

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**Диссертационный совет К 01.15.504**

*На правах рукописи  
УДК 514.757.3*

**КУРБАНБАЕВА НУРЖАМАЛ НАЖИМИДИНОВНА**

**ДВОЙНЫЕ ЛИНИИ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ  
ПРОСТРАНСТВА  $E_4$ , ПОРОЖДАЕМОГО ЗАДАННЫМ  
СЕМЕЙСТВОМ ГЛАДКИХ ЛИНИЙ**

Специальность 01.01.04 – Геометрия и топология

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Ош-2016**

Диссертационная работа выполнена на кафедре “Алгебра и геометрия”  
Ошского государственного университета

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,  
профессор Матиева Гулбадан

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,  
профессор Йозеф Микеш, Чехия

кандидат физико-математических наук,  
доцент Гусева Надежда Ивановна, Москва

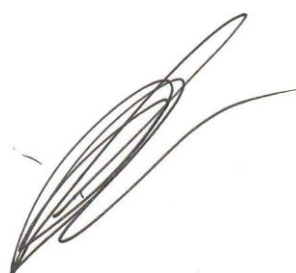
**Ведущая организация:** Кыргызско-Турецкий Университет  
“Манас”, Кыргызстан, 720044, Бишкек, Проспект  
Мира 56

Защита состоится «23» сентября 2016 г. в 14:30 часов на заседании  
диссертационного совета К 01.15.504 при Ошском государственном  
университете и Институте природных ресурсов Южного отделения Национальной  
академии наук Кыргызской Республики по адресу: 723500, г.Ош, ул.Ленина  
331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского  
государственного университета по адресу: Кыргызстан, 723500, г. Ош,  
ул.Ленина 333.

Автореферат разослан « 20 » июня 2016г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
к.ф.-м.н., доцент



Т.О.Бекешов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

**Актуальность темы диссертации.** Данное исследование относится к основным разделам современной дифференциальной геометрии – теории гладких отображений, сетей и распределений.

Точечные соответствия пространств одинаковой размерности изучали А.П. Норден, В.В. Рыжков, М.А. Акивис, В.Т. Базылев, Й. Микеш, Н.И. Гусева и их ученики, а также другие геометры.

Основы геометрии плоских многомерных сетей а также сетей двойных линий заложены в работах В.Т. Базылева. Работы В.Т. Базылева посвящены различным вопросам дифференцируемых отображений областей и поверхностей в  $n$ -мерном проективном, аффинном, евклидовом пространствах.

Теория дифференцируемых частных отображений евклидова пространства, имеет большой интерес не только для самой геометрии, она имеет широкое приложение в теоретической физике и в других областях математики.

Значительный интерес представляют дифференцируемые, частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданным семейством гладких линий, так как от выбора сети зависит не только математическое моделирование физических явлений и процессов, а также их рациональные решения.

Сети, линии которых являются двойными линиями в частных отображениях, применяются в решении многих задач теории линейных и нелинейных волн.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи существования двойных линий частных отображений  $f_i^j$  пространства  $E_4$ , порождаемых заданным семейством гладких линий и пар  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ . Введены понятия квазидвойной линии частных отображений  $f_i^j$  и пар  $(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})$ , исследованы задачи существования квазидвойных линий частных отображений  $f_i^j$  и пар  $(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})$ .

### **Цель работы:**

– исследовать задачи существования двойных (квазидвойных) линий частных отображений четырехмерного евклидова пространства  $E_4$ , порождаемых заданным семейством гладких линий;

– исследовать задачи существования двойных (квазидвойных) линий пары  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ , где  $f_i^j$  – частичное отображение пространства  $E_4$ ,  $\Delta_{(k\ell)}$  – 2- мерное распределение в  $E_4$  ( $(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})$ ,  $\Delta_{(ik\ell)}$  – 3-мерное распределение в  $E_4$ );

– найти необходимые и достаточные условия вырожденности частных отображений  $f_i^j$  пространства  $E_4$ .

**Методы исследования.** В данной работе использованы следующие методы: метод внешних форм Картана, метод подвижного репера с использованием теоретико-группового метода дифференциально-геометрических исследований Г.Ф.Лаптева.

**Научная новизна работы.** Основные научные результаты:

- доказаны необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений  $f_i^j: \Omega \rightarrow \Omega_i^j$  четырехмерного евклидова пространства  $E_4$ , порождаемых заданным семейством гладких линий;
- найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии  $\omega^i$  циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения  $f_i^j$  четырехмерного евклидова пространства  $E_4$ , порождаемого заданным семейством гладких линий;
- получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии  $\omega^i$  циклической сети Френе являлись: а) двойными линиями пар  $(f, \Delta_{(k\ell)})$ , где  $\Delta_{(k\ell)} = (X, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell)$  - двумерное распределение, определяемое векторными полями  $\vec{e}_k, \vec{e}_\ell$ ; б) квазидвойными линиями пар  $(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})$ , где  $\Delta_{(ik\ell)}$  - трехмерное распределение, определяемое векторными полями  $\vec{e}_i, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell$ ;
- доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия  $\gamma$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(k\ell)}$  ( $\Delta_{(ik\ell)}$ ) являлась двойной (квазидвойной) линией пары  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$  ( $(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})$ );
- найдена зависимость вырожденности частичного отображения  $f_i^j$  от того, что какие линии циклической сети Френе являются двойными (квазидвойными) линиями пары  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$  ( $(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})$ ).

