

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01.15.513

На правах рукописи
УДК 515.122, 515.123

БОЛЖИЕВ БУРАС АСАНБЕКОВИЧ

**О СВОЙСТВАХ ТИПА КОМПАКТНОСТИ И СЕКВЕНЦИАЛЬНОСТИ
ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ**

01.01.04- геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Бишкек – 2016

Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики.

Научный консультант: Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН КР Борубаев Алтай Асылканович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Кочинас Любиша

доктор физико-математических наук, профессор Садовничий Юрий Викторович

доктор физико-математических наук, профессор Асанов Авыт

Ведущая организация: Ташкентский педагогический университет имени Низами, Узбекистан, г. Ташкент, 100064, ул. Юсуфа Ходжиба, 103.

Защита диссертации состоится « **28** » **июня 2016 г. в 14⁰⁰ часов** на заседании Диссертационного совета Д.01.15.513 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан « _____ » _____ 2016г.

**Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., профессор**

Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Обычное классическое понятие предела послужило основой для возникновения понятия метрического пространства, затем пространств с 1-ой аксиомой счетности, пространств Фреше-Урысона и в более общей форме в виде понятия секвенциального пространства. Дальнейшее развитие секвенциальные пространства, чья топология определяется сходящимися последовательностями, получила в виде сходимости по произвольному набору ультрафильтров на счетном множестве. Так А.П.Комбаровым были определены понятия сильно (слабо) P -секвенциальные пространства и пространства соответствующего им типа компактности: сильно (слабо) P -компактные пространства. Он опирался на введенные А.Бернштейном понятия p -предела и p -компактности. Эта же идея приводит к понятиям типа секвенциальности и типа компактности, что является своего рода квалификацией топологических пространств. В.Сакс распространил понятие p -предельной точки со счетного случая на любой кардинал и изучил свойства p -компактности для любого бесконечного кардинала. Он показал, что любое топологическое пространство характеризуется своими p -пределами в том смысле, что для любого $A \subset X$, $\overline{A} = A \cup \{x \in X : x \text{ является } p\text{-пределом некоторой } \lambda\text{-последовательности } (x_\alpha : \alpha \in \lambda)\}$ для некоторого $\lambda \leq \tau = |X|$ и некоторого ультрафильтра $p \in \beta\lambda \setminus \lambda$. Как видно из этого результата, рассматривая пределы по различным комбинациям ультрафильтров на произвольных кардиналах мы можем описать любую топологию. Язык ультрафильтров, таким образом, представляется универсальным языком для изучения топологических пространств.

Всякий вид компактности или типа компактности, предела естественным образом связаны с понятиями тоже типа полноты, а в каких-то случаях и обычной полноты равномерного пространства. Всё это подчеркивает актуальность исследуемой тематики.

Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими работами.

Диссертационная работа выполнена в рамках проекта «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, топологических и аналитических методов в теории устойчивости динамических систем, разрешимости обратных задач, экономических и геофизических процессов» ИТиПМ НАН КР (2015-2017), № гос. регистрации 0007125. Полученные результаты включены в годовой отчет по проекту.

Цель и задачи исследования.

- охарактеризовать свойства пространств, обладающих тем или иным свойством типа секвенциальности
- охарактеризовать свойства пространств, обладающих тем или иным свойством типа компактности
- установить какими свойствами обладают пространства обладающие «родственными» типами секвенциальности и компактности в различных классах пространств, скажем, отличающихся, например, аксиомами отделимости.

- установить в какой связи такие свойства связаны со свойствами типа полноты в равномерных пространствах и топологических группах
- выявить какие свойства наследуются при «хороших» отображениях.

Научная новизна работы.

Получены новые результаты, разработан подход к построению расширений топологических пространств, обладающих соответствующим типом компактности и секвенциальности, причём охарактеризованы широта существования таких расширений. Показаны некоторые особенности таких объектов при изменении одной из форм аксиом отделимости, введены новые классы равномерных пространств и определены их характеристики, установлены связи между полнотой равномерного пространства и свойствами типа компактности.

Основные методы исследования обусловлена целями и задачами исследования. В диссертационной работе используются методы вложений и расширений топологических пространств, метод равномерных покрытий.

Теоретическая значимость и практическая ценность.

Данная работа имеет теоретическую направленность. С помощью предложенных методов, определений будет возможно выявлять новые свойства, характеристики топологических и равномерных пространств.

Результаты данной диссертационной работы могут быть использованы в теоретических исследованиях, при составлении новых, а также продолжаемых специальных курсов по теории топологических, равномерных пространств, при чтении лекций в курсах по общей топологии, топологической алгебры и функциональном анализе. .

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Предложены методы построения p -секвенциальных пространств, а также их расширений, обладающих свойствами типа компактности и секвенциальности.
2. Показано, что в классе хаусдорфовых пространств, в отличие от регулярного случая, произведение двух p -компактных p -секвенциальных пространств не всегда является p -секвенциальным.
3. Разработан метод, позволяющий показать для любого бесконечного кардинала τ неэквивалентность в классе хаусдорфовых пространств понятий τ -ультракомпактности и τ -ограниченности. Причём этот метод даёт пример, обладающим дополнительным свойством τ -плотности.
4. Построен компакт Франклина для всякого ультрафильтра p на ω являющегося P -точкой на ω^* , чей индекс p -секвенциальности равен 2.
5. Построен фильтр \mathcal{F} на ω такой, что любое хаусдорфово секвенциальное пространство является \mathcal{F} -Фреше-Урысона.
6. Доказано, что любое компактное пространство Франклина является p -Фреше-Урысона для произвольной $p \in \omega^*$, не являющегося P -точкой.
7. Найдены достаточные условия, обеспечивающие условие того, чтобы данное пространство не могло быть вложено ни в какое регулярное p -секвенциальное пространство.
8. Установлена связь между свойством типа компактности топологического пространства и некоторым свойством типа полноты равномерного пространства.

