

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. И. РАЗЗАКОВА**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СТРОИТЕЛЬСТВА, ТРАНСПОРТА И АРХИТЕКТУРЫ  
им. Н. ИСАНОВА**

Диссертационный совет Д 01.15.505

На правах рукописи  
УДК 539.422.5(043.3)

**КОЗУБАЙ ИСКЕНДЕР**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ,  
НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ  
ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Бишкек – 2016**

Работа выполнена в Кыргызском государственном техническом университете имени И.Раззакова.

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,  
профессор **Дуйшеналиев Т.Б.**

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,  
профессор **Рычков Б.А.**

кандидат физико-математических наук,  
доцент **Дооталиева Ж.Ж.**

**Ведущая организация:** Национальный исследовательский  
университет «**Московский энергетиче-  
ский институт**», г. Москва, РФ

Защита состоится 17 июня 2016 года в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.15.505 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) наук при Кыргызском государственном техническом университете им. И.Раззакова и Кыргызском государственном университете строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова по адресу: 720044, Кыргызская Республика, г. Бишкек, пр. Мира, 66, конференц-зал (ауд. 1/314).

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова (720044, Кыргызская Республика, г. Бишкек, пр. Мира, 66) и Кыргызского государственного университета строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова (720020, Кыргызская Республика, г. Бишкек, ул. А.Малдыбаева, 34б).

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2016 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 01.15.505, к.ф.-м.н.

Б.Т.Мекенбаев

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы диссертации.** Основы классической теории упругости были созданы трудами Гука, Коши, Навье, Ламе, Пуассона, Грина, Сен-Венана, Эри, Максвелла, Морера, Бетти, Лихтенштейна, Черрути и др. ученых. Определение реального, т.е. точечного распределения усилий на основании аналитических решений, по-прежнему, остается актуальной проблемой.

Г.Д.Гродский, П.Ф.Папкович, Г.Нейбер представляли перемещения через четыре гармонические функции. Буссинеск, Б.Г. Галеркин выражали перемещения через три бигармонические функции. Комплексные переменные и функции к решению пространственной задачи в теории упругости применяли А.Я.Александров, Ю.И.Соловьев, Г.Н.Положий, А.И.Александрович, Ф.А. Богашев, А.Г.Угодчиков, R.Riltner, О.Г.Гоман. Кватернионные функции и переменные использовались в работах В.А.Гастева, Ю.М.Григорьева и др. авторов. В плоской задаче для изотропного тела наиболее известным является решение Н.И.Мусхелишвили, дающее представление напряжений и перемещений через две аналитические функции комплексного переменного.

Для решения пространственных задач применяется метод разделения переменных Фурье, методы теории потенциалов, которые сводят задачу к интегральным уравнениям. Это направление развивалось С.Г.Михлиным, В.Д.Купрадзе, И.С.Аржаных. Вариационные методы получили развитие в работах С.П.Тимошенко, Б.Г.Галеркина, А.Н.Динника, Л.С.Лейбезона, М.М.Филоненко-Бородича и др. Методы группового анализа уравнения теории упругости исследовались в работах Ю.А.Чиркунова, Б.Д.Аннина. Функционально-инвариантные решения были предложены С.Л.Соболевым, В.И.Смирновым. Вопросы построения фундаментальных решений для уравнений упругости анизотропных тел рассматривали С.В.Кузнецов, Н.И.Остробабин. Проблемами, связанными с общими решениями в теории упругости занимались также Р.Мидлин, С.И.Тренин, Н.И.Кильчевский, К.В.Соляник-Красса, Р.Юбенкс, Э.Штейнберг, Г.С.Шапиро, В.М.Деев, Г.Ю.Джанелидзе, П.П.Теодореску, К.Маргерри др.

Условия совместности Сен-Венана, обеспечивающие существование решения формулы Коши призаданных деформациях и функции напряжений Максвелла и Мореры известны еще с 19 века. По этой теме опубликованы многочисленные труды (Х.Хан, С.Truesdell, К.Marguerre, Р.О.Кузьмин, Н.L.Langhaar, М.Е.Gurtin, М.Pastori, М.Stippes, D.E.Carlson, R.Rostamian, М.Г.Слободянский, В.Д.Ключников, Б.Е.Победря, Б.Ф.Власов, А.Н.Коновалов, Н.М.Бородачев, Д.Д.Ивлев, В.С.Калинин, Л.А.Розин, В.И.Малый, I.S.Tuba, J.Grycz и др.), в которых обсуждаются число независимых условий совместности и их модификации, общность и полнота функций напряжений (В.И.Блох, С.В.Кузнецов, А.П.Прусаков, E.Kroner, Н.Н.Leipholz), постановки задачи теории упругости в напряжениях (Б.Ф.Власов, Б.Е.Победря, В.С.Калинин, Л.А.Розин,

А.Н. Коновалов, В.В.Васильев, Н.М.Бородачев, И.В.Андрианов, Т.Б. Дуйшеналиев, R.Keinzler и др.).

Как видим, работ, в которых рассматриваются различные варианты решений уравнений линейной теории упругости в перемещениях или напряжениях, много. Подавляющее большинство из них опираются на устоявшийся (классический) подход к постановке и решению краевых задач.

Если деформирование представляется в материальных координатах, то мерами деформации служат тензоры линейных и конечных деформаций, называемых, соответственно, тензорами Грина и Лагранжа. В случае же, когда используются пространственные координаты, тензоры линейных и конечных деформаций носят название, соответственно, тензоров Коши и Альманси. Устоялось положение, что тензор Коши описывает только бесконечно малые деформации и не пригоден для характеристики конечных деформаций. Однако задач, аналитически строго решенных на основе тензора Альманси, мало.

Перечисленные меры деформаций приводятся во всех основополагающих работах по механике. В деформационном движении, т.е. в движении частиц тела относительно друг друга, соотношения между тензорами напряжения и деформации являются определяющими такое движение законами. В свете этого, вид выражения деформаций через градиенты перемещений имеет важное значение. Если эти выражения не линейны, то решения задач, как следует из работ вышеприведенного обзора, становятся чрезвычайно сложными. Меры деформирования всегда привлекали к себе пристальное внимание ученых-механиков и до сих пор не потеряли своей актуальности. При этом численные методы и возможности современной вычислительной техники не уменьшили роль аналитических методов решения задач теории упругости.

Исследования закономерностей деформирования конструкционных материалов (металлов) с позиций новых результатов о возможностях тензора деформаций Коши имеют принципиальное значение как с точки зрения фундаментальных основ теории упругости, так и в плане практических приложений, связанных с деформационными расчётами конструкций и аппаратов новой техники, подверженных воздействию различных нагрузок. Эти задачи изучены ещё недостаточно полно. До сих пор аналитические решения для такого рода задач возможны только для отдельных и достаточно простых расчетных схем.

**Связь темы диссертации с научными программами или научно-исследовательскими работами.** Работа выполнена в соответствии с планом НИР Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова.

**Цели и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является получение доказательства, что тензор Коши, при определенных условиях, является полновесной характеристикой деформированного состояния при конечных уровнях деформаций трехмерных металлических конструкций.

В соответствии с поставленной целью решаются следующие задачи:

- Показать и проанализировать основные проблемы линейной теории упругости.
- Развить математическую модель конечного деформирования упругих тел на основе тензора линейных деформаций Коши.
- На основе предложенной математической модели разработать алгоритм вычисления конечных деформаций, перемещений и напряжений упругих тел.
- Реализовать предложенную математическую модель определения конечных деформаций упругих тел в виде расчетных алгоритмов и компьютерных программ в системе Matlab.
- Провести численные эксперименты по нахождению напряженно - деформированного состояния металлических конструкций (сплошной цилиндр и плита) при различных видах их деформирования (растяжение-сжатие, изгиб).