**Теоретическая и практическая ценность.** Результаты данной работы представляют, прежде всего, теоретический интерес. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по геометрии отображений погруженных многообразий и в теории сетей на многообразиях. Результаты диссертации также могут быть использованы в теории графов, компьютерной геометрии.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Доказательства необходимого и достаточного условий:

- вырожденности частичных отображений  $f_i^j: \Omega \rightarrow \Omega_i^j$  четырехмерного евклидова пространства  $E_4$ , порождаемого заданным семейством гладких линий;
- для того, чтобы линии  $\omega^i$  циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения  $f_i^j$ ;

– для того, чтобы линии  $\omega^i$  циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями пары  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}) ((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}))$ ;

– для того, чтобы любая линия  $\gamma$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(k\ell)}$  ( $\Delta_{(ik\ell)}$ ) являлась двойной (квазидвойной) линией пары  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}) ((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}))$ .

2. Нахождение зависимости вырожденности частичного отображения  $f_i^j$  от того, что какие линии циклической сети Френе являются двойными (квазидвойными) линиями пары  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}) ((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}))$ .

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались и обсуждались: на международной научной конференции «Роль науки и образования в современных условиях глобализации», посвященной 75-летию общественного деятеля, академика НАН КР, д.х.н. профессора Б.М. Мурзубраимова (Ош 2015), на семинаре по геометрии и топологии факультета математики, информатики и кибернетики Кыргызского Национального Университета им. Ж.Баласагына (руководитель – д.ф.-м.н., профессор А.А. Чекеев), на научно-методическом семинаре «Современные проблемы математики и технология преподавания математики» при ЖАГУ (руководитель – д.ф.-м.н., профессор Алыбаев К.С.), на межвузовском семинаре «Актуальные проблемы математики и информатики» при ФМИТ ОшГУ (руководитель - д.ф.-м.н., профессор, чл.корр. НАН КР К. Алымкулов), а так же на научно-теоретическом семинаре кафедры алгебры и геометрии ОшГУ (руководитель – д.ф.-м.н., профессор Г. Матиева).

**Публикации по теме диссертации:** Основное содержание диссертации опубликовано в 11 работах [1-11]. Из них 7 статей в российских периодических изданиях [1-3, 8-11] индексируемых в РИНЦ и 2 статьи в кыргызских периодических изданиях [6,7] индексируемых в РИНЦ.

**Личный вклад автора в совместных работах:**

В работах [3], [5] идея постановки задач принадлежит Г. Матиевой, а получение результатов – Н.Н. Курбанбаевой.

В работах [1], [2], [8], [10], [11] идея постановки задач принадлежит Г. Матиевой, получение результатов – Н.Н. Курбанбаевой, выяснение геометрических смыслов конечных соотношений – Ч.Х. Абдуллаевой.

В работах [9] идея постановки задач принадлежит Г. Матиевой, получение результатов – Н.Н. Курбанбаевой, выяснение геометрических смыслов конечных соотношений – Г.М. Борбоевой.

**Структура и объем диссертации:**

Диссертация состоит из введения, трёх глав, состоящих из 11 разделов, списка использованных источников из 86 наименований и заключения. Нумерация разделов двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела. Нумерация теорем, лемм и формул – тройная: первая цифра

указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе. Объем текста 90 страниц.

### **Краткое содержание диссертации**

В первой главе работы приводится обзор литературы и результатов других авторов, связанных с темой диссертации.

Во второй главе диссертации исследовано существование двойных линий частичных отображений  $f_i^j: \Omega \rightarrow \Omega_i^j$  и пар  $(f_i^j, \Delta_{(ik)})$  в пространстве  $E_4$ .

В области  $\Omega$  евклидова пространства  $E_4$ , задано семейство гладких линий так, что через каждую точку  $X \in \Omega$  проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер  $\mathfrak{R} = (X, \vec{e}_i)$  ( $i, j, k = 1, 2, 3, 4$ ) в области  $\Omega$  выбран так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии  $\omega^l$  заданного семейства. Деривационные формулы репера  $\mathfrak{R}$  имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \quad (1)$$

Формы  $\omega^i, \omega_i^k$  удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \quad (2)$$

Интегральные линии векторных полей  $\vec{e}_i$  образуют сеть Френе  $\Sigma_4$  для линии  $\omega^l$  заданного семейства. Поскольку репер  $\mathfrak{R}$  построен на касательных к линиям сети  $\Sigma_4$ , формы  $\omega_i^k$  становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \quad (3)$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \quad (4)$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формулу (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [3] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$dA_{ij}^k = (A_{ijm}^k + A_{il}^k A_{jm}^l + A_{lj}^k A_{im}^l) \omega^m. \quad (5)$$

