Национальная академия наук Кыргызской Республики
Институт математики
Кыргызский Национальный Университет им.Ж.Баласагына

Диссертационный совет Д 01.22.647

На правах рукописи
УДК 517.97

Дуйшеналиева Урумкан Эрмековна

Точечное управление колебательными процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями

01.01.02– «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат диссертации на соискание
ученой степени кандидата физико-математических наук

Бишкек -2023

Работа выполнена на кафедре математики, физики и информатики Таласского государственного университета

Научный руководитель: **Керимбеков Акылбек**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики Кыргызско-Российского Славянского университета имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

Официальные оппоненты: **Искандаров Самандар**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики

Туркманов Жылдызбек Каныбекович
кандидат физико- математических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики и математики Бишкекского государственного университета имени К.Карасаева

Ведущая организация: Кафедра прикладной математики Ташкентского государственного экономического университета, Узбекистан, 100066, г. Ташкент, ул. Ислама Каримова,49

Защита диссертации состоится 2 марта 2023 года в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 01.22.647 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374.

Идентификатор защиты-https://vc1.vak.kg/b/012-ltf-b7j-lgy

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики (720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а), и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына, (720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547) и на сайте www.math.kg; www.vak.kg;

Автореферат разослан 31 января 2023 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико- математических наук, доцент Шаршембиева Ф.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. В математических моделях многих процессов, где внешние воздействия являются периодическими, возникают функции, компоненты которых меняют знаки на любом достаточно большом интервале, то есть являются колеблющимися. Такие же колебания возникают во многих управляемых процессах.

В настоящее время методы теории оптимального управления с распределенными параметрами все более проникают в различные отрасли науки и техники. Поэтому исследование математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных или интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма и Вольтерра является актуальным. Однако задачи с колебательными процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями мало изучены, имеется лишь небольшое количество работ А.Ковалевски (2011), А.Ж. Хуршудяна (2014) и др.

В диссертации исследованы нелинейные задачи с упругими колебаниями, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями в случаях, когда колебания происходят под действием одного точечного подвижного источника и когда внешнее воздействие сосредоточено в нескольких фиксированных точках. При исследовании установлены достаточные условия однозначной разрешимости таких нелинейных задач при наличии одного и многоточечного внешних воздействий.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Диссертация выполнена в рамках научного проекта № КР-05 (номер гос. регистрации № 0007207) «Математические методы оптимального точечного управления технологическими процессами описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных»(2016-2017 гг.) МОиН КР.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование задач нелинейного оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда колебания происходят под действием внешних точечных источников, и получение достаточных условий существования и единственности решения задачи нелинейной оптимизации.

Задачи исследования:

- построить обобщенное решение краевой задачи в случае, когда управляемый колебательный процесс описывается фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением;
- построить обобщенное решение сопряженной краевой задачи;
- получить условия оптимальности подвижного точечного управления и условия однозначной разрешимости основной и сопряженной краевых задач управляемого процесса.
- построить решение задачи нелинейной оптимизации при точечных управлениях и исследовать сходимость их приближений по управлению, оптимальному процессу и функционалу;
- привести численный пример, подтверждающий полученные теоретические результаты.

Научная новизна исследования. Впервые, на примере точечного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями, разработан алгоритм построения решения нелинейной задачи оптимизации и его приближений. Результаты получены впервые и характеризуются как дальнейшее развитие методов теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, в частности, установлено, что коэффициенты Фурье обобщенного решения основной и сопряженной краевых задач могут быть определены, как решения линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма второго рода; установлено, что оптимальное управление может быть определено, как решение нелинейного интегрального уравнения специфического вида (двухкратная нелинейность), удовлетворяющее дополнительному условию в виде неравенства относительно функции источника; найдены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями при точечном управлении; разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана их сходимость по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

Теоретическая и практическая ценность. Практическое значение полученных в диссертации алгоритмов построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации при точечном управлении состоит в том, что они могут быть применены в различных современных технологических процессах и производствах, использующих подвижные управляемые воздействия на колебательные системы.

Полученные результаты также имеют теоретическое значение для развития новых качественных и конструктивных методов решений задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами с подвижными управлениями.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

- доказано, что в задаче нелинейной оптимизации, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями с интегральным оператором Фредгольма при наличии подвижного точечного и фиксированных многоточечных источников искомое оптимальное управление определяется соответственно как решение нелинейного интегрального уравнения и системы нелинейных интегральных уравнений специфических видов;
- найдены достаточные условия существования решения нелинейного интегрального уравнения и системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода;
- доказано существование полного решения поставленной задачи нелинейной оптимизации в случае монотонности функции внешнего источника по функциональной переменной;
- доказаны сходимости приближений оптимального управления, трех видов приближений оптимального процесса и минимального значения функционала по норме гильбертова пространства квадратично суммируемых функций;
- выявлены специфические особенности влияния интегрального слагаемого на построение решения рассматриваемой задачи нелинейной оптимизации;
- сделан численный расчет, подтверждающий полученные теоретические выводы.

