уравнений линейных, нелинейных, разностных, интегро-разностных, дифференциально-разностных и интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего, пятого и произвольного *m*-нечетного порядков с операторами Лапласа и с эллиптическим оператором ранее не изучался.

**Цель и задачи исследования.** Установить достаточные условия осцилляции решений различных классов: линейных, нелинейных, разностных, интегро-разностных, дифференциально-разностных и интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего, пятого и произвольного m-нечетного порядков с оператором Лапласа и с эллиптическим оператором.

**Методика исследования.** Применен метод перехода от интегро- разностного, дифференциально-разностного, и интегро-дифференциально – разностного уравнения с оператором Лапласа и эллиптическим оператором к разностным уравнениям и неравенствам, основанных на усреднении неизвестной функции по пространственным переменным и использованы результаты Я.В.Быкова., Г.Д.Мерзлякова., Е.И.Шевцова.

**Научная новизна работы.** Изучены осцилляцинные свойтва решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями третьего, пятого и произвольного *m*-нечетного порядков с операторами Лапласа и с эллиптическим оператором.

**Теоретическая и практическая ценность.** Результаты настоящей работы вносят вклад в качественную теорию разностных, интегро-разностных, дифференциально-разностных и интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями. Практически полученные результаты могут быть применены для приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью персональных компьютеров, а также при прогнозировании развития популяции.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

Установлены достаточные условия осциллируемости решений линейного, нелинейного разностного, интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка.

Установлены достаточные условия осциллируемости решений линейного, нелинейного, дифференциально-разностного, интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа и с эллиптическим оператором.

Установлены коэффициентные критерии осциллируемости решений линейного, нелинейного, разностного, интегро-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка.

Установлены достаточные условия осциллируемости решений линейного, нелинейного, дифференциально-разностного, интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с оператором Лапласа и с эллиптическим оператором.

Установлены достаточные условия осциллируемости решений линейного, нелинейного, разностного, интегро-разностного, дифференциально-разностного, интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с оператором Лапласа и с эллиптическим оператором.

Установлены коэффициентные критерии осциллируемости решений линейного, нелинейного, интегро-разностного уравнения с конечными разностями 𝒎 – произвольного нечетного порядков.

Установлены достаточные условия осциллируемости решений линейного, нелинейного, дифференциально-разностного, интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями 𝒎 – произвольного нечетного порядков с оператором Лапласа и с эллиптическим оператором.

**Связь работы с научно-исследовательскими проектами.**

Исследование проводилось в рамках утвержденной тематики «Качественная теория дифференциальных уравнений » кафедры дифференциальных уравнений КНУ им.Ж.Баласагына и носит фундаментальный характер с прикладным значением.

**Апробация работы.** Результаты исследований докладывались:

на международной научной конференции «Проблемы математики и информатики в XXI веке» (Бишкек, 2000г)

на научной конференции «Труды молодых ученых центра магистратуры, аспирантуры и национальных образовательных программ» (Бишкек, 2001г.)

на международной научной конференции, посвященной 70-летию академика М.И. Иманалиева. (Бишкек, 2001г.)

на научной конференции «Труды молодых ученых центра магистратуры, аспирантуры и национальных образовательных программ» Физ. и матем. Науки (Бишкек, 2004г.)

на «Труды молодых ученых центра магистратуры, аспирантуры и национальных образовательных программ» Физ. и матем. науки. (Бишкек, 2005г.)

на международной конференции «Программные системы: теория и приложения института программных систем РАН». ( г. Переславль-Залесский 2006 г)

на международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» Часть 2, посвященная 75-летию академика НАН КР М.И. Иманалиева. (Бишкек, 2006г.)

на международном симпозиуме «Обобщенные решения в задачах управления» (г.Улан-Удэ.2006.)

на научной конференции посвященной 15-летию Чуйского Университета. (Бишкек, 2006.)

на Международной научной конференция физика и физическое образование; достижения и перспективы развития (Бишкек, 2008г)

на Международной юбилейной научной конференции посвящённой к 15-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета: «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». (Бишкек, 2008г)

на международной научной конференции: «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике». (Бишкек 2010г.)

на республиканской научной конференции, посвящённой 80-летию академика Иманалиева М.И. ( Бишкек, 2011г.)

на 3-Международной научной конференции: «Физика и физическое образование: достижения и перспективы развития» посвященной 70-летию академика Жайнакова А.Ж. (Бишкек, 2011г.)

на республиканской научной конференции «Актуальные проблемы современной физики и технологии обучения» посвященной 80-летию проф. Карашева Ташмата. Бишкек, (Бишкек 2012г. )

на международной научной конференции посвященной 75-летию академика НАН РК Абильдина Мейрхана Мубараковича «Актуальные проблемы современной физики» (г. Алматы, 2013г)

на второй международной научной конференции посвященной 20-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета и 100-летию основателя математической школы в Кыргызстане проф. Быкова Я.В. «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений » ( Бишкек, 2013г.)

на V congress of the Turkic world mathematicians « Abstracts » (Bishkek.2014.)

# на международной научно-практической конференции «Информационные технологии: инновации в науке и образовании»

# ( г.Aktobe, 2015г.)

**Личный вклад соискателя.** Все результаты диссертации получены лично автором.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах :

1. Темиров Б.К Осцилляция решений разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка. Вестник КГНУ. Труды международной научной конференции «Проблемы математики и информатики в XXI веке» Серия 3, выпуск 4, 2000г.С.95-98
2. Темиров Б.К.,Дуйшеналиева У Осцилляция решений одного класса нелинейного дифференциально-разностного уравнения. Вестник КГНУ. «Труды молодых ученых центра магистратуры, аспирантуры и национальных образовательных программ»Физ. и мат. науки.