9. Введен и изучен новый класс секвенциальных по некоторому множеству ультрафильтров пространств и установлена их взаимосвязь с некоторыми классами топологических пространств.

Апробация работы.

Результаты исследований докладывались на республиканских и международных конференциях:

- на семинаре КНУ им. Ж. Баласагына по равномерной топологии под руководством академика А.А.Борубаева и профессора А.А.Чекеева;
- Международная научная конференция «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященная 70-летию академика М. Иманалиева, Бишкек - с. Бостери, сентябрь 2001;

- IV Congress of the Turkic world mathematical society. 1-3 July 2011. Baku, Azerbaijan.

Международная научная конференция «Функциональный анализ и его приложения» посвящённая 70-летию академика М. Отельбаева, Казахстан, Астана, 2-5 октября 2012 г.

- 1-st International Eurasian conference on mathematical sciences and applications. IECMSA-2012, September 03-07, 2012. Prishtine/Kosovo
- V Congress of the Turkic world mathematicians. Kyrgyzstan, s.Bulan-Sogottuu, 5-7 June, 2014.

• International Conference on Topology and its Applications, July 3-7, 2014, Nafpaktos, Greece.

- 10th Latvian Mathematical Conference and 2nd International Conference on High Performance Computing and Mathematical modelling, April 10-12, 2014, Latvia.

- Международная конференция (Александровские чтения), Москва, 22-25 мая, 2016.

- Семинар Института математики и Информатики Латвийского Университета (периодический).

Публикации. По теме диссертации опубликовано работ: 18 статей – в зарубежных рецензируемых изданиях и сборниках, входящих в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий, выпускаемых в Кыргызской Республике, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»; 3 статьи в научных журналах, отмеченных Scopus, 5 статей в научных журналах, отмеченных РИНЦ. В статье [1] результаты получены совместно, в статьях [11-13] и [15] результаты получены совместно, в совместной работе [17] постановка задач, формулировки определений, гипотез принадлежат второму автору, а доказательства принадлежат первому.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, выводов, списка использованных источников. Нумерация разделов тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая - на номер раздела, третья - на порядковый номер в разделе.

Краткое содержание работы

Используются следующие обозначение.

Если X - топологическое пространство, то \bar{A} или $[A]_X$ - замыкание множества A в X , а $\langle A \rangle$ - или $\text{Int}A$ - внутренность множества A в X .

Если α - семейство подмножеств X , то $\cup \alpha = \{A : A \in \alpha\}$ объединение ($\cap \alpha = \cap \{A : A \in \alpha\}$ - пересечение) всех элементов α .

Если $\alpha = \{A_i : i \in I\}$ тогда $\cup \alpha = \cup \{A_i : i \in I\} = \cup_{i \in I} A_i$ ($\cap \alpha = \cap \{A_i : i \in I\} = \cap_{i \in I} A_i$).

Символы $1_X : X \rightarrow X$; $i_X : X \rightarrow X$ обозначают тождественное отображение, т.е. $1_X(x) = x$, $i_X(x) = x$ для любого $x \in X$.

Множество $P(X)$ является множеством всех подмножеств множества X .

Символами τ, α, μ будем обозначать бесконечные кардиналы, которые ассоциируются с начальными порядковыми числами.

Символом $\beta(\tau)$ - будем обозначать стоун-чеховское расширение дискретного пространства мощности τ , а посредством $\tau^* = \beta(\tau) \setminus \tau$ будем обозначать его стоун-чеховский нарост.

В частности, $\beta(\omega)$ - это стоун-чеховское расширение счётного дискретного пространства ω и $\omega^* = \beta(\omega) \setminus \omega$ - его нарост.

Во **введении** приводятся необходимые сведения и обзор результатов, среди них имеются следующие:

Построены p -компактные p -секвенциальные расширения произвольного p -секвенциального тихоновского пространства.

Показано, что в классе хаусдорфовых пространств, в отличие от регулярного случая, произведение двух p -компактных p -секвенциальных пространств не всегда является p -секвенциальными.

Для произвольного бесконечного кардинала мощности τ найдётся хаусдорфово τ -ультракомпактное не τ -ограниченное пространство плотности τ .

Для всякого ультрафильтра p на ω являющейся P -точкой на ω^* найдется компакт Франклина, чей индекс p -секвенциальности равен 2.

Существует фильтр \mathcal{F} на ω такой что любое хаусдорфово секвенциальное пространство является \mathcal{F} -Фреше-Урысона.

Любое компактное пространство Франклина является p -Фреше-Урысона для произвольной $p \in \omega^*$, не являющегося P -точкой.

Пусть регулярное пространство (X, δ) обладает регулярным p -ком-пактным расширением (Y, σ) -таким, что некоторая точка $x_0 \in X$ неизолированная в X , не является p -точкой в (Y, σ) . Тогда пространство (X, δ) не вкладывается ни в какое регулярное p -секвенциальное пространство.

В **первой главе** приведены необходимые сведения и определения, обзор литературы по теме диссертации и обзор известных результатов.

Во **второй главе** изучаются расширения секвенциальных по некоторому множеству ультрафильтров.

В первом параграфе этой главы изучаются два способа построения топологических пространств, а именно строятся две топологии на каждом топологическом пространстве : одна образована всеми p -секвенциально открытыми множествами и другая топология порождается дополнениями до p -компактных подмножеств, где p -является произвольным свободным ультрафильтром на множестве произвольной бесконечной мощности τ . Дж.Дэбс предложил рассматривать топологию, порождённую дополнениями до p -компактных подмножеств при $p \in \beta\omega \setminus \omega$. Хотя всё это легко распространить и на более общий случай: $p \in \beta\tau \setminus \tau$.