#### **Научная новизна полученных результатов.**

- Доказано, что тензор линейных деформаций в полной мере характеризует деформированное состояние различных металлических конструкций при развитии конечных деформаций растяжения-сжатия и изгиба. При этом компоненты такого тензора достаточны для определения поля перемещения.
- Разработана математическая модель, позволяющая описать процесс деформирования металлических трехмерных конструкций при различных силовых воздействиях. Предложенная модель основана на подходе Т.Б.Дуйшеналиева к решению статических краевых задач теории упругости в напряжениях и тензор линейных деформаций Коши.
- Построенная математическая модель реализована в виде собственных алгоритмов и компьютерных программ в системе Matlab.
- Проведены многочисленные численные эксперименты на определение конечных деформаций, напряжений и перемещений упругих тел при растяжении-сжатии и изгибе конструкций из различных материалов (сталь, медь, алюминий).

**Практическая значимость полученных результатов** состоит в определении численных значений конечных деформаций и перемещений трехмерных тел (сплошной цилиндр, плита). Рассчитаны напряженно-деформированные состояния таких конструкций из различных материалов (сталь, медь, алюминий) при растяжении-сжатии и изгибе.

#### **Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

1. Анализ возможностей тензора линейных деформаций Коши.
2. Доказательство тензора Коши как полновесной характеристики конечных деформаций упругих трехмерных тел и металлических конструкций.

3. Построение математической модели, позволяющей описать процесс деформирования металлических трехмерных конструкций при различных силовых воздействиях на основе тензора линейных деформаций Коши.
4. Реализация математической модели деформирования в виде собственных алгоритмов и компьютерных программ в системе Matlab.
5. Многочисленные численные эксперименты на определение деформаций, напряжений и перемещений упругих тел при растяжении-сжатии и изгибе конструкций из различных материалов (сталь, медь, алюминий).

**Достоверность полученных результатов.** Результаты получены на основе применения фундаментальных положений и законов механики сплошных сред. Хорошо согласуются с результатами экспериментальных и численных исследований других авторов.

**Личный вклад соискателя.** Диссертация является результатом самостоятельных исследований, выполненных автором. Лично автор выполнил следующие этапы исследований:

- разработка алгоритма вычисления поля перемещений при упругих деформациях твердых тел;
- вычисление компонентов тензоров деформаций, вращения и напряжения, а также касательных напряжений;
- развитие математических моделей процессов деформирования упругих тел на основе тензора линейных деформаций Коши;
- построение алгоритма и разработка компьютерных программ расчета напряженно-деформированного состояния трехмерных упругих тел в системе Matlab.
- выполнение расчетов на ЭВМ по нахождению полей деформаций, напряжений и перемещений упругих тел (цилиндр сплошного сечения, плита) при различных видах внешнего силового воздействия (растяжение-сжатие, изгиб).

**Апробации результатов диссертации.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2014» (АПВПМ-2014), посвященная 50-летию Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск, 2014 г.
- Международная конференция «Наука, образование и инновации: приоритетные направления развития», посвященная 60-летнему юбилею Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова, г.Бишкек, 2014 г.
- Международная научно-практическая конференция молодых ученых «Наука XXI века: новый подход» Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, 2014 г.

- Научные семинары кафедры «Механика и промышленная инженерия» Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова, 2013-2016 гг.
- Научный семинар кафедры «Механика» Кыргызско-Российского Славянского университета им. Б.Ельцина, 2016 г.

**Полнота отражения результатов диссертации в публикациях.** По теме диссертационной работы опубликовано 13 научных работ, в том числе 12 статей в научных журналах и 1 тезис конференции. Из них за рубежом опубликованы 4 статьи. Количество баллов индекса цитирования равно 147.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Содержит 168 страниц машинописного текста, включая 11 таблиц, список литературы из 164 наименований и приложения. Иллюстративный материал представлен рисунками, компьютерными графиками. Их общее количество равно 72.

Автор выражает глубокую признательность доктору физико-математических наук, профессору Дуйшеналиеву Т.Б. за постановку задачи и научное руководство.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

Во **введении** проведены краткий обзор и систематизация результатов научных исследований, посвященных решениям краевых задач и мерам деформации механики деформируемого твердого тела.

В **первой главе** диссертации обобщаются научные исследования в области механики деформируемого твердого тела, раскрывается его современное состояние. Рассмотрены работы, в которых освещаются различные варианты общих решений уравнений линейной теории упругости, постановки краевых задач в перемещениях или напряжениях, обсуждаются условия совместности деформаций. Многочисленность работ свидетельствует о важности и актуальности этих вопросов для механики.

Приводится нетрадиционный подход к решению статических краевых задач, предложенный Т.Б.Дуйшеналиевым. Его решение построено в эйлеровой системе отсчета и координатах конечного состояния, и позволяет, при этих условиях, описать тензором линейных деформаций Коши конечные деформации твердого тела.

На основании сопоставления различных подходов к решению статических краевых задач, автор предлагает по-новому взглянуть на возможности тензора линейных деформаций для описания процесса деформирования различных металлических конструкций. Ставится цель и формулируются задачи диссертационного исследования.

Во **второй главе** рассматривается доказательство возможностей тензора Коши как характеристики деформированного состояния при конечных уровнях деформаций упругих тел.

Пусть  $u_i(x)$  - поле перемещения, удовлетворяющее уравнениям статической краевой задачи в области  $V$  и заданным условиям на ее поверхности  $S$  (рис. 1). С помощью векторов

$$z_i = x_i - u_i(x), \quad x_i \in V \quad (1)$$

можно определить область  $V_0$ , которую тело занимало в начальном состоянии (рис. 1).

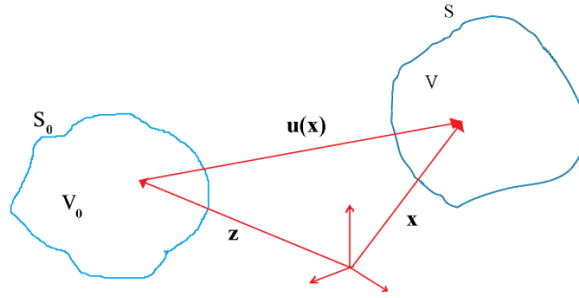


Рис. 1. Состояние равновесия  $(V, S)$  и начальное состояние  $(V_0, S_0)$ .

Поверхность  $S_0$  начального состояния определяется теми же векторами

$$z_i = x_i - u_i(x), \quad x_i \in S. \quad (2)$$

Вектор относительного перемещения представим в виде

$$du_i = u_{i,j} dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ ,  $\omega_{ij} = (u_{i,j} - u_{j,i})/2$ .

Проекция относительного перемещения на направление вектора  $dx_i$

$$du_i n_i = \varepsilon_{ij} n_i dx_j = \varepsilon dx,$$

где  $n_i$  - направляющие косинусы направления вектора  $dx_i$ ,

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} n_i n_j, \quad dx = (dx_i dx_i)^{1/2}. \quad (4)$$

Для краткости далее матрицу  $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij})$  обозначим через

$$g = (\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}).$$

В развернутом виде эта матрица имеет вид



$$g = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon \end{bmatrix}$$

Добавим в правую часть выражения (3) равное нулю слагаемое  $\varepsilon dx_i - \varepsilon \delta_{ij} dx_j$  и на-пишем его в виде

$$du_i = \varepsilon dx_i + (\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) dx_j + \omega_{ij} dx_j, \quad (5)$$

Как показано на рис. 2, выражение (5) разлагает вектор относительного пере-мещения на векторы:

- удлинения в направлении вектора  $dx_i$  -  $\varepsilon dx_i$ ,
- сдвига -  $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) dx_j$ ,
- вращения -  $\omega_{ij} dx_j$ .