Выпуск 3, серия 5. Бишкек, 2001

1. Темиров Б.К. Осцилляция решений одного класса интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка. Вестник КГНУ. Труды международной научной конференции, посвященной 70-летию академика М.И. Иманалиева. Серия 3, выпуск 6, Бишкек, 2001
2. Темиров Б.К. Осцилляция решений дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего порядка с эллиптическим оператором. Исследования по интегро-дифференциальным

уравнениям Выпуск 3,серия 5.Бишкек,2002.С.190-195

1. Темиров Б.К., Ботолаева Г.К. Осцилляция решений дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа. Вестник КНУ. «Труды молодых ученых центра магистратуры, аспирантуры и национальных образовательных программ»Физ. и матем. науки. Выпуск 3, серия 5. Бишкек, 2004,С.19-23
2. Темиров Б.К., АманбаеваА.З. Осцилляция решений интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа. Вестник КНУ. «Труды молодых ученых центра магистратуры, аспирантуры и национальных образовательных программ»Физ. и матем. науки. Выпуск 3, серия 5. Бишкек, 2005,С.6-10
3. Темиров Б.К., Акулова Б.Т.Мырзалиева А.К. Осцилляция решений интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа. Посвящённой Всемирному году физики и 80 -летию профессора Л.В.Тузова. Вестник 2005 Серия 3,выпуск 3..С.285-290
4. Темиров Б.К. Осцилляция решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка. Труды международной конференции "Программные системы: теория и приложения" Институте программных систем РАН г.Переславль-Залесский октябрь 2006 г./Под ред. С.М.Абрамова в двух томах.-М.:физмат лит,2006.-Т.2.-408с.С.379-387
5. Темиров Б.К., Карабекова.С. Осцилляция решений нелинейного-дифференциально - интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка. Тезисы международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» Часть 2, посвященная 75-летию академика НАН КР М.И.Иманалиева, Вестник, Бишкек, 13-17 сентября 2006г.
6. Темиров Б.К. Осцилляция решений интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего порядка. Тезисы докладов международного симпозиума «Обобщенные решения в задачах управления» Улан-Удэ.5-7 июля, изд-во ВСГТУ,2006.С
7. Темиров Б.К., Баялиева С.С.,Акулова Б.Т.,Мырзалиева А.К. Осцилляция решений интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего порядка. Актуальные вопросы негосударственного сектора высшего образования Кыргызской Республики. Материалы научной конференции посвященной 15-летию Чуйского Университета. Бишкек 2006,176с.С139-145
8. Темиров Б.К., Баялиева С.С. Осцилляция решений нелинейного дифференциально -разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка. Известия Чуйского Университета Материалы научного конференции, посвященные пятнадцатилетию Чуйскому университету Бишкек. 2008, С400-405..
9. Темиров Б.К., Абакирова Г.Ж. Осцилляция решений одного класса интегро- дифференциально-разностного уравнения с оператором Лапласа. 2-Международная научная конференция физика и физическое образование; достижения и перспективы развития. КНУ.Вестник, Бишкек,18-20сентября 2008г,С.56
10. Темиров Б.К. Осцилляция решений дифференциально -разностных уравнений с конечными разностями пятогоо порядка с оператором Лапласа. Международная юбилейная научная конференция посвящённая 15-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета: Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений. Бишкек, С.196-201, 2008г
11. Темиров Б.К. Осцилляция решений одного класса разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Выпуск 41.,серия 5.Бишкек,С.104-110. 2009
12. Темиров Б.К. Осцилляция решений нелинейного дифференциально -разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с эллиптическим оператором. Вестник КНУ. Труды III международной научной конференции, асимтотические, топологические и компьютерные методы в математике 8-12 сентября Бишкек 2010г
13. Темиров Б.К Осцилляция решений нелинейного-дифференциально -разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с эллиптическим оператором. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Выпуск 42, Посвящается 60-летию академика Борубаева А.А. 2010г.Бишкек,С.138-143.
14. Темиров Б.К., Култаев Т.Ч. Осцилляция решений одного класса операторно-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка. Материалы Республиканской "научной конференции, посвящённая к 80-летию академика Иманалиева М.И. Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. Специальный выпуск. Серия 3.Естественно-технические науки., Бишкек. 2011г. С.224-228.
15. Темиров Б.К., Баратова Б.Ш. Осцилляция решений одного класса нелинейного операторно-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка. Материалы 3-Международной научной конференции физика и физическое образование: достижения и перспективы развития посвящённый 70-летию академика Жайнакова А.Ж. Вестник. КНУ им. Ж. Баласагына . Бишкек,19-25 августа 2011г.С76-81
16. Темиров Б.К. Осцилляция решений одного класса нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка. Материалы Республиканской научной конференции «Актуальные проблемы современной физики и технологии обучения» посвящённый 80-летию профессору Карашева Ташмата Вестник. КНУ им. Ж. Баласагына. Бишкек,2012г.С150-155.
17. Темиров Б.К. Осцилляция решений интегро- дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с нелинейным интегральным членом. Материалы международной научной конференции, посвященной 75-летию академика НАН РК Абильдина Мейрхана Мубараковича «Актуальные проблемы современной физики»г.Алматы,15-16 марта 2013г.С46
18. Темиров Б.К. Осцилляция решений интегро- дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с нелинейным интегральным членом. Материалы международной научной конференции, посвященной 75-летию академика НАН РК Абильдина Мейрхана Мубараковича «Актуальные проблемы современной физики»г.Алматы,15-16 марта 2013г.С42-45. Известия АН Республики Казахстан Серия физико-математическая 2(288)
19. Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями второго и высшего порядков (монография). Бишкек,2014г. С198
20. Темиров Б.К. Осцилляция решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с нелинейным интегральным членом. Вторая международная научная конференция посвященная 20-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета и 100-летию основателя математической школы в Кыргызстане проф.Быков Я.В. «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений » , тезисы докладов.Бишкек 2013г,С115
21. TemirovB.K. On oscillating solutions of nonlinear integral difference equation with the finite differences on m-arbitfary odd order. V congress of the Turkic world mathematicians « Abstracts »-Bishkek.2014,141p.
22. Темиров Б.К. Осцилляция решений нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями m-произвольного нечетного порядков с эллиптическим оператором. Известия АН Республики Казахстан №3 Серия физико-математическая.г.Алматы,2014г.С.11-16
23. Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями второго и высшего порядков (монография). Бишкек. 2014г. С.198
24. Темиров Б.К. Признак осцилляции решений линейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями

*m*-произвольного нечетного порядков. Известия АН Республики Казахстан №3 Серия физико-математическая.г.Алматы,2014г.С.11-16

1. Темиров Б.К., Ыкынов Р.Т.,Сапаров А.Б. Осцилляция решений линейного дифференциально-разностного уравнениями с конечными разностями -произвольного ν- нечетного порядка с оператором Лапласа. Материалы международной научно-практической конференции «информационные технологии: инновации в науке и образовании» Aktobe, 2015,С235-238.