Основным понятием является понятие p -предела, впервые определенное Бернштейном. Напомним определение p -предела в том виде, в котором его обобщил В.Сакс. Пусть $p \in \beta\tau \setminus \tau$ и $(x_\alpha : \alpha < \tau)$ является τ -последовательностью в топологическом пространстве (X, σ) , тогда, следуя В.Саксу, назовём точку $x \in X$ p -предельной точкой τ -последовательности $(x_\alpha : \alpha < \tau)$, обозначаемое как $x = p\text{-}\lim x_\alpha$, если для любой окрестности W точки x выполняется $\{\alpha : x_\alpha \in W\} \in p$. Мы также можем говорить в таком случае, что τ -последовательность $(x_\alpha : \alpha < \tau)$ p -сходится к точке x или обладает p -предельной точкой x .

Для каждого $A \subset X$ определим следующее множество $p(A) = A \cup \{x \in X : \text{что для некоторой } \tau\text{-последовательности } (x_\alpha : \alpha < \tau) \subset A \text{ выполнено: } x = p\text{-}\lim x_\alpha\}$.

Напомним, что топологическое пространство (X, σ) называется p -секвенциальным, если $p(A) = [A]$ для любого $A \subset X$.

Можно определить p -секвенциальность следующим эквивалентным способом: топологическое пространство (X, σ) называется p -секвенциальным, если для любого незамкнутого $A \subset X$ найдутся точка $x \notin A$ и некоторая τ -последовательность $(x_\alpha : \alpha < \tau) \subset A$, такие что $x = p\text{-}\lim x_\alpha$.

Сакс называет топологическое пространство (X, σ) p -компактным, если каждая τ -последовательность $(x_\alpha : \alpha < \tau)$ обладает p -предельной точкой.

Им же было доказано, что каждое компактное пространство является p -компактным и что класс p -компактных пространств является мультипликативным и наследуется по замкнутым подмножествам.

По аналогии с секвенциальными пространствами, где определяется понятие секвенциально открытого подмножества, мы определяем p -секвенциально открытое множество следующим образом. Подмножество $O \subset X$ в топологическом пространстве (X, σ) называется p -секвенциально открытым, если из того, что $x \in O$ и $x = p\text{-}\lim x_\alpha$ для некоторой τ -последовательности $(x_\alpha : \alpha < \tau)$ следует, что $\{\alpha : x_\alpha \in O\} \in p$. Совокупность всех p -секвенциально открытых множеств в топологическом пространстве (X, σ) образует топологию и обозначается как (X, σ_p) .

Рассматривая в произвольном топологическом пространстве (X, σ) совокупность всех p -компактных подмножеств], но только для счётного случая, мы получим, что эти множества вместе с X и \emptyset удовлетворяют всем аксиомам топологического пространства для замкнутых множеств. Таким образом, дополнения до p -компактных подмножеств вместе с X и \emptyset образуют некоторую

топологию на X . Обозначим эту топологию символом $p(\sigma)$. Таким образом, подмножество O открыто в $(X, p(\sigma))$, если и только если только $X \setminus O$ является p -компактным в (X, σ) .

Устанавливаются взаимосвязи между этими тремя топологиями.

Теорема 2.1.1. В произвольном топологическом пространстве (X, σ) выполнено: $\sigma \subset \sigma_p$ и $p(\sigma) \subset \sigma_p$.

Теорема 2.1.2. В p -компактном пространстве (X, σ) справедливы следующие соотношения:

- 1) $p(\sigma) \supset \sigma$
- 2) $p(\sigma) = \sigma$ тогда и только тогда, когда (X, σ) p -секвенциально.

Следствие 2.1.4. В p -компактном p -секвенциальном пространстве (X, σ) $p(\sigma) = \sigma = \sigma_p$.

Следствие 2.1.5. В p -компактном не p -секвенциальном пространстве (X, σ) $\sigma \subset p(\sigma)$, $p(\sigma) \neq \sigma$ и $p(\sigma) = \sigma_p$.

Теорема 2.1.3. Не существует хаусдорфова не p -компактного пространства (X, σ) , в котором выполнялось бы условие: $\sigma \subset p(\sigma)$.

В следующей параграфе изучаются свойство p -замкнутости, которое стало развитием идей М. Ismail, Р. Nyikos, развитое ими для секвенциальных пространств. Ими было определено понятие C -замкнутости и это понятие перенесено на случай p -секвенциальных пространств.

Определение 2.2.1. Топологическое пространство (X, T) назовём p -замкнутым, если всякое его p -компактное подмножество является замкнутым множеством.

Естественным образом возникает вопрос: насколько широк класс p -замкнутых пространств?

Известно, что все секвенциальные и, в частности, все пространства с 1-ой аксиомой счетности являются p -секвенциальными пространствами. В нашем случае получается следующая теорема.

Теорема 2.2.1. *Всякое хаусдорфово p -секвенциальное пространство является p -замкнутым пространством.*

Свойство пространства быть p -замкнутым является наследственным свойством, как показывает Следствие 2.2.2.

Следствие 2.2.2. *Всякое подмножество p -замкнутого пространства является p -замкнутым пространством.*

Далее рассматриваются свойства подпространств p -секвенциальных пространств. Такие подпространства будем называть p -подсеквенциальными пространствами. Очевидно, что свойство пространства быть p -подсеквенциальным пространством является наследственным свойством.

Одно из свойств p -подсеквенциальных пространств установлено в следующей теореме.