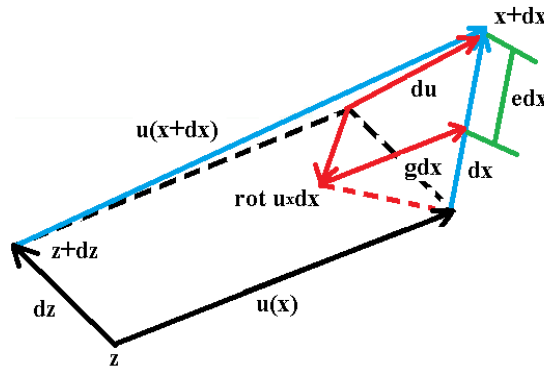


Рис. 2. Разложение вектора относительного перемещения.

Проверим, что векторы сдвига и вращения перпендикулярны к вектору  $dx_i$ . Скалярное произведение этих векторов на вектор  $dx_i$

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) dx_j dx_i = (\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) n_j n_i dx^2 = (\varepsilon_{ij} n_j n_i - \varepsilon \delta_{ij} n_j n_i) dx^2 = (\varepsilon - \varepsilon) dx^2 = 0;$$

$$\omega_{ij} dx_j dx_i = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) dx_j dx_i = \frac{1}{2} (u_{i,j} dx_j dx_i - u_{j,i} dx_j dx_i) = \frac{1}{2} (u_{i,j} dx_i dx_j - u_{i,j} dx_i dx_j) = 0.$$

Квадрат длины вектора сдвига

$$(\varepsilon_{ki} - \varepsilon \delta_{ki})(\varepsilon_{kj} - \varepsilon \delta_{kj}) dx_i dx_j = (\varepsilon_{ki} - \varepsilon \delta_{ki})(\varepsilon_{kj} - \varepsilon \delta_{kj}) n_i n_j dx^2 = (\varepsilon_{ki} \varepsilon_{kj} n_i n_j - \varepsilon^2) dx^2 = \gamma^2 dx^2$$

где  $\gamma = (\varepsilon_{ki} \varepsilon_{kj} n_i n_j - \varepsilon^2)^{1/2}$  - относительная деформация сдвига.

Из рис.2 следует

$$dz_i = dx_i - du_i. \quad (6)$$

Возведем обе части выражения (6) в квадрат и полученное представим в виде

$$dx^2 - dz^2 = (2\varepsilon_{ij} - u_{k,i} u_{k,j}) dx_i dx_j = 2a_{ij} dx_i dx_j, \quad (7)$$

где

$$a_{ij} = \varepsilon_{ij} \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} . \quad (8)$$

Если произведение  $u_{k,i} u_{k,j}$  пренебрежимо мало по сравнению с  $u_{k,i}$ , то деформированное состояние можно характеризовать в  $\varepsilon_{ij}$ . В противном случае деформации должны представляться в  $a_{ij}$ . В соответствии с этим  $\varepsilon_{ij}$  стали называть тензором малых и бесконечно малых деформаций, а  $a_{ij}$  - тензором конечных деформаций.

В (5) все параметры, за исключением  $\omega_{ij}$ , определяется в  $\varepsilon_{ij}$ . Тут нетрудно указать то, что и  $\omega_{ij}$  являются функциями только  $\varepsilon_{ij}$ . Эти величины связаны между собой соотношением

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i} \quad (9)$$

Учитывая это, можно сказать, что вектор относительного перемещения (5) являются только функцией от  $\varepsilon_{ij}$ , что и требовалось доказать.

В **третьей главе** приведены разработанная авторами математическая модель, ее численная реализация, а также результаты компьютерного моделирования (численные эксперименты) процессов деформирования на основе тензора линейных деформаций Коши в системе Matlab при растяжении-сжатии цилиндра сплошного сечения и изгибе прямоугольной плиты из различных материалов (сталь, медь, алюминий). Модель основана на подходе Т.Б.Дуйшеналиева.

Обратимся к следующей статической краевой задаче

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad x_i \in V \quad (a)$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0, \quad x_i \in V \quad (b)$$

$$\sigma_{ji} n_j = p_i, \quad x_i \in S, \quad (c)$$

Допустим, найдены  $\sigma_{ij}(x)$ , удовлетворяющие уравнениям (a) - (c). В таком случае, компоненты линейного тензора деформаций находятся легко

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} (-\nu \delta_{ij} \sigma_{kk} + (1 + \nu) \sigma_{ij}) \quad (d)$$

Установленное таким образом поле тензора Коши определяет далее все - перемещения, вращения и разность (7). Это непосредственно следует из формулы Чезаро:

$$u_i(x) = u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0) (x_j - x_j^0) + \int (\varepsilon_{ik}(y) + (x_j - y_j) (\varepsilon_{k,ij}(y) - \varepsilon_{k,ji}(y))) dy_k, \quad (e)$$

где  $u_i(x^0)$ ,  $\omega_{ij}(x^0)$  - постоянные интегрирования. Им можно придать произвольные, в том числе и равные нулю, значения.

Важно то, что из области определения статических краевых задач никакие перемещения уже не произойдут. Решением (e) определяются перемещения, которые произошли до того, как установилось равновесие. Этими пе-

ремещениями создано то напряженное состояние  $\sigma_{ij}(x)$ , которое находится в равновесии с массовыми силами в объеме  $V$  и внешними усилиями на поверхности  $S$ .

Перемещения (е) являются функциями только  $\varepsilon_{ij}$ . В таком случае, такими являются и определяемые из (е) градиенты перемещений и компоненты вращения, которые фигурируют в выражениях (3), (7). Отсюда следует, что вектор относительного перемещения (3) и разность квадратов (7), следовательно, и элементы тензора Альманси, являются функциями только  $\varepsilon_{ij}$ .

**Растяжение тела цилиндрической формы.** Рассматривалось массивное тело цилиндрической формы из стали 35ХМЛ, основание которого закреплено на плоскости  $xOy$  (рис. 3).

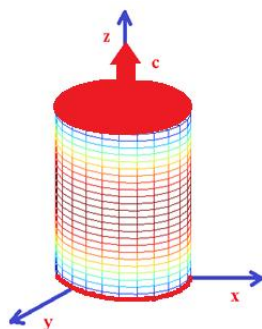


Рис.3. Тело цилиндрической формы из стали 35ХМЛ с внешним усилием  $c$  на торце.

На верхнем основании цилиндра действуют растягивающие усилия интенсивностью  $c$ . В декартовой системе координат, оси которой обозначим через  $x_1, x_2, x_3$ , деформированное тело занимает область  $V$

$$2 \leq x_1 \leq 4, \quad 0 \leq x_2 \leq 2\pi, \quad 0 \leq x_3 \leq h \quad (10)$$

Найден тензор Коши для этого случая

$$\varepsilon_{ij} = c \begin{pmatrix} \cos x_2 & \frac{1}{2} \sin x_2 (1 - x_1) & 0 \\ \frac{1}{2} \sin x_2 (1 - x_1) & x_1 \cos x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Перемещения для цилиндра запишем в виде:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \omega_{12}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) (x_2 - x_2^0) + \\ &\quad + \omega_{13}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) (x_3 - x_3^0) + c x_1 \cos x_2 \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \omega_{21}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) (x_1 - x_1^0) + \\ &\quad + \omega_{23}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) (x_3 - x_3^0) + c x_1 \sin x_2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \omega_{31}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) (x_1 - x_1^0) + \\ &\quad + \omega_{32}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) (x_2 - x_2^0) + c x_3, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  - координаты начальной точки линии интегрирования. В качестве  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  можно использовать координаты любой точки области  $V$ .