**Полнота отражения результатов диссертации в публикациях**

Основные результаты диссертации опубликованы в монографии [102],

13 статьях [78], [80],[81], [85], [90]-[94], [97]-[99],

5 тезисах докладов [87], [90], [98], [100], [101],

11 совместных статьях [79], [82]- [84], [87]- [89], [95], [99] ,[102],

Соискателю принадлежит постановка задачи, а соавторам совместное исследование.

В приложении в качестве примера для иллюстрации теории разностных уравнений рассмотрено разностное уравнение с конечными разностями третьего порядка. Для получения численного решения построен блок схема программы которая составлена на языке Delphi и приведен листинг (описание) программы.

Номера глав обозначены одной цифрой, а части внутри главы обозначены двумя цифрами, где первая цифра означает номер главы, а вторая-номер данной части. Нумерация теорем, определений, лемм- тройная. Первая цифра указывает на номер главы, вторая на номер части, а третья цифра на номер соответствующей теоремы, формулы.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, семи глав состоящих из разделов, выводов, заключения, списка литературы из 120наименований и приложения. Работа содержит 142страницы.

**Краткое содержание работы**

Во введении дается актуальность темы., цели, задачи и методика исследования. Научная новизна работы. Теоретическая и практическая ценность. Основные положения, выносимые на защиту, личный вклад соискателя и список опубликованных работ. А также приводится краткое изложение содержания и описания основных результатов диссертационной работы.

В первой главе даются основные определения осцилляции решений, некоторые вспомогательные леммы, теоремы и примеры. Приводятся некоторые определения осцилляции решений данные различными авторами, которые сравниваются с этими определениями . В дальнейшем, будем исходить из ниже следующих определений, данные Я.В. Быковым [24].

В дальнейшем всюду символы означают: 1) - множество функций *,* определенных в области и исчезающих на границе , ; 2) (S)-множество функций *{U(n,x)}*, имеющих непрерывные частные производные всех порядков по

**Введем обозначения**: -открытая ограниченная область с кусочно-гладкой границей ;;

**Основные предположения:**

; ;

2) *;,* фиксирован

непрерывна по аргументу принадлежит множеству и имеет непрерывные частные производные всех порядков по

3) если все являются запаздывающими отклонениями, , если среди имеется опережающее отклонение.

Тогда в этом случае

Всюду предполагается, что рассматриваемые уравнения имеют правильные решения , непрерывные в области . это множество всех функций , - раз непрерывно дифференцируемых и обращающихся в нуль на вместе со своим производными до порядка включительно.

оператор Лапласа;

2) -эллиптический оператор.

Известно, что 1) все собственные значения краевой задачи

(1)

положительны; 2) наименьшему собственному значению λ0 соответствует единственная нормированная неотрицательная собственная функция ормированная в смысле имеет непрерывные частные производные второго порядка

Для конкретной заданной области приближенные значения и вычисляются вариационными методами.

а) Если область , }- параллелепипед, то

б) Если область *Q* - выпуклая, то гдерадиус наибольшого шаравписанного в область ,

диаметр области , -размерность области .

Из известной второй формулы Грина для оператора Лапласа вытекает следующее равенство.

где - единичная внешняя нормаль к поверхности . Очевидно, что Так как вектор направлен в сторону возрастания функции , то векторы антипараллельны. Поэтому

во всех точках гладкости поверхности .

**Следствие 1.** Если дважды непрерывно дифференцируемая функция , то , такое, что выполняется равенство

**Следствие 2**. Если 1) , и , то такое, что

Введем обозначения:

………………………………………………………………………………………

Очевидно, что

В дальнейшем всюду предполагается, что

1)

2) -непрерывная функция z>0;3)

**Лемма 1.** Пусть 2) -четное число; 3) -неубывающая функция z>0.Тогда неравенство

не имеет положительного решения.

**Примечания 1. I.** Если выполнены условия 2), 3) леммы, а условия 1) не выполняется, то неравенство может иметь положительное решение.

**Пример 1**. Пусть

Тогда неравенство (1.1.1) имеет положительное решение .

Очевидно, что

**II.** Если 1) выполнены условия 1), 3) леммы ; 2) нечетное число, то неравенство может иметь положительное решение.

**Пример 2**. Пусть 1)

При нечетном, функция является решением неравенства Очевидно, что

**Лемма 2.**Если непрерывная неубывающая функция - нечетное число, то для положительного решения неравенства имеет место равенство lim 0.

**Лемма 3.**  ;Тогда для положительного решения неравенства

имеет место равенство lim=

**Примечание 2.** Как при m-нечетном, так и при m-четном неравенство (7) может иметь положительное решение, удовлетворяющее условию: Lim

**Пример 3.** , , , неравенство (7) имеет решение , удовлетворяющее условию леммы 2

**Лемма 4.**Пустьнечетное число; непрерывная неубывающая функция; 4)положительное решение неравенства (7). Тогда: 1) либо ; 2) либо .

**Пример 4.** ; , Все условия леммы 4 выполнены. Неравенство (7) имеет решение

В главе два установлены достаточные условия осцилляции решений разностных, интегро- разностных уравнений с конечными разностями третьего порядка.

Для одного класса интегро-разностных уравнений с одной независимой переменной в работе Шейхзаманова Л.А. доказана теорема сравнения типа Штурма и установлена оценка сверху промежутка между двумя последовательными нулями решения. В отличие от этой работы в этой главе рассматривается многомерный случай для другого вида уравнения. Вопросы устойчивости решений интегро-разностного уравнения с двумя независимыми переменными изучались в работе Л.Х.Либермана. Осцилляционные свойства рассматриваемых ниже уравнений ранее не изучались.

В разделе 2.1. установлено коэффициентные критерии осцилляции решений разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка вида

Введем обозначения:

;;

;

;

.

Скажем, что выполнены условия: 1) , если, , ;если

, .