Теорема 2.2.3. *Произведение двух p -подсеквенциальных пространств может и не быть p -подсеквенциальным пространством.*

Легко видеть, что непрерывный образ p -подсеквенциального пространства может и не быть p -подсеквенциальным пространством.

Тем более интересен следующий результат

Теорема 2.2.4. *Факторный образ p -подсеквенциального пространства является p -подсеквенциальным пространством.*

Отметим ещё несколько свойств таких пространств.

Предложение 2.2.9. *Если в пространстве X со счётной теснотой каждое его счётное подпространство является p -подсеквенциальным пространством, то и само X является p -подсеквенциальным пространством.*

В следующем параграфе рассматриваются расширения p -секвенциальных пространств. Одним из важных секвенциальных пространств принадлежит А.П. Комбаров]. Он определяет различные виды P -секвенциальности, а именно, сильно (слабо) P -секвенциальные пространства, где P -произвольный набор ультрафильтров, определенных на счётном множестве. Позже понятия сильно (слабо) P -секвенциальных пространств и радиального пространства позволили Л.Кочинасу ввести и изучить sP -(псевдо)-радиальные, wP -(псевдо)-радиальные, vwP -(псевдо)-радиальные, а также пространства соответствующего им типа компактности, точнее говоря, sP -компактные и wP -компактные пространства, где $P \subset \beta\tau \setminus \tau$ для любого дискретного пространства мощности τ . В данном параграфе мы будем рассматривать случай $P = \{p\}$, т.е. случай, когда P состоит только из одного ультрафильтра, скажем, p на τ и естественно считать, что элементы ультрафильтра p могут иметь мощность, меньшую чем τ .

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема..

Теорема 2.3.1. Пространство (X, σ_p) является p -секвенциальным для любого топологического пространства (X, σ) .

Одной из главных проблем в теории секвенциальных пространств является задача, поставленная А.В.Архангельским: «Дать внутреннюю характеристику подпространств секвенциальных пространств». Как известно, данная проблема до сих пор считается нерешенной и естественно, что предпринимаются различные шаги, приближающие нас к решению этой задачи. Среди многообразия результатов, методик, полученных и разработанных в этом направлении, особое место занимают пространства, которые не допускают расширений с данными свойствами, и в нашем случае, это пространства, которые не вкладываются ни в какое секвенциальное пространство, т.е. не являющиеся подсеквенциальными пространствами. В данном параграфе найдены достаточные условия при которых класс пространств, обладающих определенными свойствами не вкладываются в пространства с данными свойствами и эти условия в случае секвенциальных пространств в качестве следствия дают теорему Анискович, утверждающую, что специальный класс пространств не является подсеквенциальным.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 3.4.1. Пусть регулярное пространство (X, τ) обладает регулярным $\mathcal{P}h$ -компактным расширением (Y, σ) таким, что некоторая точка $x_0 \in X$, неизолированная в (X, τ) , не является $\mathcal{P}h$ -точкой в (Y, σ) . Тогда пространство (X, τ) не является подпространством никакого регулярного сильно $\mathcal{P}h$ -секвенциального пространства.

Из этой теоремы следуют следующие следствия.

Следствие 2.4.2.(Анискович) Пусть регулярное пространство (X, τ) обладает регулярным счетнокомпактным расширением (Y, σ) таким, что некоторая точка $x_0 \in X$ неизолированная в X , не является k -точкой в (Y, σ) . Тогда пространство (X, τ) не вкладывается ни в какое регулярное секвенциальное пространство.

Следствие 2.4.3. Пусть регулярное пространство (X, δ) обладает регулярным P -компактным расширением (Y, σ) -таким, что некоторая точка $x_0 \in X$ неизолированная в X , не является P -точкой в (Y, σ) . Тогда пространство (X, δ) не вкладывается ни в какое регулярное P -секвенциальное пространство.

В первом параграфе следующей третьей главы рассматриваются свойства пространства быть секвенциальным и быть \mathcal{F} -Фреше-Урысона.

Пусть \mathcal{F} является фильтром на Ω .

Определение 3.1.1. Топологическое пространство X называется \mathcal{F} -Фреше-Урысона, если каждая предельная точка произвольного подмножества $A \subset X$ является \mathcal{F} -предельной точкой.

Определение 3.1.2. Назовем топологическое пространство X \mathcal{F} -секвенциальным, если незамкнутость множества $A \subset X$ эквивалентна существованию \mathcal{F} -предельной точки подмножества A лежащий во множестве $X \setminus A$. Это понятие принадлежит А.П.Комбарову.

В случае, когда \mathcal{F} являются ультрафильтром p , понятие p -Фреше-Урысона изучалось И. Савченко.

Теорема 3.1.1. Существует фильтр \mathcal{F} на Ω такой что любое хаусдорфово секвенциальное пространство является \mathcal{F} -Фреше-Урысона.

В предположении [СН] построен были построены следующие примеры 3.1.1: для всякого ультрафильтра p на Ω являющейся P -точкой на ω^* найдется компакт Франклина, чей индекс p -секвенциальности равен 2 и пример 3.1.2. [СН]. Существует секвенциально компактное пространство, являющееся p -Фреше-Урысона пространством для любого $p \in \omega^*$, причем p не является P точкой.

Теорема 3.1.2. Любое компактное пространство Франклина является p -Фреше-Урысона для произвольной $p \in \omega^*$, не являющегося P -точкой.

Поведении p -секвенциальности при операции произведения раскрывается во втором параграфе этой главы.