Система величин  $\{A_{ij}^k, A_{ijm}^k\}$  образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии  $\omega^l$  заданного семейства имеют вид:

$$\begin{aligned} d_1 \vec{e}_1 &= A_{11}^2 \vec{e}_2, \\ d_1 \vec{e}_2 &= A_{21}^1 \vec{e}_1 + A_{21}^3 \vec{e}_3, \\ d_1 \vec{e}_3 &= A_{31}^2 \vec{e}_2 + A_{31}^4 \vec{e}_4, \\ d_1 \vec{e}_4 &= A_{41}^3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

и

$$A_{11}^3 = -A_{31}^1 = 0, \quad A_{11}^4 = -A_{41}^1 = 0, \quad (6)$$

$$A_{21}^4 = -A_{41}^2 = 0. \quad (7)$$

Здесь  $k_1^l = A_{11}^2$ ,  $k_2^l = A_{21}^3$ ,  $k_3^l = A_{31}^4$  – первая, вторая и третья кривизны линии  $\omega^l$  соответственно (где  $d_1$  – символ дифференцирования вдоль линии  $\omega^l$ ).

Псевдофокус [4]  $F_i^j$  ( $i \neq j$ ) касательной к линии  $\omega^i$  сети  $\Sigma_4$  определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{A_{ij}^j} \vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{A_{jj}^i} \vec{e}_i. \quad (8)$$

На каждой касательной  $(X, \vec{e}_i)$  существуют по три псевдофокуса. На прямой  $(X, \vec{e}_1)$  существуют псевдофокусы  $F_1^2, F_1^3, F_1^4$ , на прямой  $(X, \vec{e}_2)$  –  $F_2^1, F_2^3, F_2^4$ , на прямой  $(X, \vec{e}_3)$  –  $F_3^1, F_3^2, F_3^4$ , на прямой  $(X, \vec{e}_4)$  –  $F_4^1, F_4^2, F_4^3$ .

Сеть  $\Sigma_4$  в  $\Omega \subset E_4$  называется циклической сетью Френе [5], если реперы  $\mathfrak{R}_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ ,  $\mathfrak{R}_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1)$ ,  $\mathfrak{R}_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ,  $\mathfrak{R}_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  являются соответственно реперами Френе для линий  $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4$  сети  $\Sigma_4$  одновременно.

Пусть сеть  $\Sigma_4$  является циклической сетью Френе. Ее обозначим через  $\tilde{\Sigma}_4$ .

Когда точка  $X$  смещается в области  $\Omega \subset E_4$ , псевдофокус  $F_i^j$  описывает свою область  $\Omega_i^j \subset E_4$ . Получается частичное отображение  $f_i^j: \Omega \rightarrow \Omega_i^j$  такое, что  $f_i^j(X) = F_i^j$ .

**В разделе 2.1.** рассмотрено частичное отображение  $f_3^2$  и исследована проблема существования двойных линий этого отображения и пар  $(f_3^2, \Delta_{(ik)})$ .

Доказаны необходимые и достаточные условия вырожденности отображения  $f_3^2$  (Теорема 2.1.1), а также доказано, что если линия  $\omega^4$  сети  $\tilde{\Sigma}_4$

является двойной линией пары  $(f_3^2, \Delta_{(34)})$ , то частичное отображение  $f_3^2$  является вырожденным (Следствие 2.1.1.).

Также доказаны:

**Теорема 2.1.2.** Если линия  $\omega^4$  является двойной линией пары  $(f_3^2, \Delta_{(34)})$ , то никакая другая линия (отличная от линий  $\omega^3, \omega^4$ ), принадлежащая распределению  $\Delta_{(34)}$ , не может быть двойной линией пары  $(f_3^2, \Delta_{(34)})$ .

**Теорема 2.1.3.** Линия  $\gamma$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(23)}$ , является двойной линией пары  $(f_3^2, \Delta_{(23)})$  тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора удовлетворяют условию:  $\frac{\gamma^3}{\gamma^2} = -\frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{33}^4}$ .

**Следствие 2.1.2.** Если линия  $\omega^2$  сети  $\tilde{\Sigma}_4$  является двойной линией пары  $(f_3^2, \Delta_{(23)})$ , то эта пара не имеет других (кроме линии  $\omega^2$ ) двойных линий, принадлежащих распределению  $\Delta_{(23)}$ .

**Теорема 2.1.4.** Произвольная линия  $\beta$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(13)}$ , является двойной линией пары  $(f_3^2, \Delta_{(13)})$  тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора удовлетворяют условиям:

$$\Lambda_{31}^2 = 0, \quad \frac{\beta^3}{\beta^1} = -\frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{33}^4},$$

где  $\beta^1, \beta^3$  – первая и третья координаты касательного вектора  $\vec{\beta}$  линии  $\beta$ .