$u_1(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ ,  $u_2(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ ,  $u_3(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$  - постоянные интегрирования, соответствующие параллельному переносу тела.

$$\omega_{ij}(x_1^o, x_2^o, x_3^o) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12}(x_1^o, x_2^o, x_3^o) & \omega_{12}(x_1^o, x_2^o, x_3^o) \\ \omega_{21}(x_1^o, x_2^o, x_3^o) & 0 & \omega_{23}(x_1^o, x_2^o, x_3^o) \\ \omega_{31}(x_1^o, x_2^o, x_3^o) & \omega_{32}(x_1^o, x_2^o, x_3^o) & 0 \end{pmatrix}$$

- постоянные интегрирования, соответствующие жесткому повороту тела.

Параллельный перенос и жесткий поворот тела не оказывают влияния на деформации. В приведенных ниже примерах в системе Matlab показаны эти преобразования. Рассмотрены конструкции из стали цилиндрической формы при различных значениях внешних усилий  $s$ . Значение модуля Юнга для стали составляет 210 ГПа.

Осуществлены расчеты при  $s=0.00$  ГПа,  $s=2.5$  ГПа,  $s=5$  ГПа,  $s=7.5$  ГПа и  $s=10$  ГПа.

На рис. 4 показана область  $V$  до приложения деформирующих внешних сил (т.е. в начальном состоянии). На рис. 5 и 6 представлены результаты преобразования (растяжение) области  $V$ , соответственно при нагрузках  $s=5$  ГПа и  $s=10$  ГПа.

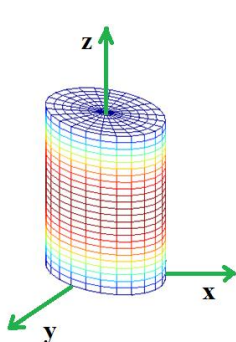


Рис.4.  $s=0$

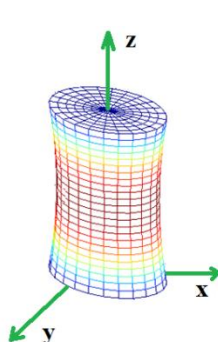


Рис.5.  $s=5$  ГПа

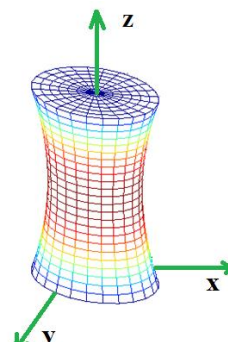


Рис.6.  $s=10$  ГПа

На рис. приведена зависимость напряжений от деформаций в точке среднего сечения сплошного цилиндра из стали 35ХМЛ.

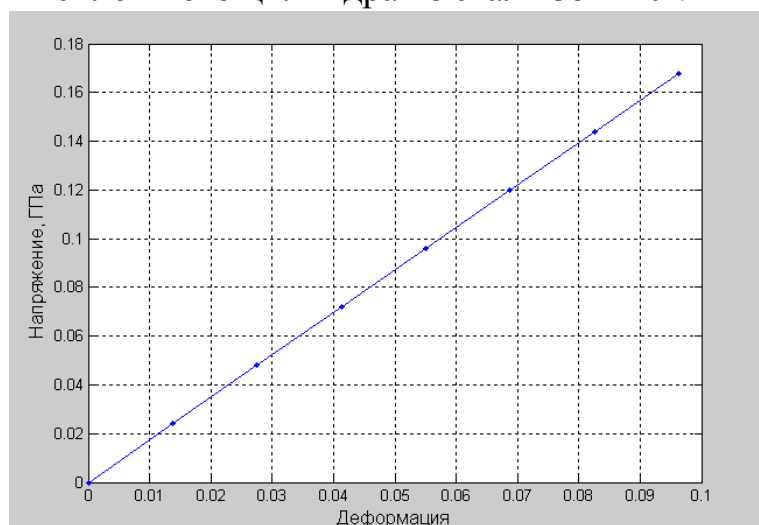


Рис.7. Зависимость  $\sigma_x$  от  $\epsilon_x$  (в точке с координатами (6; 4.5; 2.6)).

## Медь марки МЗр

Рассмотрим цилиндрическую конструкцию из меди при различных значениях внешних усилий  $s$ . Значение модуля Юнга для меди МЗр принято равным 110 ГПа. Расчеты произведены для всех точек внутри объема цилиндра при значениях внешней нагрузки, равных  $s = 0.00$  ГПа,  $s = 2,5$  ГПа,  $s = 5$  ГПа,  $s = 7,5$  ГПа и  $s = 10$  ГПа.

На рис.8 и 9 приведены зависимости напряжений от деформаций в одной точке среднего сечения сплошного цилиндра из меди МЗр.

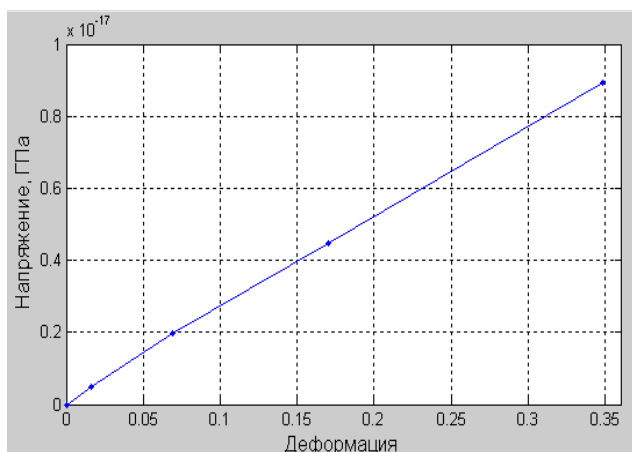


Рис.8. Зависимость  $\sigma_x$  от  $\epsilon_x$  (в точке с координатами (6.3;  $4.5 \cdot 10^{-16}$ ; 2.6))

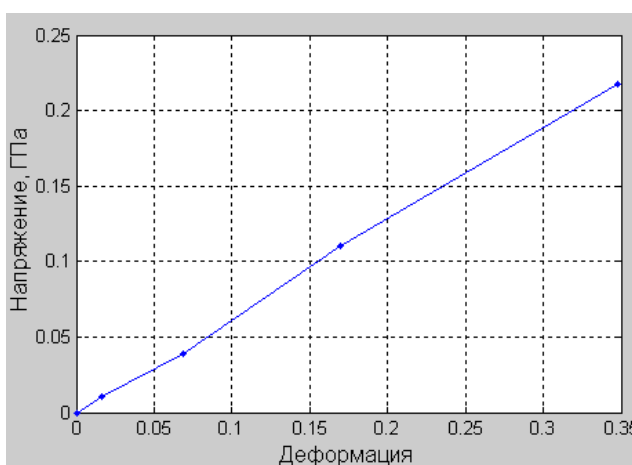


Рис.9. Зависимость  $\sigma_y$  от  $\epsilon_y$  (в точке с координатами (6.3;  $4.5 \cdot 10^{-16}$ ; 2.6))

## Алюминий марки А995

Моделировалось деформирование сплошного цилиндра из алюминия А995 ( $E=70$  ГПа) при значениях внешней нагрузки, равных  $s=0.00$  ГПа,  $s=2,5$  ГПа,  $s=5$  ГПа,  $s=7,5$  ГПа и  $s=10$  ГПа. Нагрузки осознанно задавались таким образом, чтобы показать возможности предлагаемой математической модели по описанию больших деформаций. При этом выходили за пределы упругой работы материала.