Как известно, произведение счётного числа регулярных p -компактных p -секвенциальных пространств снова является p -компактным p -секвенциальным пространством для произвольного ультрафильтра p , определенного на счётном множестве. Им был получен результат из которого следует, что произведение конечного числа регулярных p -компактных p секвенциальных пространств является p -компактным p -секвенциальным пространством тоже для произвольного ультрафильтра p , но уже определенного на произвольном бесконечном множестве. Здесь приводится пример p компактного p -секвенциального пространства, квадрат которого не p -секвенциален, а также строится пространство, являющееся одновременно sP -(псевдо)-радиальным, ωP -(псевдо)-радиальным, $\nu\omega P$ -(псевдо)-радиальным пространством, квадрат которого

не обладает ни одним из перечисленных свойств, где $P \subset \beta\tau \setminus \tau$ для любого дискретного пространства мощности τ .

В следующем параграфе даются ответы на два вопроса В.Сакса : первый вопрос-существует ли хаусдорфово сепарабельное ультракомпактное некомпактное пространство? И второй вопрос: существует ли кардинал $\tau > \aleph_0$ и хаусдорфово τ -ультракомпактное пространство, не являющееся τ -ограниченным? Ответ на оба вопроса положителен и хотя ответ на первый вопрос был получен автором ранее, полученный результат даёт положительный ответ сразу на оба вопроса, причём ответ получен в более сильной форме [11]:

Определение 3.3.1. Топологическое пространство (X, σ) называется τ -ультракомпактным, если оно является P -компактным для любого $P \in \beta\tau \setminus \tau$

Определение 3.3.2. Топологическое пространство (X, σ) называется τ -ограниченным, если замыкание любого подмножества мощности не больше τ является компактом.

В случае, когда $\tau = \aleph_0$ τ -ультракомпактность совпадает с ультракомпактностью и τ -ограниченность совпадает с ограниченностью.

Эти два вопроса возникли в связи с тем, что в классе регулярных пространств оба эти понятия совпадают для любого кардинала τ .

В топологическом пространстве (X, γ) , как мы говорили ранее, совокупность всех p -секвенциально открытых множеств (т.е. p -лидер пространства) образуют p -секвенциальное пространство (X, γ_τ) . Пусть $\gamma_\tau = \bigcap \{\gamma_p : p \in \beta\tau \setminus \tau\}$, т.е. γ_τ является пересечением всех p -секвенциальных лидеров γ_p в (X, γ) .

Теорема 3.3.1. Теснота топологического пространства (X, γ_τ) не больше, чем τ .

Теорема 3.3.2. В произвольном топологическом пространстве (X, γ) $t(X, \gamma) \leq \tau$, если и только если $\gamma = \gamma_\tau$

Лемма 3.3.1. Пусть (X, γ) является хаусдорфовым топологическим пространством плотности τ и тесноты большей, чем τ . Тогда (X, γ_τ) является τ -ультракомпактным пространством плотности τ и не являющееся τ -ограниченным.

Теорема 3.3.3. Для произвольного бесконечного кардинала мощности τ найдётся хаусдорфово τ -ультракомпактное не τ -ограниченное пространство плотности τ .

Теорема 3.3.4. Понятия τ -ультракомпактности и τ -ограниченности не совпадают в классе хаусдорфовых пространств.

В следующих двух параграфах рассматриваются свойства P -секвенциально непрерывных отображений и образы стандартных P -секвенциальных пространств при бифакторных и счетнобифакторных отображениях стандартных p -секвенциальных пространств..

Под стандартными p -секвенциальными пространствами подразумеваются пространства вида $\bigoplus \{\xi_\gamma(p), \gamma \in A\}$, где A произвольное множество индексов, значок \bigoplus означает взятие свободной топологической суммы и $\gamma: \xi(p) \rightarrow \xi_\gamma(p)$ - гомеоморфизм, причем $\gamma(n) = n_\gamma$ и $\gamma(p) = p_\gamma$.

Определение 3.5.3. Топологическое пространство (X, τ) назовем p -бисеквенциальным, если он является счетно бифакторным образом некоторого стандартного p -секвенциального пространства.

Определением 3.5.4. Топологическое пространство (X, τ) называется счетно p -секвенциальным, если он является счетно бифакторным образом некоторого стандартного p -секвенциального пространства.

В следующих двух теоремах охарактеризованы счетно p -бисеквенциальные и p -бисеквенциальные пространства.

Теорема 3.5.1. Топологическое пространство (Y, σ) будет p -бисеквенциальным тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y$ и любого фильтра F такого, что $y \in [B]$ для любого $B \in F$ следует существование такой последовательности $\{y_n : n \in \omega\}$, что для произвольных $B \in F$ и $W \in p$ выполнено $\{y_n : n \in \omega\} \cap B \neq \emptyset$.

Теорема 3.5.2. Топологическое пространство (Y, σ) будет счетно бисеквенциальным тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y$ и произвольного фильтра со счетной базой F такого, что $y \in [B]$ для всех $B \in F$ найдется p -сходящаяся последовательность $\{y_n, n \in \omega\}$ к точке y , что для любых $B \in F$ и $W \in p$ выполняется $\{y_n, n \in \omega\} \cap B \neq \emptyset$.

Следующая глава изучает свойства типа компактности и типа полноты в тихоновских пространствах и устанавливается связь между такими пространствами.

Для произвольного множества M топологического пространства (X, τ) положим $M_1 = \{x, x = p\text{-}\lim x_\xi \text{ для любого } p \in P \text{ и для некоторой последовательности } x_\xi : \xi \in t \subset M\}$. Положим $M_2 = (M_1)_1$. Этот процесс можно стандартным образом продолжить и определить M_α для любого $\alpha \in m^+$, а именно: пусть M_γ определены для любого $\gamma < \alpha_0$, где $\alpha_0 = \alpha + 1$, тогда пусть $M_{\alpha_0} = (M_\alpha)_1$, если же α_0 - предельный ординал, то положим $M_{\alpha_0} = \bigcup \{M_\gamma, \gamma < \alpha_0\}$. Очевидно, этот процесс стабилизируется при $\alpha = m^+$, т.е. $M_\gamma \subset M_{m^+}$ для любого γ . Множество M_{m^+} будем обозначать через M_s .