**Следствие 2.1.3.** Если линия  $\omega^1$  сети  $\tilde{\Sigma}_4$  является двойной линией пары  $(f_3^2, \Delta_{(13)})$ , то это пара не имеет других (кроме линии  $\omega^1$ ) двойных линий, принадлежащих распределению  $\Delta_{(13)}$ .

**В разделе 2.2.** рассмотрено частичное отображение  $f_I^4: \Omega \rightarrow \Omega_I^4$ , определяемое псевдофокусом  $F_I^4 \in (X, \vec{e}_I)$  и задача существования двойных линий этого отображения  $f_I^4$  и пар  $(f_I^4, \Delta_{(ik)})$ .

Доказаны необходимые и достаточные условия вырожденности отображения  $f_I^4$  (**Теорема 2.2.1.**), а также доказано, что линии  $\omega^1, \bar{\omega}^1 = f_I^4(\omega^1)$  всегда являются двойными линиями частичного отображения  $f_I^4$ , а линия  $\omega^1$  сети  $\tilde{\Sigma}_4$  Френе является двойной линией пары  $(f_I^4, \Delta_{(12)})$  (Лемма 2.2.1.).

Также получены результаты: доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы

а) линии  $\omega^2, \bar{\omega}^2 = f_I^4(\omega^2)$  являлись двойными линиями частичного отображения  $f_I^4$ , а линия  $\omega^2$  являлась двойной линией пары  $(f_I^4, \Delta_{(12)})$ ;



б) линии  $\omega^3$ ,  $\bar{\omega}^3 = f_I^4(\omega^3)$  являлись двойными линиями частичного отображения  $f_I^4$ , а линия  $\omega^3$  являлась двойной линией пары  $(f_I^4, \Delta_{(13)})$ ;

в) линии  $\omega^4$ ,  $\bar{\omega}^4 = f_I^4(\omega^4)$  являлись двойными линиями частичного отображения  $f_I^4$ , а линия  $\omega^4$  являлась двойной линией пары  $(f_I^4, \Delta_{(14)})$ .

Далее доказано, что если линия  $\omega^2$  сети  $\tilde{\Sigma}_4$  является двойной линией пары  $(f_I^4, \Delta_{(12)})$ , то частичное отображение  $f_I^4$  становится вырожденным.

Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия  $\gamma$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(14)}$ , являлась двойной линией пары  $(f_I^4, \Delta_{(14)})$  (**Теорема 2.2.4.**).

Установлено, что если линия  $\omega^4$  сети  $\tilde{\Sigma}_4$  является двойной линией пары  $(f_I^4, \Delta_{(14)})$ , то никакая другая линия, принадлежащая распределению  $\Delta_{(14)}$ , не может быть двойной линией этой пары (**Следствие 2.2.2.**).

Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы любая линия  $\beta$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(13)}$ , являлась двойной линией пары  $(f_I^4, \Delta_{(13)})$  (**Теорема 2.2.5.**).

**В разделе 2.3.** рассмотрено частичное отображение  $f_3^4: \Omega \rightarrow \Omega_4^3$ , определяемое псевдофокусом  $F_4^3 \in (X, \bar{e}_4)$  и исследована задача существования двойных линий этого отображения  $f_4^3$  и пар  $(f_4^3, \Delta_{(ik)})$ .

Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы:

а) линия  $\gamma$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(34)}$ , являлась двойной линией пары  $(f_4^3, \Delta_{(34)})$  (**Теорема 2.3.1.**);

б) линия  $\beta$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(14)}$ , являлась двойной линией пары  $(f_4^3, \Delta_{(14)})$  (**Теорема 2.3.2.**);

в) линия  $\alpha$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(24)}$ , являлась двойной линией пары  $(f_4^3, \Delta_{(24)})$  (**Теорема 2.3.3.**).

**В разделе 2.4.** рассмотрено частичное отображение  $f_2^1: \Omega \rightarrow \Omega_2^1$ , определяемое псевдофокусом  $F_2^1 \in (X, \bar{e}_2)$  и исследована задача существования двойных линий этого отображения  $f_2^1$  и пар  $(f_2^1, \Delta_{(ik)})$ .

Доказаны

**Теорема 2.4.1.** Линия  $\gamma$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(12)}$ , является двойной линией пары  $(f_2^1, \Delta_{(12)})$  тогда и только тогда, когда координаты её

касательного вектора  $\vec{\gamma}$  удовлетворяют условию:  $\frac{\bar{\gamma}^1}{\bar{\gamma}^2} = -\frac{\Lambda_{22}^3}{\Lambda_{21}^3}$ .