Зависимость напряженно-деформированного состояния в точке внутри сплошного цилиндра из алюминия А995 приведена на рис. 10 и 11.

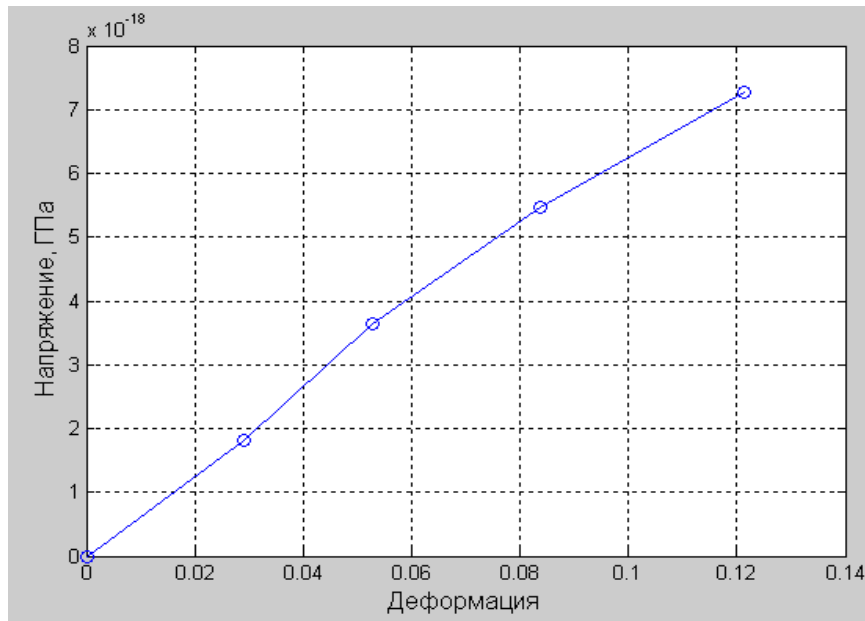


Рис.10. Зависимость  $\sigma_x$  от  $\epsilon_x$  (в точке с координатами (7.4;  $3.2 \cdot 10^{-16}$ ; 2.8))

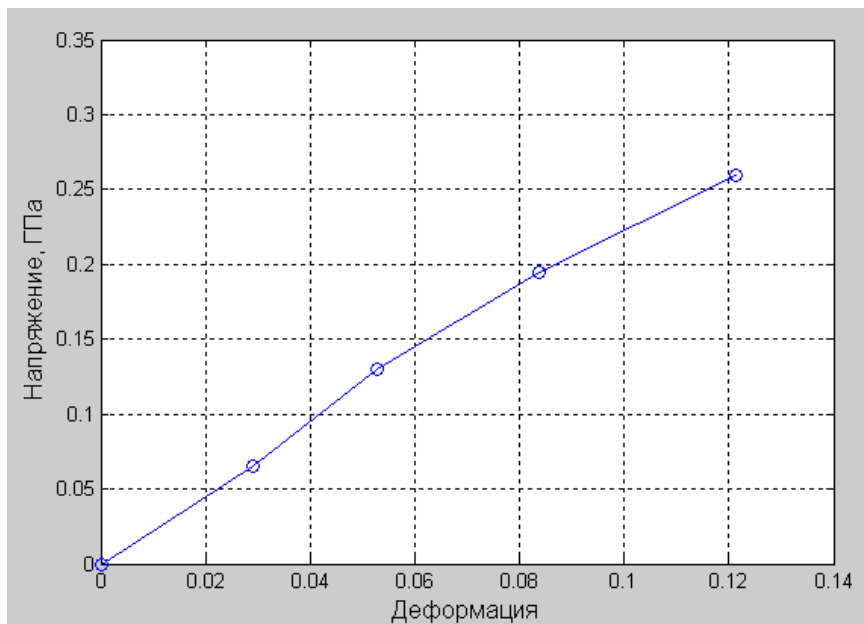


Рис.11. Зависимость  $\sigma_y$  от  $\epsilon_y$  (в точке с координатами (7.4;  $3.2 \cdot 10^{-16}$ ; 2.8))

### Изгиб прямоугольной пластины

В качестве примера рассмотрим задачу изгиба пластины. Внешние нагрузки интенсивностью  $s$  приложены на левую и правую торцевые грани пластины, и создают изгибающие моменты в плоскости  $x_1 O x_2$ .

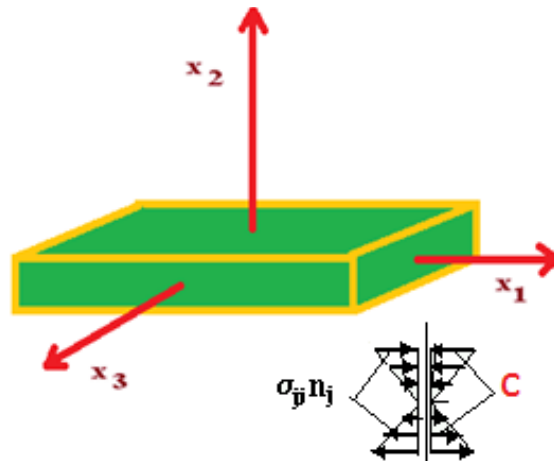


Рис. 12. Пластина с нагрузкой в виде изгибающих моментов по торцам.

Требуется найти во внутренних точках этой плиты напряжения, деформации и перемещения.

В декартовой системе координат, оси которой обозначим через  $x_1, x_2, x_3$ , деформированное тело занимает область  $V$ :

$$0 \leq x_1 \leq 6, \quad -0.1 \leq x_2 \leq 0.1, \quad -1 \leq x_3 \leq 1 \quad (13)$$

Для этой краевой задачи найден тензор Коши

$$\varepsilon_{ij} = c x_3 (-v (\delta_{i1} \delta_{j1} + \delta_{i3} \delta_{j3}) + \delta_{i2} \delta_{j2}) / E. \quad (14)$$

Этот тензор в полной мере характеризует деформированное состояние приведенной выше пластины. Его компоненты достаточны для определения поля перемещения. Используя формулы Чезаро, находим это поле в виде

$$u_1(x) = u_1(x^0) + \omega_{1j}(x^0) (x_j - x_j^0) - c v x_3 (x_1 - x_1^0) / E;$$

$$u_2(x) = u_2(x^0) + \omega_{2j}(x^0) (x_j - x_j^0) + x_3 (x_2 - x_2^0) / E;$$

$$u_3(x) = u_3(x^0) + \omega_{3j}(x^0) (x_j - x_j^0) - c ((x_2^2 + v (x_3^2 - x_1^2) - x_2^0 (2x_2 - x_2^0) - v ((x_3^0)^2 - x_1^0 (2x_1 - x_1^0))) / (2E),$$

где  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  - координаты начальной точки линии интегрирования.

### Сталь 35ХМЛ

Рассмотрим изгиб пластины из стали марки 35ХМЛ (215 ГПа). Необходимые расчеты опираются на модель Т.Б.Дуйшеналиева и проведены компьютерной программой, разработанной авторами в среде Matlab.

На рис. 13, 14, 15, 16, 17 и 18 область  $V$  до приложения деформирующих сил (т.е. в начальном состоянии) показана снизу. Сверху представлено преобразование (изгиб) области  $V$ , соответствующее нагрузке  $c$ .