Личный вклад соискателя. В опубликованных работах в соавторстве, постановка задачи, обсуждение результатов принадлежит научному руководителю, а основные результаты: построение обобщенного решения, вывод условия оптимальности, достаточные условия существования решения нелинейного интегрального уравнения, алгоритм для построения точного и приближенного решений нелинейной задачи оптимизации и сходимость приближенных решений получены соискателем.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации регулярно обсуждались на научных семинарах (научный руководитель проф. Керимбеков А.) кафедры «Прикладная математика и информатика» Кыргызско-Российского Славянского Университета и на семинаре Института математики НАН КР (руководитель-академик А.А. Борубаев) и на следующих международных конференциях:

– III международная конференция “Актуальные проблемы в теории управления, топологии и операторных уравнений”, Иссык-Куль, Чолпон-Ата, 19-22 июня, 2017;

– VI конгресс математического общества тюркоязычных стран, Астана, Казахстан, 2-5 октября, 2017;

–8-я международная конференция “Математический анализ, дифференциальные уравнения и приложения”- MADEA-8, Чолпон-Ата, Кыргызстан, 17-23 июня, 2018;

– IV Международная научная конференция “Актуальные проблемы в теорий оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений”, г. Бишкек, 23-25 июня, 2022г.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 научных статьях [1-7], приведенных в списке опубликованных работ. Статья [7] входит в базу данных Web of Science, Статья [6] в Scopus, статьи[2-5] входят в базу данных РИНЦ. Общее количество набранных баллов 168 балл.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов, списка использованных источников, содержащего 85 наименования, 12 таблиц. Общий объем диссертационной работы содержит 106 страниц текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Результаты научных исследований изложены в следующей последовательности:

Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, а также основные положения, выносимые на защиту.

В главе I «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ» приведены примеры прикладных задач, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями и сделан краткий обзор предшествующих исследований, по содержанию примыкающих к теме диссертации. Также приведены сведения из теории категорий и введены обозначения для подкатегорий категории уравнений, используемых в работе.

В главе II «МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» описываются объект и предмет исследования, использованные методы для решения исследуемых задач. В диссертационной работе объектом исследования являются управляемые упругие колебания, описываемые фредгольмовыми интегро- дифференциальными уравнениями.

Предметом исследования являются разработка алгоритма построения решения задачи оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями, в случаях, когда управление происходят под действием точечного подвижного источника и когда точки приложения внешних воздействий фиксированны, а функция внешнего воздействия нелинейно зависит от управления.

В главе III «РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОДВИЖНОГО ТОЧЕЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ УПРУГИМИ КОЛЕБАНИЯМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ» исследована нелинейная задача оптимального управления упругими колебаниями, в случае, когда колебания происходят под действием точечного подвижного источника.

В разделе 3.1 исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов в случае, когда функция внешнего воздействия нелинейно зависит от оптимального управления и минимизируется интегральный квадратичный функционал.

Рассмотрена следующая нелинейная задача из *FInt-Diff-Equa-Func-Opt*: найти минимальное значение интегрального обобщенного квадратичного функционала

$$I\left[u\right]=\int_0^1\left[v\left(T,x\right)-\xi\left(x\right)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u\left(t\right)\right]dt,\quad \beta>0. \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи

$$v_{tt}=v_{xx}+\lambda\int_0^T K\left(t,\tau\right)v\left(\tau,x\right)d\tau+\delta\left(x-x_0(t)\right)f\left[t,u\left(t\right)\right],\qquad \left(t,x\right)\in Q \tag{2}$$

$$v\left(0,x\right)=\psi_1\left(x\right),\quad v_t\left(0,x\right)=\psi_2\left(x\right),\quad 0<x<1, \tag{3}$$

$$v_x\left(t,0\right)=0,\quad v_x\left(t,1\right)+\alpha v\left(t,1\right)=0,\quad 0<t\le T. \tag{4}$$

где $K\left(t,\tau\right)$ – заданная функция в области $D=\{0\le t\le 1, 0\le\tau\le 1\}$, она удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2\left(t,\tau\right)d\tau dt=K_0<\infty, \tag{5}$$

т.е. $K(t,\tau)\in H(D)$, $\xi(x)\in H(0,1)$, $\psi(x)\in H(0,1)$-заданные функции; $f[t,u(t)]\in H(0,T)$-заданная функция внешнего источника, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и удовлетворяет условию

$$f_u[t,u(t)]\neq 0,\quad \forall t\in(0,T)\ ; \tag{6}$$

$x_0(t)$-заданная функция, которая описывает закон движения точки приложения внешней силы и принимает значения от 0 до 1, λ-параметр, T - фиксированный момент времени, постоянная $\alpha > 0$.