Подмножество $H \subset X$ назовем P - s -секвенциально плотным, если $H_s = X$.

Определение 4.1.1. Подмножество $O \subset X$ называется P - s -секвенциально открытым, если из того, что $x = p\text{-}\lim x_\xi$ для любого $p \in P$ и $x \in O$ следует, что $\xi : x_\xi \in t \in p$ для всех $p \in P$.

Пусть (X, U) - отделимое равномерное пространство. Последовательность $\xi : x_\xi \in t$ в (X, U) называется P - s -последовательностью Коши, если для любого покрытия $\alpha \in U$ существует множество $V \in \alpha$ такое, что $\xi : x_\xi \in V \in p$ для любого $p \in P$.

Определение 4.1.2. Равномерное пространство (X, U) называется $P-s$ -полным, если любая $P-s$ последовательность Коши $P-s$ -сходится.

Предложение 4.1.4. Если $P-s$ -последовательность Коши p_0 — имеет предельную точку x для некоторого $p_0 \in P$, то $x = p\text{-}\lim x_\xi$ для любого $p \in P$.

Следующая теорема определяет необходимые и достаточные условия для существования продолжения $P-s$ -секвенциально непрерывного отображения.

Теорема 4.1.1. Пусть $H - P-s$ -секвенциально плотное подмножество пространства (X, U) и $(Y, V) - P-s$ -секвенциально полное равномерное пространство. Для того чтобы $P-s$ -секвенциально непрерывное отображение $f : H \rightarrow (Y, \tau_V)$ $P-s$ -секвенциально непрерывно продолжалось на все X необходимо и достаточно, чтобы для любого $\beta \in V$ существовало $P-s$ -секвенциально открытое покрытие α пространства (X, τ) такое, что $\alpha \wedge \{H\}$ было вписано в покрытие $f^{-1}(\beta) = \{f^{-1}(B) : B \in \beta\}$.

М. Хушеком были определены секвенциальные равномерные пространства. Во втором параграфе мы распространяем его идею на случай произвольного ультрафильтра и определяем P -секвенциальные равномерные пространства.

Будем говорить, что семейство отображений $\{f_i : (X_i, U_i) \rightarrow (X, U), i \in I\}$ индуктивно порождает равномерное пространство (X, U) или равномерность, если равномерность U является наисильнейшей равномерностью среди всех равномерностей, превращающих отображение U в равномерно непрерывное отображение для всякого $i \in I$.

Рассмотрим дизъюнктное объединение двух экземпляров множества. Это множество будем считать равным множеству $\tau \times \{0, 1\}$. Определим равномерность на множестве $\tau \times \{0, 1\}$ следующим образом: база равномерности определяется покрытиями следующего вида $\{\{z\}, z \in \tau \times \{0, 1\}\} \cup \{((n, 0)(n, 1)) : n \in W\}$ для $W \in P$.

Если даны две τ -последовательности $(x_\alpha, \alpha < \tau)$ и $(y_\alpha, \alpha < \tau)$ в равномерном пространстве (X, U) , то определено естественным образом отображение f из $\tau \times \{0, 1\}$ в X по следующему правилу: $f(\alpha, 0) = x_\alpha$ и $f(\alpha, 1) = y_\alpha$. Это отображение мы будем называть каноническим по отношению к последовательностям $(x_\alpha, \alpha < \tau)$ и $(y_\alpha, \alpha < \tau)$. В дальнейшем отображение f будем называть каноническим, если будет ясно из контекста о каких последовательностях идет речь.

Определение 4.2.1. τ -последовательности $(x_\alpha, \alpha < \tau)$ и $(y_\alpha, \alpha < \tau)$ в равномерном пространстве (X, U) называются P -сцепленными, если соответствующее им каноническое отображение из равномерного пространства $\tau \times \{0, 1\}$ в (X, U) является равномерно непрерывным.

Всюду равномерность на множестве $\tau \times \{0, 1\}$ считается заданной по только что определенному выше правилу.

Пусть $\{f_\alpha, \alpha \in \Phi\}$ является множеством всех канонических равномерно непрерывных отображений в равномерное пространство (X, U) . Введем следующее Определение.

Определение 4.2.2. Равномерное пространство (X, U) называется p -секвенциальным равномерным пространством, если равномерность U индуктивно порождена семейством $\{f_\alpha, \alpha \in \Phi\}$.

Предложение 4.2.1. Для всякого равномерного пространства (X, U) равномерное пространство (X, U_p) является наименьшим p -секвенциальным равномерным пространством, содержащим равномерность U .

Следствие 4.2.1. Равномерное пространство (X, U) является p -секвенциальным равномерным пространством тогда и только тогда, когда $U = U_p$.

Следующая теорема устанавливает критерий p -секвенциальности равномерного пространства.

Теорема 4.2.1. Равномерное пространство (X, U) является p -секвенциальным равномерным пространством тогда и только тогда, когда любое p -секвенциально равномерно непрерывное отображение $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$ в произвольное равномерное пространство (Y, V) является равномерно непрерывным.

Теорема 4.2.2. Пусть топологическое пространство (X, σ) является p -секвенциальным (в топологическом смысле). Тогда равномерное пространство (X, U) с универсальной равномерностью U является p -секвенциальным равномерным пространством.

Предложение 4.2.2. Всякое метризуемое равномерное пространство является p -секвенциальным равномерным пространством.