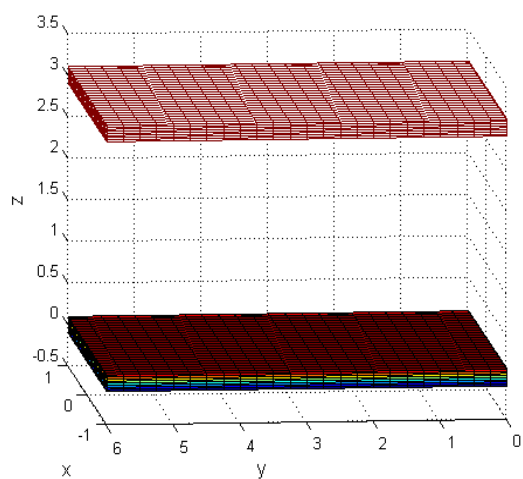


Рис. 13. При  $c=0$  ГПа

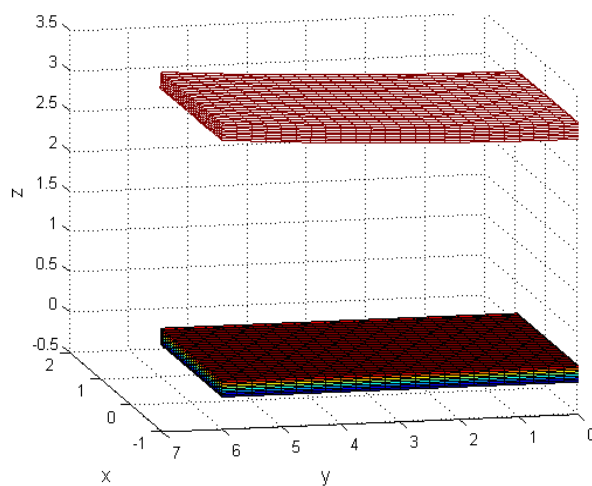


Рис.14. При  $c=2$  ГПа

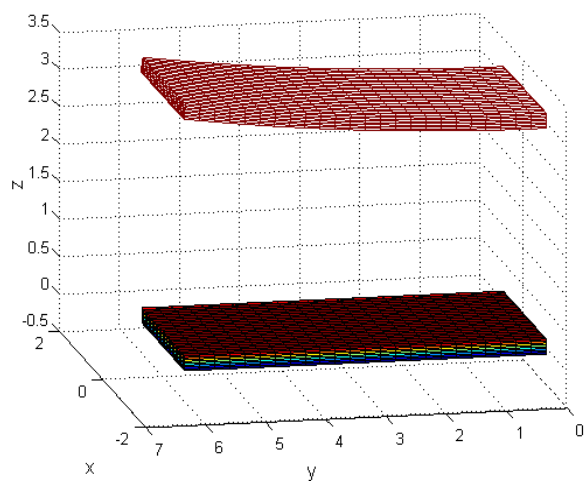


Рис.15. При  $c=4$  ГПа

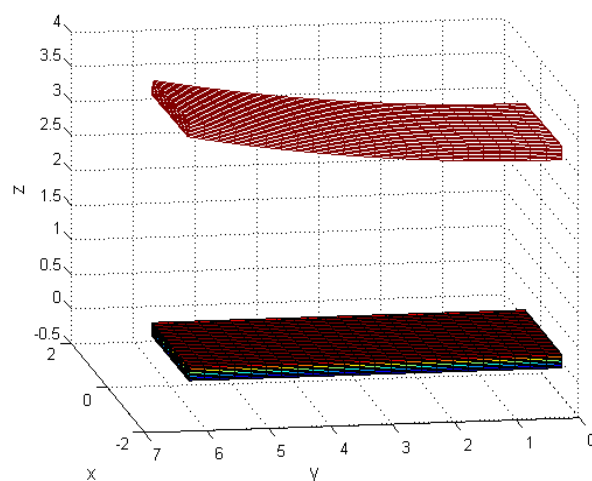


Рис.16. При  $c=6$  ГПа

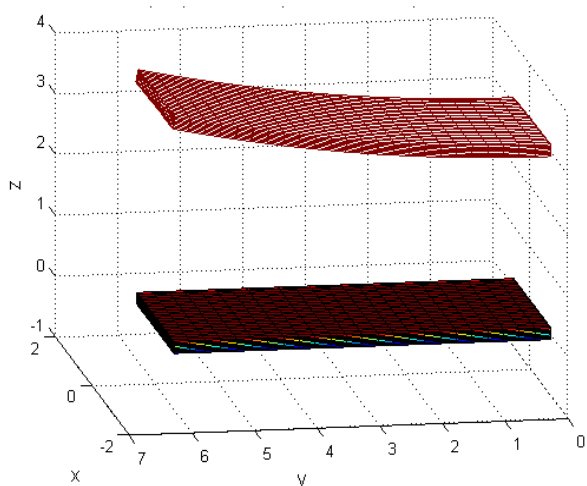


Рис.17. При  $c=8$  ГПа

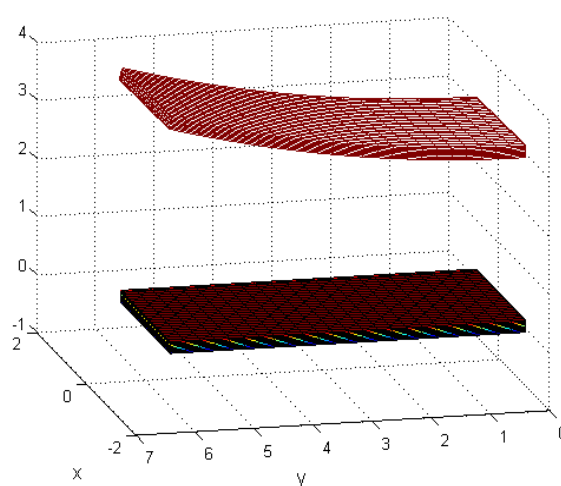


Рис.18. При  $c=10$  ГПа

Значения компонентов напряжений и деформаций в одной точке внутри прямоугольной пластины из стали 35ХМЛ приведены в табл. 1.



Таблица 1- Значения компонентов напряжений и деформаций

$\epsilon$ , ГПа	0	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5
$\sigma_y$ , ГПа	0	7.5000e-002	1.2500e-001	1.7500e-001	2.2500e-001	2.7500e-001
$\epsilon_y$	0	3.5714e-004	5.9524e-004	8.3333e-004	1.0714e-003	1.3095e-003

Диаграмма «напряжение-деформация» плиты из стали 35ХМЛ (215 ГПа) приведено на рис. 19.

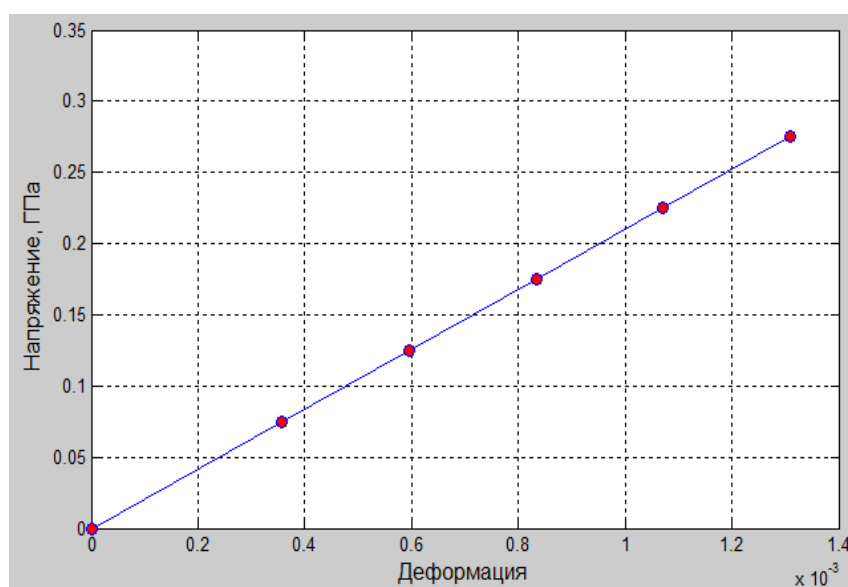


Рис.19. Зависимость  $\sigma_y$  от  $\epsilon_y$  (в точке с координатами (-4.1703e-001 5.0079e+000 3.4193e+000))

### Медь МЗр

В качестве примера рассматривался изгиб пластины из меди марки МЗр ( $E=110$  ГПа). Необходимые расчеты проведены на основании предлагаемой математической модели деформирования упругих тел и компьютерной программы, разработанной авторами в среде Matlab.