При исследовании задачи оптимизации будем пользоваться понятием обобщенного решения $v(t,x) \in H(Q)$ краевой задачи (2)-(5).

Определение. Под обобщенным решением краевой задачи (2)-(5) понимается функция $v(t,x) \in H(Q)$, которая вместе с обобщенной производной $v_t(t,x)$ удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int_0^1 (v_t\phi - v\phi_t)_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left[(\phi_{xx} - \phi_{tt})v(t,x) + \left(\lambda\int_0^t K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau + \delta(x-x_0) f[t,u(t)] \right)\phi(t,x) \right] dxdt +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} \left[-v(t,1)\left(\alpha\phi(t,1) + \phi_x(t,1)\right) + v(t,0)\phi_x(t,0) \right] dt$$

при любых t_1 и t_2 $(0 \le t_1 < t_2 \le T)$ и для любой функции $\phi(t,x) \in C^{1,2}(Q)$, а начальному и граничным условиям в слабом (интегральном) смысле, т.е.

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1 v(t,x)\phi_0(x)dx = \int_0^1 \psi_1(x)\phi_0(x)dx, \quad \lim_{t\to+0}\int_0^1 v(t,x)\phi_1(x)dx = \int_0^1 \psi_1(x)\phi_1(x)dx,$$

для любых функций $\phi_0(x) \in H(0,1)$ и $\phi_1(t) \in H(0,T)$.

Предполагая существование единственного обобщенного решения краевой задачи, соответствующего управлению $u(t) \in H(0,T)$, вычислим приращение функционала (1).

$$\Delta I(u) = -\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \delta(x - x_0(t))\omega(t,x)dx\left[f(t,u+\Delta u) - f(t,u) \right] dt + \right.$$

$$+\int_0^T \beta\left[p^2(t,u+\Delta u) - p^2(t,u) \right] dt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x)dx = -\int_0^T \Delta\prod(\cdot,u)dt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x)dx \qquad (7)$$

где функция типа Понтрягина имеет вид

$$\prod(\cdot,u) = \int_0^1 \delta(x - x_0(t))\omega(t,x)dx \cdot f(t,u(t)) - \beta p^2[t,u(t)] = \omega(t,x_0(t)) f[t,u(t)] - \beta p^2[t,u(t)], \quad (8)$$

а $\omega(t,x(t),u(t)) \in H(Q)$ является единственным обобщенным решением следующей сопряженной краевой задачи, соответствующим управлению $u(t) \in H(0,T)$:

$$\omega_{tt} - \omega_{xx} = \lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \le t < T, \qquad (9)$$

$$\omega(T,x) = 0, \ \omega_t[T,x] = 2\left[v(T,x) - \xi(x) \right], \quad 0 < x < 1; \qquad (10)$$

$$\omega_x(t,0)=0,\ \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,x)=0,\quad 0\le t<T. \qquad (11)$$

Доказан принцип максимума: для того, чтобы в рассматриваемой задаче (1)-(6) управление $u^0(t)\in H(0,T)$ было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\Pi(t,\omega^0(t,x),\nu^0(t,x),u^0(t)) \quad (=) \quad \sup_{u\in Z}\Pi(t,\omega^0(t,x),\nu^0(t,x),u),$$

где Z – множество допустимых значений функции $u(t)$ в каждой точке $t\in[0,T]$, выполнялось почти всюду на отрезке $[0,T]$.

Заметим, что нестрогое доказательство принципа максимума следует из неравенства

$$\Delta\Pi(t,\omega(t,x),\nu(t,x),u(t))=\Pi(t,\cdots,u(t)+\Delta u(t))-\Pi(t,\cdots,u(t))\le 0.$$

Согласно (8), как следствие принципа максимума, получены следующие соотношения

$$\Pi_u(\cdot,u)=\omega(t,x_0(t))\,f_u\left[t,u(t)\right]-2\beta p\left[t,u(t)\right]\cdot p_u\left[t,u(t)\right]=0;$$

(12) $$\Pi_{uu}(\cdot,u)=\omega(t,x_0(t))\,f_{uu}\left[t,u(t)\right]-2\beta\left(p^2\left[t,u(t)\right]+p\left[t,u(t)\right]p_{uu}\left[t,u(t)\right]\right)<0.$$

(13)

которые в совокупности называются *условиями оптимальности.*

Оптимальное управление можно находить, исходя из соотношения

$$2\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]\cdot p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}=\omega(t,x_0,u(t)). \qquad (14)$$