Оказывается свойство равномерного пространства быть p -секвенциальным равномерным пространством является счетно мультипликативным, как говорит

Теорема 4.2.3. Счетное произведение p -секвенциальных равномерных пространств является p -секвенциальным равномерным пространством

В следующем параграфе устанавливается связь между свойством типа полноты и типа компактности.

Савченко обобщила Комбаровское понятие компактности по множеству ультрафильтров на произвольные кардиналы. Вот её

Определение 4.3.5. Пусть $\emptyset \neq P \subset \tau^*$ и X является пространством. Тогда X называется *квази P -компактным*, если любая τ -последовательность $(x_\alpha)_{\alpha < \tau}$ обладает p -предельной точкой для некоторого $p \in P$.

Теорема 4.3.1. Пусть P замкнуто в τ^* . Тогда пространство (X, δ) является квази P -компактным если и только если (X, U) является sP -секвенциально полным в любой равномерности U , совместной с δ .

А.П. Комбаров показал, что слабая w^* -компактность эквивалентна счетной компактности, которая в свою очередь эквивалентна w^* -компактности или квази w^* -

компактности. Ясно, что sw^* -последовательность Коши совпадает с обычной последовательностью Коши и мы получим следующее

Следствие 4.3.2. Топологическое пространство (X, δ) является счетно компактным тогда и только тогда, когда оно является секвенциально полным в любой равномерности, совместной с δ .

Следствие 4.3.3. Топологическое пространство (X, δ) является p -компактным если и только если оно p -секвенциально полно в любой равномерности, совместной с δ .

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту академику Алтаю Асылкановичу Борубаеву за постановку задач, за оказанную помощь и ценные советы при выполнении работы.

Основные содержание диссертации опубликованных в следующих работах:

1. Boljiev, B.A. The sequentiality is equivalent to the F-Frechet-Urysohn property [Text] / B.A. Boljiev, V.I. Malykhin // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 1990. – Vol. 31, No. 1. – P.23-25. (Scopus).
2. Boljiev, B.A. On product of p -sequential spaces [Text] / B.A. Boljiev //Topology and its Applications. – 2016. – Vol. 201, 15 March. – P. 309-313. (Scopus)
3. Boljiev, B.A. The Non-Equivalence of τ -Ultracompactness and τ -Boundedness [Text] / B.A. Boljiev // Filomat. – 2015. – Vol. 29, № 1. – P. 155–157.(Scopus)
4. Болжиев, Б.А. О топологиях, порожденных p -компактными подмножествами [Текст] / Б.А. Болжиев // European science. – 2016. – № 2 (12). – С. 6-11.
5. Болжиев, Б.А. О некоторых свойствах p -секвенциальных пространств [Текст] / Б.А. Болжиев // Вестн. науки и образования. – 2016. – № 3(15) С. 12-16.
6. Болжиев, Б.А. О пополнениях по ультрафильтрам [Текст] / Б.А. Болжиев // Вестн. науки и образования. – 2016. – № 3(15). – С. 9-12.
7. Болжиев, Б.А. О продолжении отображений, определяемых некоторым семейством ультрафильтров [Текст] / Б.А. Болжиев // Наука, техника и образования. – 2016, № 3 (21). – С. 29-35.
8. Болжиев, Б.А. О некоторых свойствах P -секвенциально непрерывных отображениях [Текст] / Б.А. Болжиев // Наука, техника и образования. – 2016. – № 3 (21). – С. 22-29.
9. Boljiev, B.A. On generalization of Sak's problem [Text] / B.A. Boljiev //Докл. АН СССР. – 2014. – № 1. – С. 13-15.
10. Болжиев, Б.А. Ультракомпактные и \aleph_0 -ограниченные пространства [Текст]

/ Б.А. Болжиев // Вестн. Кырг. гос. пед. ун-та им. Арабаева. – 1998. – № 1. – С. 15-22.

11. Болжиев, Б.А. О секвенциально непрерывных отображениях [Текст] /Б.А. Болжиев, Т.Дж. Касимова // Вестн. Кырг. гос. нац. ун-та. Сер. 3. – 2000. – Вып. 4: Материалы Междунар. науч. конф. «Проблемы математики и информатики в XXI веке». – С. 26-31.
12. Болжиев, Б.А. Секвенциальность и компактность топологических пространств [Текст]: тр. Междунар. науч. конф., посвящ. 70-летию акад. М.И. Иманалиева "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике" / Б.А. Болжиев, Т.Дж. Касимова // Вестн. Кырг. гос. нац. ун-та. – 2001. – С. 26-31.
13. Болжиев, Б.А. Об обобщении секвенциальной непрерывности и продолжении отображений [Текст] / Б.А. Болжиев, Т.Дж. Касимова // Вестн. Кырг. гос. нац. ун-та. Сер. 3: Естественно-техн. науки, мат. науки. – 2001. – Вып. 5. – С. 180-184.
14. Boljiev, B.A. On generating p -sequential spaces [Text] / B.A. Boljiev // Proceedings of V congress of the TWMS. – 2014. – P. 17-20.
15. Boljiev, B.A. On closedness and sequentiality with respect to some to some ultrafilter [Text] / B.A. Boljiev, G.O. Namazova // Proceedings of V congress of the TWMS. – 2014. – P.17-20.
16. Болжиев, Б.А. Ординальный инвариант p -секвенциальных пространств [Текст] / Б.А. Болжиев // Исследование по топологии и геометрии: сб. науч. тр. – Бишкек, 1991. – С. 11-16.
17. Borubaev, A.A. On τ -sequential spaces. 1st international Eurasian conference on mathematical sciences and applications [Text] / A.A. Borubaev, B.A. Boljiev // Proceedings book. – 2012. – 3-4 September. – P. 220-221. Prishtine Kosovo.
18. Boljiev, B.A. On τ -ultracompact and τ -bounded spaces. 1st international Eurasian conference on mathematical sciences and applications [Text] /B.A. Boljiev // Proceedings book. – 2012. –3-4 September. – P. 220-221. Kosovo.Prishtine Повтор № 25.