где  $\Lambda_{22}^3$  – первая кривизна линии  $\omega^2$  сети  $\tilde{\Sigma}_4$ ,

$\Lambda_{21}^3$  – вторая кривизна линии  $\omega^I$  сети  $\tilde{\Sigma}_4$

**Теорема 2.4.2.** Линия  $\beta$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(34)}$ , является двойной линией пары  $(f_2^I, \Delta_{(34)})$  тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\frac{\Lambda_{23}^I}{\beta_{213}^I} = \frac{\Lambda_{24}^I}{\Lambda_{214}^I},$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\frac{\vec{e}_1 \vec{\Lambda}_{23}}{\vec{e}_1 d_3 \vec{\Lambda}_{21}} = \frac{\vec{e}_1 \vec{\Lambda}_{24}}{\vec{e}_1 d_4 \vec{\Lambda}_{21}},$$

где  $d_i$  – символ дифференцирования вдоль направления  $\vec{e}_i$ ,  $\vec{\Lambda}_{ij} = d_j \vec{e}_i$ .

**В третьей главе** исследовано существование квазидвойных линий частичных отображений  $f_i^j$  и пар  $(f_i^j, \Delta_{(\kappa\ell)})$ .

**В разделе 3.1.** рассмотрено частичное отображение  $f_4^3: \Omega \rightarrow \Omega_4^3$  такое, что  $f(x) = F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$ . Введены определения квазидвойных линий частичного отображения  $f_i^j$  и квазидвойной линии пар  $(f_i^j, \Delta_{(\kappa\ell)})$ .

Введем определения:

1) линии  $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega^i}$  в  $E_4$  называются квазидвойными линиями отображения  $g$ , если касательные к ним взятые в соответствующих точках  $X, g(X)$ , принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства  $E_4$ ;

2) Линия  $l$  называется квазидвойной линией пары  $(g, \Delta_p)$ , если она является квазидвойной линией отображения  $g$  и принадлежит распределению  $\Delta_p$ .

Доказаны: необходимое и достаточное условие для того, чтобы

а) линия  $\gamma$ , принадлежащая трёхмерному распределению  $\Delta_{(234)}$ , являлась квазидвойной линией пары  $(f_4^3, \Delta_{(234)})$  (**Теорема 3.1.1.**);

б) линия  $\alpha$ , принадлежащая трехмерному распределению  $\Delta_{(123)}$ , являлась квазидвойной линией пары  $(f_4^3, \Delta_{(123)})$  (**Теорема 3.1.2.**);

в) линия  $m$ , принадлежащая трехмерному распределению  $\Delta_{(124)}$ , являлась квазидвойной линией пары  $(f_4^3, \Delta_{(124)})$ ;

г) линия  $\beta$ , принадлежащая трехмерному распределению  $\Delta_{(134)}$ , являлась двойной линией пары  $(f_4^3, \Delta_{(134)})$  (**Теорема 3.1.3.**).

Выяснен геометрический смысл конечных соотношений.

**В разделе 3.2.** рассмотрено частичное отображение  $f_3^2: \Omega \rightarrow \Omega_3^2$  такое, что  $f(X) = F_3^2 \in (X, \bar{e}_3)$ .

Доказаны необходимое и достаточное условие для того, чтобы:

а) линия  $\ell$ , принадлежащая трёхмерному распределению  $\Delta_{(123)}$ , являлась квазидвойной линией пары  $(f_3^2, \Delta_{(123)})$ ;

б) линия  $\gamma$ , принадлежащая трёхмерному распределению  $\Delta_{(124)}$ , являлась квазидвойной линией пары  $(f_3^2, \Delta_{(124)})$  (**Теорема 3.2.1.**);

в) линия  $\alpha$ , принадлежащая трёхмерному распределению  $\Delta_{(134)}$ , являлась квазидвойной линией пары  $(f_3^2, \Delta_{(134)})$  (**Теорема 3.2.2.**).

Выяснен геометрический смысл конечных соотношений.

**В разделе 3.3.** рассмотрено частичное отображение  $f_1^4: \Omega \rightarrow \Omega_1^4$  такое, что  $f(X) = F_1^4 \in (X, \bar{e}_1)$ .

Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы: а) линия  $\ell$ , принадлежащая трёхмерному распределению  $\Delta_{(123)}$ , являлась квазидвойной линией пары  $(f_1^4, \Delta_{(123)})$ ;

б) любая линия  $\beta$ , принадлежащая трёхмерному распределению  $\Delta_{(124)}$ , являлась квазидвойной линией пары  $(f_1^4, \Delta_{(124)})$  (**Теорема 3.3.1.**);

Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы: а) линия  $\gamma$ , принадлежащая трёхмерному распределению  $\Delta_{(234)}$ , являлась квазидвойной линией пары  $(f_1^4, \Delta_{(234)})$ ;

б) линия  $\alpha$  принадлежащая трёхмерному распределению  $\Delta_{(134)}$ , являлась квазидвойной линией пары  $(f_1^4, \Delta_{(134)})$  (**Теорема 3.3.2.**).

**В разделе 3.4.** рассмотрено частичное отображение  $f_2^1: \Omega \rightarrow \Omega_2^1$  такое, что  $f_2^1(X) = F_2^1 \in (X, \bar{e}_2)$ .