Значения компонентов напряжений и деформаций в той же точке прямоугольной пластины из меди МЗр приведены в табл. 2.

Таблица 2- Значения компонентов напряжений и деформаций

$\epsilon$ , ГПа	0	0.8	1.6	2.4	3.2	4
$\sigma_y$ , ГПа	0	4.0000e-002	8.0000e-002	1.2000e-001	1.6000e-001	2.0000e-001
$\epsilon_y$	0	3.6364e-004	7.2727e-004	1.0909e-003	1.4545e-003	1.8182e-003

График зависимости «напряжение-деформация» плиты из меди МЗр (110 ГПа) приведено на рис. 20.

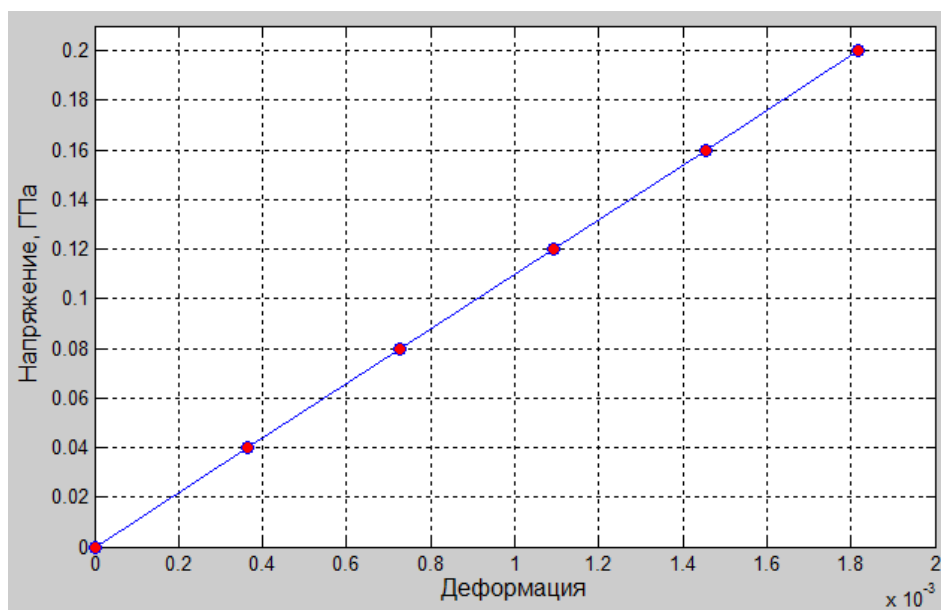


Рис.20. Зависимость  $\sigma_y$  от  $\epsilon_y$  (в точке с координатами (-4.1718e-001; 5.0109e+000; 3.6016e+000))

### Алюминий А995

Рассматривается изгиб пластины из алюминия марки А995 ( $E=70$  ГПа). Необходимые расчеты напряженно-деформированного состояния пластины проведены на основе предложенной математической модели деформирования упругих тел и компьютерной программы, разработанной авторами в среде Matlab. Напряжения и деформации в одной точке внутри объема пластины при различных значениях внешней нагрузки приведены в табл. 3.

Таблица 3 - Напряжения и деформации в одной точке внутри объема пластины при различных значениях внешней нагрузки

с, ГПа	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\sigma_y$ , ГПа	0	1.0000e-002	2.0000e-002	3.0000e-002	4.0000e-002	5.0000e-002
$\epsilon_y$	0	1.4286e-004	2.8571e-004	4.2857e-004	5.7143e-004	7.1429e-004

Диаграмма «напряжение-деформация» плиты из алюминия А995 приведено на рис.21.

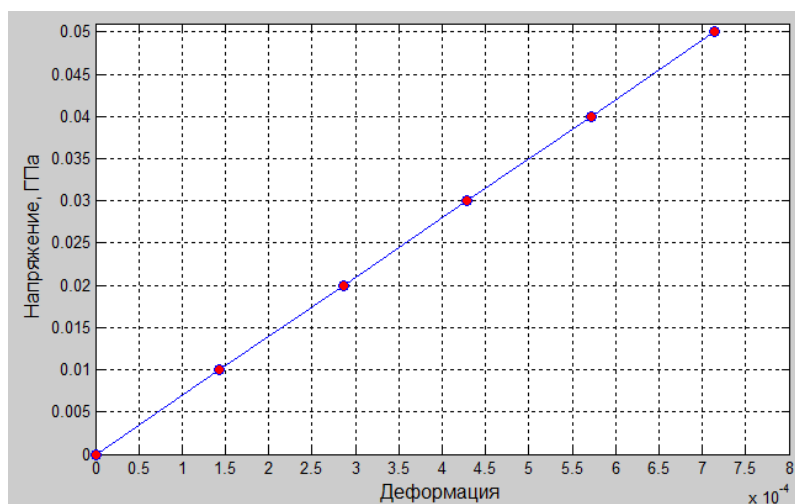


Рис.21. Зависимость  $\sigma_y$  от  $\varepsilon_y$  (в точке с координатами  $(-4.1687e-001; 5.0043e+000; 3.2060e+000)$ )

На рис. 22 представлены зависимости «деформация-перемещение» для рваных материалов.

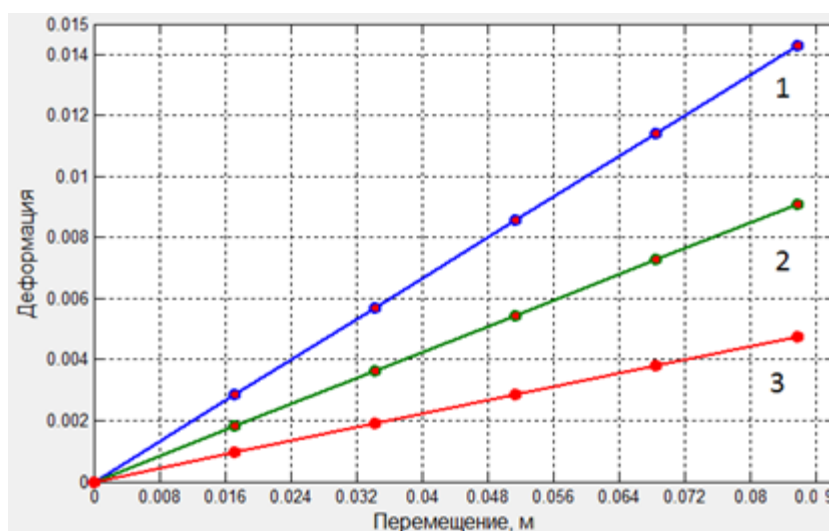


Рис. 22. Зависимость  $\varepsilon_y = f(u_y)$  для фиксированной точки объема  $V$  прямоугольной плиты из стали (3), меди (2) и алюминия (1)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Показано, что тензор линейных деформаций Коши, считающимся пригодным только для бесконечно малых деформаций, при нетрадиционном подходе к решению краевых задач с использованием пространственных координат, может являться полноценной характеристикой деформированного состояния и при конечных величинах деформаций. Это важный результат, имеющий большое значение для теории деформирования материалов и конструкций.