Говоря о решении интегро-конечно- разностного уравнения, всюду подразумевается нетривиальное решение, определенное в области  .  Предполагается, что такое решение существует.

**Лемма 5.** Если 1)выполнено условие ; 2) неравенство имеет положительное решение , , , то является неубывающей функцией.

**Лемма 6.** Если 1)выполнено условие;2) уравнение (8) имеет неосциллирующее решение то неравенство

имеет положительное решение

**Лемма 7.** Пусть 1) выполнено условие 2) , 3)

Тогда для положительного решения неравенства (10) имеет место

**Лемма 8.** Пусть 1) выполнено условие 2) , 3) . Выполнено неравенство

Тогда для положительного решения y() из неравенства (11) имеет место

**Теорема 1.** Пусть а) выполнены условия б) Тогда каждое решение уравнения (8) либо осциллирует, либо

**Теорема 2.** Пусть 1) выполнены условия 2) такое, что Тогда решение уравнения (8) либо осциллируют, либо

**Теорема 3.** Если 1) выполнены условия 2) 3) такое, что то решение уравнение (8) либо осциллирует, либо

**Лемма 9.** Пусть 1) выполнено условие 2) , , ; 3)

Тогда для положительного решения неравенства (12) имеет место равенство .

В разделе 2.2. рассмотрены линейные интегро-разные уравнения с конечными разностями третьего порядка. изучаются осцилляционные свойства решений.

Предполагается: 1) , функции натурального аргумента, значениями которых являются натуральные числа 2) ,непрерывные функции по аргументу каждого фиксированного натурального числа 3) определена при фиксированных и непрерывна по

Скажем, что выполнено условие:

1) Условие если , , *.*

**Лемма 10.** Пусть 1) 2) непрерывно убывающая функция Тогда для положительного решения неравенства

имеет место равенство .

**Лемма 11.** Пусть 1) 2)непрерывная убывающая функция Тогда, для положительного решения неравенство

имеет место равенство

**Пример 5.** При , , неравенство имеет решение удовлетворяющее условию

**Примечание 3.** Как и при конечной разности третьего порядка, так и при конечной разности четного порядка неравенство (15) может, имеет положительное решение, удовлетворяющее условию

**Теорема 4.** Если: 1)выполнены условия , ; 2). Тогда каждое решение уравнения (8) либо осциллирует, либо

**Теорема 5.** Пусть 1) выполнены условия , ; 2). Тогда каждое решение уравнения (8) либо осциллирует, либо .

В разделе 2.3. установлены достаточные условия осцилляции решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка вида:

Скажем, что выполнены: а) условие , если б) условие ,

если 1) выполнено условие; 2).

в) выполняются условие:

1) если ,

2) если ; , ;

Если выполняется условие то все теоремы осцилляции в разделе 2.2. переносятся на уравнение (16).

**Теорема 6.** Если 1)выполнены условия и2) Тогда каждое решение уравнения (16) либо осциллирует, либо .

**Теорема7.** Пусть 1) выполнены условия и2)3). Тогда каждое решение уравнения (16) либо осциллирует, либо

Интегро-разностные уравнения с конечными разностями третьего порядка с нелинейным интегральным членом рассмотрены в разделе 2.4

где возрастающая функция

Скажем, что выполнены условия :

1. Условия если , , , ,

*.*

1. Условие если , , когда , , на уравнение (17) переносятся все теоремы об осцилляциях в разделах 2.3.

**Лемма 12.** Если 1)выполнены условия , , 2) уравнение (17) имеет неосциллирующее решение то неравенство

имеет положительное решение.

**Теорема 8.** Пусть 1) выполнены условия, , 2) 3) Тогда все правильные решения уравнения (17) либо осциллируют, либо

**ВЫВОДЫ**

В главе 2 установлены достаточные условия осцилляция решений:

-линейного, нелинейного разностного, интегро -разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка.

- нелинейного интегро- разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с интегральным членом содержащегося в нелинейности.

В главе 3 изучены осцилляционные свойства решений дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего порядка.

А в разделе 3.1. установлены условия для осцилляции решений линейного дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа**.**

Введем обозначения: 1) функции натурального аргумента; 2) оператор Лапласа. Допустим, что выполнено условие если выполняются неравенство

; .

**Лемма 13.** Если выполнено: 1) условие 2) неравенство имеет положительное решение ,, то является неубывающей функцией.

**Лемма 14.** Если 1); 2) выполнено условие ; , то для положительного решения неравенства

имеет место равенство

**Лемма 15.** Если 1) выполнены условия , 2) уравнение (19) имеет не осциллирующее решение , то неравенство (20) имеет положительное решение

**Лемма 16.** Если 1) выполнено условия , 2) уравнения (19) имеет неосциллирующее решение 3) то неравенство (20) имеет положительное решение

**Теорема 9.** Пусть: 1)выполнены условия , 2) Тогда каждое правильное решение уравнения (19) либо осциллирует, либо .

**Теорема 10.** Пусть а) выполнены условия , б)в) Тогда все правильные решения уравнения (19) либо осциллируют, либо .

Нелинейные дифференциально-разностные уравнения с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа рассмотрены в разделе 3.2.

Скажем,что выполнено условие если выполняется неравенство

**Лемма 17.** Пусть 1) 2) непрерывно убывающая функция Тогда для положительного решения неравенства

имеет место равенство

**Лемма 18.** Пусть 1)2) - непрерывная убывающая функция Тогда для положительного решения неравенства

имеет место равенство

**Теорема 11.** Если 1) выполнены условия и 2).Тогда каждое решение уравнения (21) либо осциллирует, либо .

**Теорема 12.** Если 1) выполнены условияи ; 2) 3). Тогда каждое решение уравнения (21) либо осциллирует, либо

# В разделе 3.3 изучаются осцилляционные свойства решений линейного дифференциально-разностного уравнения,с конечными разностями третьего порядка с эллиптическим оператором вида:

# 

Где эллиптический оператор и предполагается, что а) для любого набора вещественных чисел

б) достаточно гладкие функции (достаточно предполагать, чтобы эти функции имели частные производные первого порядка, удовлетворяющие в замкнутой области некоторому условию Гельдера).