Доказаны:

**Теорема 3.4.1** Линия  $\gamma$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(124)}$ , является квазидвойной линией пары  $(f_2^1, \Delta_{(124)})$  тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\Lambda_{21}^3 \gamma^1 + \Lambda_{22}^3 \gamma^2 + \Lambda_{24}^3 \gamma^4 = 0,$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\bar{\theta} \cdot \vec{\gamma} = 0,$$

где  $\vec{\gamma} = \{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^4\}$  – касательный вектор линии  $\gamma$ ,

$$\bar{\theta} = (\bar{e}_3 d_1 \bar{e}_1) \bar{e}_1 + (\bar{e}_3 d_2 \bar{e}_2) \bar{e}_2 + (\bar{e}_3 d_4 \bar{e}_2) \bar{e}_4.$$

**Теорема 3.4.2** 1) Линия  $\beta$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(234)}$ , являлась квазидвойной линией пары  $(f_2^I, \Delta_{(234)})$  тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\frac{\beta^3}{\beta^4} = -\frac{\Lambda_{24}^I}{\Lambda_{23}^I},$$

где  $-\Lambda_{24}^I = \Lambda_{14}^2$  - вторая кривизна,  $-\Lambda_{23}^I = \Lambda_{13}^2$  - третья кривизна линии  $\omega^4$  сети  $\tilde{\Sigma}_4$ .

2) Линия  $\alpha$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(134)}$ , являлась квазидвойной линией пары  $(f_2^I, \Delta_{(134)})$  тогда и только тогда, когда имеет место условие:

$$B_{211}^I \alpha^1 + B_{213}^I \alpha^3 + B_{214}^I \alpha^4 = 0,$$

геометрический смысл, которого заключается в том, что векторы  $\vec{\xi} = B_{211}^I \vec{e}_1 + B_{213}^I \vec{e}_3 + B_{214}^I \vec{e}_4$  и  $\vec{\alpha} = \alpha^1 \vec{e}_1 + \alpha^3 \vec{e}_3 + \alpha^4 \vec{e}_4$  ортогональны.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе рассмотрены частичные отображения  $f_i^j : \Omega \rightarrow \Omega_i^j$  евклидова пространства  $E_4$ , порождаемые заданным семейством гладких линий. Исследована проблема существования двойных (квазидвойных) линий частичного отображения  $f_i^j$  и пар  $(f_i^j, \Delta_{(ik)}) \left( (f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}) \right)$ .

Получены следующие результаты:

- Доказаны необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений  $f_i^j : \Omega \rightarrow \Omega_i^j$  четырехмерного евклидова пространства  $E_4$ , порождаемых заданным семейством гладких линий;

- Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии  $\omega^i$  циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения  $f_i^j$  четырехмерного евклидова пространства  $E_4$ , порождаемого заданным семейством гладких линий;

- Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии  $\omega^i$  циклической сети Френе являлись: а) двойными линиями пар  $(f, \Delta_{(k\ell)})$ , где  $\Delta_{(k\ell)} = (X, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell)$  – двумерное распределение, определяемое векторными полями  $\vec{e}_k, \vec{e}_\ell$ ; б) квазидвойными линиями пар  $(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})$ , где  $\Delta_{(ik\ell)}$  – трехмерное распределение, определяемое векторными полями  $\vec{e}_i, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell$ ;

- Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия  $\gamma$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(k\ell)}$   $(\Delta_{(ik\ell)})$  являлась двойной (квазидвойной) линией пары  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}) \left( (f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}) \right)$ ;

- Найдена зависимость вырожденности частичного отображения  $f_i^j$  от того, что какие линии циклической сети Френе являются двойными (квазидвойными) линиями пары  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}) \left( (f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}) \right)$ .

Автор благодарит научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Матиеву Гулбадан за постановку задачи исследования, постоянное внимание и поддержку в работе.