РЕЗЮМЕ

Болжиев Бурас Аснбекович

“Топологиялык жана бир калыптуу мейкиндиктердин компактуулук жана секвенциалдуулук типтеринин касиеттери” темасы боюнча, 01.01.04–геометрия жана топология адистиги боюнча физика-математикалык илимдеринин доктору окумуштуулук даражасын алуу үчүн сунушталган

Урунттуу сөздөр: күчтүү (күчсүз) P –компактуу мейкиндиктер, p – пределдик жана p –компактуулук, τ –ультракомпактуулук, τ –чектелгендик.

Изилдөөнүн объектиси: топологиялык жана бир калыптуу мейкиндиктердеги ультрафильтрлердин айрым көптүктөрү боюнча секвенциалдуулугу жана компактуулугу.

Иштин максаттары:

-секвенциалдуулук типтеги тигил же бул касиеттерге ээ болгон мейкиндиктерди мүнөздөө;

-компактуулук типтеги тигил же бул касиеттерге ээ болгон мейкиндиктерди мүнөздөө;

-түрдүү класстагы мейкиндиктердин, мисалы айтсак бөлүүнүчүлүк аксиомасынан айырмаланган, секвенциалдуулук жана компактуулук типтеринин “жакындык” касиеттерине ээ болгон мейкиндиктер кандай касиеттерге ээ болорун табуу;

-мындай касиеттер бир калыптуу мейкиндиктердеги жана топологиялык группалардагы толуктуулук типтеринин касиеттери менен кандай байланышта экендигин табуу.

Изилдөөнүн ыкмалары: диссертациялык иште топологиялык мейкиндиктердин ичине жайгаштыруу жана кеңейтүү ыкмалары, бир калыптуу жабдуулар ыкмалары колдонулган.

Илимий жетишкендиктери: жаңы жыйынтыктар алынган: компактуулуктун жана секвенциалдуулуктун тиешелүүлүк типтерине ээ болгон топологиялык мейкиндиктердин кеңейүүлөрүнүн түзүлүшүнө кадамдар иштелип чыккан, мындай кеңейүүлөрдүн табылышынын мүмкүнчүлүктөрүнүн кендиги мүнөздөлгөн. Мындай объектилердин бөлүнүүчүлүк аксиомаларынын бирөөсүнүн формасы өзгөргөн учурундагы айрым өзгөчөлүктөрү көрсөтүлгөн, бир калыптуу мейкиндиктердин жаңы класстары киргизилген жана алардын мүнөздөмөлөрү аныкталган, бир калыптуу мейкиндиктин толуктуулугу жана компактуулуктун типтеринин касиеттеринин арасындагы байланыштар тургузулган.

РЕЗЮМЕ

Болжиев Бурас Асанбекович

Диссертация «О свойствах типа компактности и секвенциальности топологических и равномерных пространств» представлена на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности: 01.01.04– геометрия и топология

Ключевые слова: сильно (слабо) P -компактные пространства, p -предел и p -компактность, τ -ультракомпактность, τ -ограниченность.

Объект исследования: секвенциальные и компактные по некоторому множеству ультрафильтров топологические и равномерные пространства

Цель работы:

- охарактеризовать свойства пространств, обладающих тем или иным свойством типа секвенциальности
- охарактеризовать свойства пространств, обладающих тем или иным свойством типа компактности
- установить какими свойствами обладают пространства обладающие «родственными» типами секвенциальности и компактности в различных классах пространств, скажем, отличающихся, например, аксиомами отделимости.
- установить в какой связи такие свойства связаны со свойствами типа полноты в равномерных пространствах.

Основные методы исследования обусловлены целями и задачами исследования. В диссертационной работе используются методы вложений и расширений топологических пространств, метод равномерных покрытий

Научная новизна работы: Получены новые результаты, разработан подход к построению расширений топологических пространств, обладающих соответствующим типом компактности и секвенциальности, причём охарактеризованы широта существования таких расширений. Показаны некоторые особенности таких объектов при изменении одной из форм аксиом отделимости, введены новые классы равномерных пространств и определены их характеристики установлены связи между полнотой равномерного пространства и свойствами типа компактности.

SUMMARY

Boljiev Buras Asanbekovich

Thesis «On properties of some types of compactness and sequentially of topological and uniform spaces» is presented for the degree of Doctor of physical and mathematical sciences on speciality: 01.01.04- geometry and topology

Keywords: strongly (weakly) P-compact space, and p-limit compact, τ – ultracompactness and τ – boundedness.

The object of research: sequential and compact with respect to some set of ultrafilters topological and uniform spaces.

Aim of research:

- characterize the properties of spaces, possessing by some type of sequentially
- characterize the properties of spaces, possessing by some type of compactness
- find the properties of the spaces possessing “similar” types of sequentiality and compactness in different classes of spaces, varying by axioms of separation
- find in what relation such properties are related to the properties of some type of completeness in uniform spaces.

The main methods: of research are relevant to the aims and problems of the research. In the thesis the methods of embedding and extensions of topological spaces and the method of uniform coverings have been used.

The novelty of the results: new results, developed an approach to the construction of extensions of topological spaces with appropriate type of compactness and sequentially, moreover it is characterized by the breadth of the existence of such extensions. It is demonstrated some of the features of such objects when it is changed one of the separation axiom, new classes of uniform spaces have been introduced, their characteristics established and there are found relationship between the completeness of a uniform space and properties of some type of compactness.