Скажем, что выполнены условия , если

**Теорема 13.** Пусть а) выполнены условия 2) Тогда каждое правильное решение уравнения (24) либо осциллирует, либо

**Теорема 14.** Пусть а) выполнены условия б)) в) .Тогда все правильные решения уравнения (3.3.1) либо осциллируют, либо .

**ВЫВОДЫ**

В этой главе установлены достаточные условия осцилляции решений линейных, нелинейных дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа и линейных, нелинейных дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего порядка с эллиптическим оператором.

В главе 4 изучены осцилляционные свойства решений интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего порядка. Установлены достаточные условия осциллируемости решений линейного интегро-дифференциально- разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа и рассмотрены в разделе 4.1

Скажем, что выполнено условие если ,если

выполняются неравенства

**Лемма 19.** Если 1)выполнены условия 2) уравнение (4.1.1) имеет неосциллирующее решение то неравенство

имеет положительное решение .

**Лемма 20.** Если а) выполнено условие 2) уравнение (25) имеет неосциллирующее решение 3) то неравенство (26) имеет положительное решение

**Теорема 15.** Пусть 1) выполнены условия 2) Тогда все правильные решения уравнения (4.1.1) либо осциллируют, либо

**Теорема 16.** Пусть: а) выполняются условия б) в) Тогда все правильные решения уравнения (25) осциллируют, либо

В разделе 4.2. рассмотрено линейное интегро-дифференциально - разностное уравнение с конечными разностями третьего порядка с эллиптическим операторомвида:

**Теорема 17.** Если: а) выполнены условия б) то каждое решение 1) уравнения либо осциллирует, либо 2) уравнения либо осциллирует, либо .

**Теорема 18.** Пусть 1) выполнены условия 2) 3) Тогда каждое правильное решение: а) уравнения (27) - либо с – осциллирует, либо

б) уравнения (28) - либо осциллирует, либо

В разделе 4.3. найдены условия осциллируемости решений нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа при выполнении которых все правильные решения будут осциллирующими или .

Скажем, что выполнено условие если выполняются ; 2) и выполнены условия:

а) условие , если , ;

б) условие , если , , ;

в) условие , если ; , , .

**Лемма 21.** Если 1) ; 2) непрерывно неубывающая функция , то для положительного решения неравенства

имеет место равенство .

**Теорема 20.** Если 1) выполнены условия , , ; 2) . Тогда каждое решение уравнения (29) либо осциллирует, либо .

**Теорема 21.** Если 1) выполнены условия , , ; 2) ; 3) . Тогда каждое правильное решение уравнения (4.3.1) либо осциллируется, либо .

**ВЫВОДЫ**

В главе 4 используя метод перехода от интегро-дифференциально – разностного уравнения к разностным уравнениям и неравенствам, основанных на усреднении неизвестной функции по пространственным переменным. Установлены достаточные условия осцилляции решений:

- линейного, нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа.

-линейного, нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с эллиптическим оператором.

Осцилляция решений интегро-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка рассмотрена в главе 5. В части 5.1 построены условия осцилляции решений разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка вида:

(31)

Где

=

**Лемма 22.**Пусть 1) выполнено условие ( 2) неравенство имеет положительное решение , .Тогда является неубывающей функцией.

**Лемма 23.** Пусть 1) выполнено условие (2) h(n),,3) неравенства

тогда для положительного решения неравенства (32) имеет место равенство

**Лемма 24.** Пусть 1) выполнены условия ( (2) 3) неравенства

тогда для положительного решения неравенств имеет место равенство

**Теорема 22.** Пусть выполнены условия ( ( 2).Тогда каждое решение уравнения (31) либо осциллирует, либо

Раздел 5.2 посвящен установлению достаточных условий осцилляции решений интегро-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка вида:

Предполагается, что выполнены условия:

1. Условие если , то

, ,

1. Условие если , , ;

3) Условие если , .

*.*

Далее 1) если

2) , если хотя бы одно из отклонений аргумента является опережающим.

**Лемма 25.** Пусть 1) выполнено условие ; 2)3),неравенства

тогда для положительного решения неравенства(35) имеет место равенство

**Теорема 23.** Пусть а) выполнены условия б) .Тогда каждое решение уравнения (34) либо осциллирует, либо

**Теорема 24.** Пусть 1) выполнены условия 2) такое, что . Тогда каждое правильное решение уравнения (34) либо осциллирует, либо .

**Лемма 26.** Пусть 1) выполнено условие ; 2); 3) ,неравенства

тогда для положительного решения неравенства (36) имеет место равенство.

**Теорема 25.** Если а) выполнены условия б), то каждое решение уравнения либо осциллирует, либо

В разделе 5.3.изучаются осцилляционные свойства решений нелинейного интегро-разностного уравнения вида

**Лемма 27.** Пусть 1) ; 2) непрерывно убывающая функция.Тогда для положительного решения неравенства

имеет место равенство.

**Лемма 28.** Пусть: 1) 2) непрерывно убывающая функция. Тогда для положительного решения *y*(*n*)= уравнения

и неравенства

(40)

имеет место равенство .

**Теорема 26.** Если 1) выполнены условия,,; 2). Тогда каждое решение уравнения (39) либо осциллирует, либо.

**Теорема 27.** Если 1) выполнены условия ,,; 2). Тогда каждое решение уравнения (39) либо осциллирует, либо .

**Теорема 28.** Пусть 1) выполнены условия ,,; 2); 3) . Тогда каждое решение уравнения (39) либо осциллирует, либо

В разделе 5.4. устанавливаются достаточные условия осцилляции решений интегро-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с нелинейным интегральным членом вида:

Скажем, что выполнены: а) условие , если выполнено условие ,

;

б) условие , если 1) выполнено условие; 2) ;

в) условие , если 1) 2) ;

**Лемма 29.** Если 1) выполнены условия ; 2) уравнение (41) имеет не осциллирующее решение , то неравенство

имеет положительное решение .

**Лемма 30.** Если 1) , 2) *f* (*z*)>0 - непрерывная неубывающая функция , то для положительного решения неравенства (42) имеет место равенство.

**Теорема 29.** Пусть 1) выполнены условия ;2) 3) . Тогда все правильные решения уравнения (41) либо осциллируют, либо .

**ВЫВОДЫ**

В главе 5 установлены достаточные условия осцилляций решений:

-линейного разностного , интегро -разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка.