## Список опубликованных работ

1. Курбанбаева, Н.Н. О двойных линиях одного частичного отображения, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – №10-1. – Уфа, 2015. – С. 20-26 (РИНЦ).
2. Курбанбаева, Н.Н. Существование двойных линий одного частичного отображения евклидова пространства  $E_4$  [Текст] / Г. Матиева, Н.Н. Курбанбаева // IN-SITU. – №4. – Москва, 2015. – С. 14-20 (РИНЦ).
3. Курбанбаева, Н.Н. Об одной двойной линии частичного отображения евклидова пространства  $E_4$  [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Вестник ОшГУ. – №4-4. – Ош, 2015. – С. 49-53.
4. Курбанбаева, Н.Н. К геометрии частичных отображений евклидова пространства  $E_4$  [Текст] / Г. Матиева, Н.Н. Курбанбаева // Вестник ОшГУ. – №4-4. – Ош, 2015. – С. 54-59.
5. Курбанбаева, Н.Н. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии одного частичного отображения пространства  $E_4$  [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – №4-4. – Уфа, 2016. – С. 8-14 (РИНЦ).
6. Курбанбаева, Н.Н. О свойствах одного частичного отображения евклидова пространства  $E_4$ , порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // СИМВОЛ НАУКИ. – №1-1(13). – Уфа, 2016. – С. 43-49 (РИНЦ).
7. Курбанбаева, Н.Н. О существовании двойных линий одного частичного отображения евклидова пространства [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Наука, новые технологии и инновации. – №1 – Бишкек, 2016. – С. 3-6 (РИНЦ).
8. Курбанбаева, Н.Н. О квазидвойных линиях частичного отображения евклидова пространства  $E_4$  [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Наука, новые технологии и инновации, №1. – Бишкек, 2016. – С. 7-10 (РИНЦ).
9. Курбанбаева, Н.Н. Существования квазидвойных линий частичного отображения евклидова пространство  $E_4$  [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // СИМВОЛ НАУКИ. – №3-4. – Уфа, 2016. – С. 25-30 (РИНЦ).
10. Курбанбаева, Н.Н. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойных линий частичного отображения пространства  $E_4$  [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – №3-4. – Уфа, 2016. – С. 24-30 (РИНЦ).
11. Курбанбаева, Н.Н. О квазидвойных линиях одного частичного отображения, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // CETERIS PARIBUS. – №4. – Москва, 2016. – С. 6-13 (РИНЦ).

## РЕЗЮМЕ

диссертационной работы Курбанбаевой Нуржамал Нажимидиновны  
на тему “Двойные линии частичного отображения пространства  $E_4$ ,  
порождаемого заданным семейством гладких линий” на соискание ученой  
степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.04 – “Геометрия и топология”

**Ключевые слова:** частичное отображение, циклическая сеть Френе, псевдофокус, распределение, двойная линия частичного отображения, квазидвойная линия частичного отображения.

**Объект исследования:** Двойные и квазидвойные линии частичного отображения  $f_i^j$  евклидова пространства  $E_4$  и пар  $(f_i^j, \Delta_p)$ .

**Предмет исследования:** Частичные отображения четырехмерного евклидова пространств  $E_4$ , порождаемые заданным семейством гладких линий.

**Цель исследования:**

- исследовать задачи существования двойных (квазидвойных) линий частичных отображений  $f_i^j$  пространства  $E_4$ , порождаемых заданным семейством гладких линий;
- исследовать задачи существования двойных (квазидвойных) линий пары  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ , где  $\Delta_{(k\ell)}$  – 2- мерное распределение в  $E_4$   $((f_i^j, \Delta_{(k\ell)}), \Delta_{(ik\ell)})$  – 3-мерное распределение в  $E_4$ );
- найти необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений  $f_i^j$  пространства  $E_4$ .

**Методы исследования:** Метод внешних форм Картана, метод подвижного репера с использованием теоретико-группового метода дифференциально-геометрических исследований Г.Ф.Лаптева.

**Научная новизна:**

- доказаны необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений  $f_i^j$  пространства  $E_4$ , порождаемых заданным семейством гладких линий;
- найдены необходимые достаточные условия для того, чтобы линии  $\omega^i$  циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения  $f_i^j$  пространства  $E_4$ ;
- получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии  $\omega^i$  циклической сети Френе являлись: а) двойными линиями пар  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ ; б) квазидвойными линиями пар  $(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})$ ;
- доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия  $\gamma$ , принадлежащая распределению  $\Delta_{(k\ell)}$   $(\Delta_{(ik\ell)})$  являлась двойной (квазидвойной) линией пары  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$   $((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}))$ ;
- найдена зависимость вырожденности частичного отображения  $f_i^j$  от того, что какие линии циклической сети Френе являются двойными (квазидвойными) линиями пары  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$   $((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}))$ .

**Курбанбаева Нуржамал Нажимидиновнанын “ $E_4$  мейкиндигин берилген жылма сызыктардын классы тарабынан жаратылган бөлүктөп чагылтуунун кошмок сызыктары” деген темадагы 01.01.04 – “Геометрия жана топология” адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты илимий даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын РЕЗЮМЕСИ**

**Урунттуу сөздөр:** бөлүктөп чагылтуу, Френенин циклдик торчосу, псевдофокус, бөлүштүрүү, бөлүктөп чагылтуунун кошмок сызыгы, бөлүктөп чагылтуунун квазикошмок сызыгы.

**Изилдөөнүн объектиси:**  $E_4$  мейкиндигин  $f_i^j$  бөлүктөп чагылтуунун жана  $(f_i^j, \Delta_p)$  түгөйүнүн кошмок жана квазикошмок сызыктары.

**Изилдөөнүн предмети:** Берилген жылма сызыктардын классы тарабынан жаратылган евклиддик төрт ченемдүү  $E_4$  мейкиндигин бөлүктөп чагылтуулар.