2. Математическая модель, предложенная Т.Б.Дуйшеналиевым для описания изменения формы упругих тел и развитая на основе исследований автора, может быть использована для изучения поведения изделий и конструкций при конечных и больших деформациях растяжения-сжатия и изгиба.
3. Возможности пакета Matlab являются вполне достаточными для выполнения расчетов, необходимых по теме диссертационной работы и представления результатов в наглядной форме.
4. В практическом плане предлагаемый метод может быть полезным для статических деформационных расчетов реальных конструкций из металлов и других материалов.

### СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Козубай И.** Моделирование разрушения слоистого композита [Текст]/ Козубай И.//Материалы Международной научно-практической конференции «Перспективы развития научно- инновационной деятельности». - Бишкек, 2010, с. 21-23.
2. **Козубай И.** Модель разрушения бетона как композиционного материала [Текст]/ Козубай И., Камаев Р.Р., Капаров А.С. // Материалы научной конференции «Современные проблемы физики и смежных дисциплин». Институт физико- технических проблем и материаловедения им.Ж.Жеенбаева НАН КР. Журнал №2 .- Бишкек, 2010, с.101-104.
3. **Козубай И.** Численные модели динамики разрушения [Текст]/ Козубай И.// Известия КГТУ им.И.Раззакова.№24.- Бишкек, 2011, с. 213-214.
4. **Козубай И.** Экспериментальное исследование разрушения композитов при динамическом нагружении [Текст]/ Козубай И.//Известия КГТУ им.И.Раззакова.№24.- Бишкек, 2011, с. 215-218.
5. **Козубай И.** Расчет перемещений тел прямоугольной формы тензором Коши [Текст]/ Козубай И.// Известия КГТУ им.И.Раззакова. №32(часть 2).- Бишкек, 2014, с. 134-137.
6. **Козубай И.** Расчет деформированного состояния цилиндрических форм тензором Коши [Текст]/ Козубай И.// Известия КГТУ им.И.Раззакова. №32(часть 2).- Бишкек, 2014, с.138-141.
7. **Козубай И.** Классический и нетрадиционный подходы к решению статических краевых задач механики деформируемого твердого тела [Текст]/Козубай И.//Известия Кыргызского Национального университета им. Ж.Баласагына. №8, -Бишкек, 2014, с. 26-31.
8. **Козубай И.** Тензор Коши как полная характеристика деформированного состояния [Текст]/Козубай И., Т.Б.Дуйшеналиев //Труды международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2014» (АПВПМ-2014), посвященной 50-летию Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского Отделения Российской Академии Наук (ИВМиМГ СО РАН). - Новосибирск, Россия.

9. **Козубай И.** Расчет деформированного состояния конструкций тензором Коши [Текст]/ Козубай И.// Известия Кыргызского Национального университета им. Ж.Баласагына №8, Бишкек, 2014, с. 22-26.
10. **Козубай И.** Использование ряда Тейлора для нахождения максимального и минимального значения перемещения точки напряженно-деформированного состояния конструкций [Текст]/ Козубай И., Т.Б.Дуйшеналиев //Техника машиностроения, Том 22 .-М, Россия, 2015, с. 45-48
11. **Козубай И.** Математическое моделирование поведения пластин под нагрузкой [Текст]/ Козубай И., Т.Б.Дуйшеналиев //Прикаспийский журнал «Управление и высокие технологии». №2.-Астрахань, Россия. 2015, с. 129-136.
12. **Козубай И.** Математическое моделирование поведения различных конструкций из алюминия, меди, стали под нагрузкой [Текст]/ КозубайИ., Т.Б.Дуйшеналиев // Вестник КНПУ им. Абая. №2(45). - Алматы, Казахстан. 2015, с. 93-97.
13. **Козубай И.** Математическое моделирование поведения различных конструкций под нагрузкой с описанием поверхностей [Текст]/Козубай И., Т.Б.Дуйшеналиев //Техника машиностроения, № 3. М, Россия. 2015, с. 42-46.

## РЕЗЮМЕСИ

Козубай Искендердин диссертациясынын  
темасы: «Серпилгичтүү металлдардын чыңалуусун, деформациясын жана  
которулуусун моделдөө» 01.02.04-«Деформацияланган катуу телолордун  
механикасы» адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты  
илимий даражасына изденүү иши

**Негизгисөздөр:** деформацияланган катуу заттарынын механикасынын чектик теңдемелери, деформация жана чыңалуу тензорлору, серпилгичтүү деформация, ар түрдүү заттардан конструкциялар, чою, кысуу, ийүү.

Диссертациялык иште өзгөрө турган катуу заттардын негизги түшүнүктөрү деформациянын негиздери берилген. Өзгөрүүгө учураган кыймыл, башкача айтканда бөлүкчөлөрдүн бири бирине карата абалынын өзгөрүү кыймылдары Коши тензору жана чыңалуу тензорлору аркылуу туюндурулат. Андыктан деформация болгон учурда которулуштун градиентинин мааниси жогору.

Бул илимий иште серпилгичтүү катуу заттардын чоң мааниде өзгөрүшү деформациянын компоненттери которулуштун градиентинен түз сызыктуу көзкарандылыкта болоору далилденет.

Жаңы көз караштын негизинде серпилгичтүү катуу заттардын деформациясы үчүн математикалык модель түзүлдү.

Андан тышкары Matlab чөйрөсүндө чою, кысуу, ийүү учурларында деформациялык абалдарын аныктоо үчүн программа түзүлдү (алюминий, жез, болот).

Эсептөөлөрдүн жыйынтыктары айкын түрдө көрсөтүлдү.

## РЕЗЮМЕ

диссертации Козубай Искендера на тему:

**“Моделирование конечных деформаций, напряжений и перемещений упругих тел из металлических материалов”,**  
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела.

**Ключевые слова:** краевые задачи механики деформируемого твердого тела, тензоры деформаций и напряжений, упругое деформирование, конструкции из металлических материалов, растяжение-сжатие, изгиб.

Разработана математическая модель деформирования упругих тел на основе тензора линейных деформаций Коши. Построенная математическая модель реализована в виде собственных алгоритмов и компьютерных программ в системе Matlab. Проведены многочисленные численные эксперименты на определение деформаций, напряжений и перемещений упругих тел при растяжении-сжатии и изгибе конструкций из различных материалов (сталь, медь, алюминий).

Результаты расчетов представлены в наглядной форме.

## SUMMARY

dissertation on the topic Kozubai Iskender:

**"Modeling of finite deformation, stress  
and displacement of elastic bodies of metallic materials "**

presented for the degree of candidate of physical and mathematical sciences on a  
specialty 01.02.04 - mechanics of deformable solids.

**Keywords:** boundary value problems of solid mechanics, strain and stress tensors, elastic deformation, the structure of metallic materials, tensile, compression, flexure.

A mathematical model of deformation of elastic bodies on the basis of the Cauchy strain tensor linear. The constructed mathematical model is implemented in the form of proprietary algorithms and computer programs in Matlab system. Numerous numerical experiments were conducted to determine the strain, stress and displacement of elastic bodies in tension, compression and bending structures made of various materials (steel, copper, aluminum).

The calculation results are presented in graphic form.



**КОЗУБАЙ ИСКЕНДЕР**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ,  
НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ  
ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

---

Подписано в печать: 16.05.2016 г.

Формат бумаги 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бумага офс. Печать офс. Объем 2,4 п.л. Тираж 150 экз.

---

Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ “Текник” КГТУ им. И.Раззакова, т.: 54-29-43

e-mail: [beknur@mail.ru](mailto:beknur@mail.ru)