- влияние нелинейного члена на осцилляции решений интегро-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка.

- нелинейного интегро- разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с интегральным членом содержащегося в нелинейности.

Осциллируемости решений интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями пятого порядка рассмотрены в главе 6.

В разделе 6.1 установлено достаточное решение осциллируемости решений интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с оператором Лапласа вида:

# Скажем, что выполнены: 1) условие ,если , , .

**Теорема 30.** Пусть 1) выполнены условия 2) . Тогда каждое решение уравнения (43) либо осциллирует, либо

**Теорема 31** Пусть а) выполняются условия б) ; в) Тогда все правильные решения уравнения (43) либо осциллируют, либо .

В разделе 6.2. установлено условие осцилляции решений интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с эллиптическим оператором вида:

Скажем, что выполнено условие: если 1) , условие;2),, ,

**Теорема 32.** Пусть 1) выполнены условия 2) Тогда каждое решениеуравнение уравнения (44) либо осциллирует, либо .

**Теорема 33.** Пусть а) выполняются условия б) в). Тогда все правильные решения уравнения (44) либо осциллируют, либо .

Осцилляция решений нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с оператором Лапласа рассмотрена в разделе 6.3.

(45)

Скажем, что выполнено: 1) условие если выполняются неравенства ,

**Теорема 34.** Если 1) выполнены условия , ,;2)

Тогда каждое решение уравнения (45) либо осциллирует, либо

**Теорема 35.** Пусть 1) выполняется условия, ,; 2) 3) огда все решения уравнения (45) либо осциллируют либо.

**Теорема 36.** Пусть: 1) выполнены условия , ,; 2) 3)

Тогда каждое решение уравнения (45) либо осциллирует, либо.

В разделе 6.3. рассмотрена осцилляция решений нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с эллиптическим оператором вида:

Скажем, что выполнено: 1) условие если выполняется неравенство ,

**Теорема 37.** Если 1) выполнены условия , ,;

2). Тогда каждое решение уравнения (46) либо осциллирует, либо

**Теорема 38.**  Пусть 1) выполняются условия , , ; 2) 3) Тогда все решения уравнения (46) либо осциллируют, либо .

**Теорема 39.** Пусть 1) выполнены условия , ,; 2) ; 3) . Тогда каждое решение уравнения (46) либо осциллирует, либо.

**Теорема 40.**  Пусть 1) выполняются условия , , ; 2) 3) где4) Тогда все решения уравнения (46) либо осциллируют, либо .

Раздел 6.5.посвящен осцилляции решений интегро- дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с оператором Лапласа и с нелинейным интегральным членом вида:

Скажем, что выполнено: 1) условие , если выполняются неравенство , ,,

,

**Теорема 41.** Если а) выполнены условия, ,; 2) , то каждое решение уравнения либо осциллирует, либо .

**Теоремa 42.** Если 1) выполнены условия , и ; 2) ; 3). Тогда каждое решение уравнения (47) либо осциллирует, либо .

**Теорема 43.**  Пусть 1) выполнены условия, , ; 2);3) - неубывающая функция. Тогда каждое решение уравнения (47) либо осциллирует, либо .

В разделе 6.6. изучены осцилляционные свойства решений интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями пятого порядка, с эллиптическим оператором и с нелинейным интегральным членом вида:

3) .

**Теорема 44.**  Пусть 1) выполнены условия , ,; 2) . Тогда каждое решение уравнения либо осциллирует, либо.

**Пример 6.** 1) ; 2) ; 3) Тогда решение уравнения (49) и

**Теорема 45.** Пусть 1) выполнены условия , ,; 2) 3) . Тогда каждое решение уравнения (49) либо осциллирует, либо.

**ВЫВОДЫ**

В главе 6 установлены достаточные условия осцилляций решений:

-интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с оператором Лапласа.

-интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с эллиптическим оператором.

- влияние на осцилляции решений нелинейного члена интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с оператором Лапласа

-влияние на осцилляции решений нелинейного члена интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с эллиптическим оператором

-интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с оператором Лапласа с нелинейным интегральным членом и его влияние на осцилляции .

-интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с эллиптическим оператором, когда уравнение содержит в нелинейности интегрального члена.

В главе 7 изучены признаки осцилляций решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями произвольного - нечетного порядков,

исследованы поведения решений на осцилляции линейных и нелинейных интегро-разностных уравнений, которые содержат в себе различные операторы: Лапласа, эллиптический.

В разделе 7.1. даны вспомогательные предложения, определения и понятия

.

Скажем, что выполнено условие , если, ,

Пусть – заданные функции.

Введем следующие обозначения:

, .

Очевидно, что

.

В дальнейшем всюду будем предполагать, что

1) 2) непрерывная функция

**Лемма 31.** Если 1) 2) - непрерывная неубывающая функция 3) m – нечетное число, то для положительного решения неравенства (7.1.1) имеет место равенство

**Лемма 32.**  Пусть 1) 2) нечетное число; 3) - неубывающая функция Тогда для положительного решения неравенство

имеет место равенство .

Рассмотрено в разделе 7.2.влияние интегрального члена на осцилляции решений линейного интегро – разностного уравнения вида:

где произвольно фиксированное нечетное число.

Вопрос осцилляции решений при случаи где и произвольно фиксированное четное число изучен в работах БыковаЯ.В.и ТемироваБ.К.. В этом разделе будем рассматривать вопрос осцилляции решений интегро-разностного уравнения когда произвольное фиксированное нечетное число, при.

Скажем, что выполнено условие , если

**Теорема 46.** Пусть 1) выполнено условие ;

1. ; 3) нечетное число. Тогда все решения уравнения (7.2.1) либо осциллируют, либо

**Примечания 4.** Если выполнены условия теоремы (46), то уравнение (51) может иметь неосциллирующее решение.

**Пример 7.** Пусть 1) 2) Тогда решение уравнения (51).

**Примечания 5.** Если 1) выполнено условие: a) непрерывная неубывающая функция б) 2) нечетное число > 1; 3) то уравнение(51) может иметь неосциллирующее решение , для которого

**Пример 8.**  2) Тогда решение уравнения (51) и

Рассмотрим уравнение вида

с учетом условия и предполагая, что .