**Изилдөөнүн максаты:**

– Евклиддик төрт ченемдүү  $E_4$  мейкиндигин берилген жылма сызыктардын классы тарабынан жаратылган бөлүктөп чагылтуулардын кошмок (квазикошмок) сызыктарынын жашашын изилдөө;

–  $(f_i^j, \Delta_{(kl)})$  түгөйүнүн (мында  $\Delta_{(kl)}$  –  $E_4$  мейкиндигиндеги эки ченемдүү бөлүштүрүү)  $((f_i^j, \Delta_{(ikl)}))$  түгөйүнүн (мында  $\Delta_{(ikl)}$  –  $E_4$  мейкиндигиндеги үч ченемдүү бөлүштүрүү) кошмок (квазикошмок) сызыктарынын жашашын изилдөө;

–  $E_4$  мейкиндигин  $f_i^j$  бөлүктөп чагылтуулардын кубулган болушунун зарыл жана жетиштүү шарттарын табуу.

**Изилдөөнүн методдору:** Картандын сырткы формалар методу, кыймылдуу репер жана Г.Ф.Лаптевдин дифференциалдык-геометриялык изилдөөлөр методу.

**Изилдөөнүн илимий жаңылыктары:**

–  $E_4$  мейкиндигин берилген жылма сызыктардын классы тарабынан жаратылган  $f_i^j$  бөлүктөп чагылтуулардын кубулган болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген;

– Френенин циклдик торчосунун  $\omega^i$  сызыктары евклиддик  $E_4$  мейкиндигин  $f_i^j$  бөлүктөп чагылтуулардын кошмок (квазикошмок) сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары табылган;

– Френенин циклдик торчосунун  $\omega^i$  сызыктары: а)  $(f_i^j, \Delta_{(kl)})$  түгөйүнүн кошмок сызыктары болушунун; б)  $(f_i^j, \Delta_{(ikl)})$  түгөйүнүн квазикошмок сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары алынган;

–  $\Delta_{(kl)}$  ( $\Delta_{(ikl)}$ ) бөлүштүрүүсүнө таандык болгон  $\gamma$  сызыгы  $(f_i^j, \Delta_{(kl)})$  ( $(f_i^j, \Delta_{(ikl)})$ ) түгөйүнүн кошмок (квазикошмок) сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген;

–  $f_i^j$  бөлүктөп чагылтуусунун кубулган болушу Френенин циклдик торчосунун кайсыл сызыктары  $(f_i^j, \Delta_{(kl)})$  ( $(f_i^j, \Delta_{(ikl)})$ ) түгөйүнүн кошмок (квазикошмок) сызыгы болушунан көз каранды экендиги табылган.



## SUMMARY

**Dissertation “Double lines of partial mapping of space  $E_4$ , generated by given set of smooth lines” of Kurbanbaeva Nurjamal Najimidinovna is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences by the specialty 01.01.04- “Geometry and topology”**

**Key words:** partial mapping, cyclic net of Frenet, pseudofocus, distribution, a double line of partial mapping, a quasidouble line of partial mapping.

**Object of research:** Double and quasidouble lines of partial mapping  $f_i^j$  of Euclidean space  $E_4$  and pairs  $(f_i^j, \Delta_p)$ .

**Subject of research:** Partial mappings of four dimension Euclidean space  $E_4$ , generated by given set of smooth lines.

**Research aim:**

- to investigate problem of a existence of a double (quasidouble) lines of the partial mappings  $f_i^j$  of the space  $E_4$ , generated by the given set of smooth lines;
- to investigate problem of a existence of a double (quasidouble) lines of the pairs  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ , where  $\Delta_{(k\ell)}$  – 2-dimensional distribution in  $E_4$   $((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}))$ , where  $\Delta_{(ik\ell)}$  – 3-dimensional distribution in  $E_4$ );
- to find a necessary and sufficient conditions of a degeneracy of the partial mappings  $f_i^j$  of the space  $E_4$ .

**Research Methods:** The external forms of Cartan's, moving frame method and theoretic-group method of differential-geometrical researches of G.F.Laptev.

**Scientific novelty:**

- necessary and sufficient conditions of a degeneracy of partial mappings  $f_i^j$  of the space  $E_4$ , generated by the given set of smooth lines are proved;
- necessary and sufficient conditions in order that lines  $\omega^i$  of the cyclic net of Frenet are double (quasidouble) lines of partial mapping  $f_i^j$  of the space  $E_4$ ;
- necessary and sufficient conditions in order that lines  $\omega^i$  of the cyclic net of Frenet are: a) double lines of the pairs  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ ; b) quasidouble lines of the pairs  $(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})$  are obtained;
- necessary and sufficient conditions in order that line  $\gamma$ , belonging to distribution  $\Delta_{(k\ell)}$   $(\Delta_{(ik\ell)})$ , is double (quasidouble) line of the pair  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$   $((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}))$ ;
- dependence of degeneracy of the partial mapping from this what lines of cyclic net of Frenet are double (quasidouble) lines of the pair  $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$   $((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}))$ .