Если , то является решением уравнения (52), как при четном, так и при нечетном.

Если четное число, то уравнение (52) имеет решение

**Теорема 47.** Если 1) выполнено условие ;

1. 3) нечетное число, то каждое решение уравнения (52) либо осциллирует, либо

**Примечание 5.** Если 1) выполнено условия 1), 3) теоремы 7.2.2.; 2) не выполнено условия 2), то уравнение (52) может иметь неосциллирующее решение *y*(*n*), не удовлетворяющее равенству

**Пример 9.** Пусть 1) 2) Тогда уравнение (52) имеет решение Очевидно, что .

**Теорема 48.** Пусть 1) выполнено условие ;

1. 3) нечетное число, тогда все решения уравнения (52) либо осциллируют, либо

Нелинейное интегро-разностное уравнение рассмотрено в разделе 7.3.

Рассмотрим уравнение вида

где четное произвольно заданное число.

Скажем, что выполнены условия если , ; если

*,*.

**Теорема 49.** Если 1) выполнены условия 2) 3)нечетное число. 4) , то все правильные решения уравнения (53) либо осциллируют, либо .

**Теорема 50.** Пусть 1) выполнены условия 2) непрерывная возрастающая выпуклая функция на ; 3) . Тогда все правильные решения либо осциллируются, либо .

В разделе 7.4 рассмотрено нелинейное интегро-разностное уравнение с нелинейным интегральным членом, где установлено его влияние на осцилляции решений.

где 1) нечетное число;

Когда на уравнение, (541) переносятся все теоремы осцилляции решений пункта 7.2.

Будем говорить, что выполнены: 1) условие , если , , то , .

2) условие если выполнены , , , .

3)условие , если а) выполнено условие ; б) ,*,*

.

4) условие , если

а) ; б) .

**Теорема 51.** Если выполнены условия , , ,; 2) ; 3) нечетное число; 4) . Тогда все правильные решения уравнения (54) либо осциллируют, либо .

**Теорема 52.** Пусть выполнены: 1) условия , , ,;2) , ; 3) возраствющая функция ; 4) нечетное число; 5) . Тогда все правильные решения уравнения (54) либо осциллирует, либо .

В разделе 7.5 рассмотрено линейное дифференциально-разностное уравнение с конечными разностями -нечетного порядка с оператором Лапласа вида:

Скажем, что выполнено условие , если

**Теорема 53.** Если 1) выполнено условие 2) ; 3)нечетное число, то все решения уравнения (55) либо осциллируют, либо .

**Теорема 54.** Если а) выполнены все условия теоремы 53; б) ., то все правильные уравнения 55 либо осциллируют, либо .

Линейное интегро-дифференциально - разностное уравнение с конечными разностями -нечетного порядка с оператором Лапласа рассмотрено в разделе7.6.Рассмотрим уравнения вида

Скажем, что выполнены условия , если 1) выполнено условие; 2),

**Теорема 55.** Пусть 1) выполнено условие ; 2)3) нечетное число Тогда все решения уравнения (56) либо осциллирует, либо .

**Теорема 56.**  Пусть 1) выполнены все условия теоремы 55; 2) . Тогда все правильные решения уравнения (56) либо осциллируют, либо.

В разделе 7.7 рассмотрено нелинейное интегро-дифференциально - разностное уравнение с конечными разностями -нечетного порядка с оператором Лапласа. Рассмотрим уравнение вида:

где нечетное произвольно заданное число.

Изучено влияние на осцилляции решений нелинейного члена.

Скажем, что выполнены условия:

и .

, , ;

и

,

**Пример**, удовлетворяющий условиям и :

отношение двух нечетных чисел.

**Теорема 57.** Пусть 1) выполнено условие,; 3) нечетное число. Тогда каждое правильное решение уравнения (57) либо осциллирует, либо.

**Теорема 58.** Если а) выполнены все условия теоремы 57; б) , то все правильные решенияуравнения (57) либо осциллируют, либо.

**Теорема 59.** Пусть 1) выполнены условия ,2),; 3) ; 4) нечетное число. Тогда каждое решение уравнения (57) либо осциллирует, либо .

**Теорема 60.** Если а) выполнены все условия теоремы 59; б) ,то все решения уравнения (57) либо осциллируют, либо .

**Теорема 61.** Пусть 1) выполнены условия ;; 2) возрастающая непрерывная выпуклая нафункция; 3) 4) нечетное число. Тогда каждое решение уравнения (57) либо осциллирует, либо .

Глава 7.8. посвящена изучению осцилляцинных свойств линейного дифференциально- разностного уравнения с конечными разностями - нечетного порядка с эллиптическим оператором.

где произвольное нечетное число.

Скажем, что выполнено условие , если .

**Теорема 63.** Пусть 1) выполнено условие 2) 3) -нечетное число. Тогда все решения уравнения (58) либо осциллируют, либо.

**Теорема 64.** Если 1) выполнены все условия теоремы 63; 2), то все решения уравнения (58) либо осциллируют, либо .

В разделе 7.9 установлены достаточные условия осцилляции решений линейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями **-**нечетного порядка с эллиптическими оператором

где 1) произвольное нечетное число; 2) -эллиптический оператор; , на уравнение (59) переносятся все теоремы с- осцилляций решений части 7.8.

Скажем, что выполнены условие , если 1)

;2); 3) .

**Теорема 65.** Пусть 1) выполнено условие , 2)Тогда каждое правильное решение уравнения (59) либо осциллирует, либо

**Теорема 66.** Пусть 1) выполнены все условия теоремы 65; 2),тогда все решения уравнения (59) либо с- осциллирует, либо.

Нелинейное интегро-дифференциально- разностное уравнение с конечными разностями произвольного -нечетного порядка с эллиптическим оператором рассмотрено в разделе 7.10.

В этом разделе изучаются на осцилляции решений следующего уравнения:

где 1) произвольное нечетное число; 2) -эллиптический оператор; 3) и, .В этом случае на уравнение (7.10) переносятся все теоремы осцилляций решений из разделов 7.8 и 7.9.

**Теорема 68.** Пусть 1) выполнены условия ,; 2) Тогда каждое решение уравнения (60) либо с –осциллирует, либо

**Теорема 69.** Пусть 1) выполнены условия и ; 2) 3) . Тогда каждое решение уравнения (60) либо с-осциллирует, либо

**Теорема 70.** Пусть а) выполнены все условия теоремы 69; 2).Тогда, все решения уравнения (60) либо с-осциллируют, либо .

**Теорема 71.** Пусть 1) выполнены условия ; 2) – возрастающая непрерывная выпуклая на функция; 3) Тогда каждое решение уравнения (60) либо с-осциллирует, либо .

**Теорема 72.** Если а) выполнены все условия теоремы 71; б) , то все решения уравнения (60) либоосциллируют, либо .

**ВЫВОДЫ**

В главе 7 установлены достаточные условия осцилляций решений:

-линейного, нелинейного интегро - разностного уравнения с конечными разностями произвольного нечетного порядка

- линейного, нелинейного дифференциально - разностного уравнения с конечными разностями произвольного нечетного порядка

- линейного, нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями произвольного нечетного порядка с оператором Лапласа.

- линейного, нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями произвольного нечетного порядка с эллиптическим оператором.

# **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В диссертации:

исследованы осцилляционные свойства решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями произвольных нечетных порядков. Применен метод перехода от интегро- разностного, дифференциально-разностного, и интегро-дифференциально – разностного уравнения с оператором Лапласа и с эллиптическим оператором к разностным уравнениям и неравенствам, основанных на усреднении неизвестной функции по пространственным переменным.

установлены достаточные условия осцилляции решений линейных, нелинейных: разностных, интегро-разностных, дифференциально-разностных и интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего, порядков с оператором Лапласа и с эллиптическим оператором.

установлены достаточные условия осцилляции решений линейных, нелинейных: разностных, интегро-разностных, дифференциально-разностных и интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями, пятого порядков с оператором Лапласа и с эллиптическим оператором.

установлены достаточные условия осцилляции решений линейных, нелинейных: интегро-разностных, дифференциально-разностных и интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями произвольного m-нечетного порядков с оператором Лапласа и с эллиптическим оператором.

Для подтверждения теоретических результатов, а также отдельных условий приведен ряд примеров. В качестве иллюстрации рассмотрено разностное уравнение третьего порядка, для которого составлена программа на языке Delphi (листинг приведен в приложении) и получено численное решение.

**РЕЗЮМЕ**

Темиров Бекжан Кайыпбекович

«Учунчу, бешинчи жана каалагандай так тартиптеги оператордук-айырмалуу тендемелердин чечимдеринин термелуусу»-деген темадагы 01.01.02-дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу деген адистик боюнча физика-математикалык илимдердин доктору окумуштуулук даражасын алуу үчүн диссертация сунушталган

**Урунттуу сөздөр:** Айырмалуу, дифференциалдык- айырмалуу жана интегралдык- дифференциалдык- айырмалуу тендемелер, Лаплас оператору, эллиптикалык оператор, интегралдык оператор, термелуу.

Эллиптикалык операторлуу, Лаплас операторлуу учунчу тартиптеги чектелген айырмалуу ,айырмалуу, интегро-айырмалуу, дифференциалдык-айырмалуу жана интегро- дифференциалдык-айырмалуу сызыктуу,сызуктуу эмес тендемелердин чечимдеринин термелуусунун жетиштуу шарттары тургузулган.

Эллиптикалык операторлуу, Лаплас операторлуу бешинчи тартиптеги чектелген айырмалуу ,айырмалуу, интегро-айырмалуу, дифференциалдык-айырмалуу жана интегро- дифференциалдык-айырмалуу сызыктуу,сызуктуу эмес тендемелердин чечимдеринин термелуусунун жетиштуу шарттары тургузулган.

Эллиптикалык операторлуу, Лаплас операторлуу каалагандай так m- тартиптеги чектелген айырмалуу, айырмалуу, интегро-айырмалуу, дифференциалдык-айырмалуу жана интегро- дифференциалдык-айырмалуу сызыктуу, сызуктуу эмес тендемелердин чечимдеринин термелуусунун жетиштуу шарттары тургузулган.

**РЕЗЮМЕ**

Темиров Бекжан Кайыпбекович

Диссертация «Осцилляция решений операторно-разностных уравнений третьего, пятого и произвольного нечетного порядков» представлена на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

**Ключевые слова**: Разностное, дифференциально-разностное и интегро-дифференциально-разностное уравнение, оператор Лапласа, эллиптический оператор, интегральный оператор, осцилляция.

Установлены достаточные условия осцилляции решений линейных, нелинейных: разностных, интегро-разностных, дифференциально-разностных и интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями третьего порядков с оператором Лапласа и с эллиптическим оператором.

Установлены достаточные условия осцилляции решений линейных, нелинейных: разностных, интегро-разностных, дифференциально-разностных и интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями пятого порядков с оператором Лапласа и с эллиптическим оператором.

Установлены достаточные условия осцилляции решений линейных, нелинейных: интегро-разностных, дифференциально-разностных и интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями произвольного m-нечетного порядков с оператором Лапласа и с эллиптическим оператором.

**ABSTRACT**

Temirov Bekjan

Dissertation of "Oscillation of solutions of third, fifth and arbitrary odd order operator-difference equations" presented for the Doctor of Sciences degree in mathematics and physics, specialty 01.01.02 - Differential Equations, Dynamical Systems, and Optimal Control

**Keywords:** difference, differential-integral-difference and differential-difference equation, Laplace operator, elliptic operator, integral operator, oscillation.

Sufficient conditions are establishedfor the oscillation of solutions of linear, non-linear: differential, integral-difference, difference-differential and integral-differential-difference equations with third order finite differences with the Laplace and elliptic operators.

Sufficient conditions are establishedfor the oscillation of solutions of linear, non-linear: differential, integral-difference, difference-differential and integral-differential-difference equations with fifth order finite differences with the Laplace and elliptic operators.

Sufficient conditions are establishedfor the oscillation of solutions of linear, non-linear: integral-difference, difference-differential and integral-differential-difference equations with m - arbitrary odd order finite differences with the Laplace and elliptic operators.