где $$\omega(t,x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x_0(t))=-2\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)\left[-h_n+\int_0^T E_n(T,\eta,\lambda)\,f\left[\eta,u(\eta)\right]d\eta\right]. \qquad (15)$$

В ходе исследования данной задачи была сформулирована и доказана следующая теорема:

Теорема. Пусть в краевой задаче (2)-(5) заданные функции $K(t,\tau)\in H(D)$, $\xi(x)\in H(0,1)$, $g(x)\in H(0,1)$, $\psi_2(x)\in H(0,1)$ являются элементами гильбертово пространства, а $\psi_1(x)\in H_1(0,1)$-элемент соболева пространства первого порядка. Если функция внешнего источника $f[t,u(t)]$ является элементом гильбертово пространства квадратично суммируемых функций при каждом фиксированном $u(t)\in H(0,T)$ и удовлетворяет условию монотонности по функциональной переменной $u(t)$ т.е. выполняется условие (6), то краевая задача (2)-(5) имеет в пространстве квадратично суммируемых функций $H(Q)$ единственное обобщенное решение $\nu(t,x)$, имеющее обобщенную производную $\nu_t(t,x)$.

Согласно (14), (15) получено нелинейное уравнение Фредгольма II рода вида

$$\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)\left[h_n-\int_0^T E_n(T,\tau,\lambda)\,f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right] \qquad (16)$$

где

$$h_n=\xi_n-\psi_{1n}\left[\cos\lambda_n T+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right]-\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n T+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right],$$

$$G_n(T,t,\lambda)=\frac{z_n(x_0(t))}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n(T-t)+\lambda\int_0^T P_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(T-s)ds\right],$$

$$E_n(T,\eta,\lambda)=\frac{1}{\lambda_n}\varepsilon_n(T,\eta,\lambda)z_n(x_0(\eta)),$$

$R_n(t,s,\lambda)$, $P_n(t,s,\lambda)$ – резольвенты, полученные при решении основной и сопряженной краевых задач, для которых справедливы следующие оценки:

$$\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\le\frac{K_0T}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}.\quad \int_0^T P_n^2(s,t,\lambda)ds\le\frac{K_0T}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}.$$

Учитывая соотношения

$$\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}=q(t),u(t)=\varphi\left[t,q(t),\beta\right]$$

(17)

уравнение (16) приведено к следующему виду:

$$q(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)\left[h_n-\int_0^T E_n(T,\tau,\lambda)\,f\left[\tau,\varphi\left(\tau,q(\tau),\beta\right)\right]d\tau\right].$$

(18)

или в операторной форме

$$q=G\left[q(t)\right]=h-G_0[q]. \qquad (19)$$

где $h=h(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)h_n,$ (20)

$$G_0[q]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,\tau,\lambda)\int_0^T E_n(T,\tau,\lambda)\,f\left[\tau,\varphi\left(\tau,q(\tau),\beta\right)\right]d\tau. \qquad (21)$$

Доказано, что при выполнении условий

$$\left\| f\left[t,u(t)\right]-f\left[t,\bar{u}(t)\right]\right\|_{H(0,T)} \le f_0\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_{H(0,T)}, \qquad f_0>0$$

$$\left\|\varphi\left[\tau,q(t),\beta\right]-\varphi\left[\tau,\bar{q}(t),\beta\right]\right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta)\left\|\left[q(t)-\bar{q}(t)\right]\right\|_{H(0,T)}, \quad \varphi_0(\beta)>0$$

$$\gamma=4\sqrt{T}\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)f_0\varphi_0(\beta)<1$$

уравнение (18) имеет единственное решение в пространстве *H (Q)* и для которого имеет место оценка

$$\left\|q^0(t)-q_n(t)\right\|_{H(0,T)}=\left\|G\left[q^0(t)\right]-G\left[q_n(t)\right]\right\|_{H(0,T)}=$$

$$=\left\|h-G_0\left[q^0(t)\right]-h+G_0\left[q_n(t)\right]\right\|=\left\|G_0\left[q^0(t)\right]-G_0\left[q_n(t)\right]\right\|_{H(0,T)}\le$$

$$\le\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G\left[q_0(t)\right]-q_0(t)\right\|_{H(0,T)}=\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|h-G_0\left[q_0(t)\right]-q_0(t)\right\|_{H(0,T)},$$

где $q^0(t)=\lim\limits_{n\to\infty}q_n(t)$ −точное решение уравнения (18).

Используя решение $q^0(t)$, определяем оптимальное управление, как решение неоднородного уравнения (16).

$$u^0(t)=\varphi\left[t,q^0(t),\beta\right].$$

Решение краевой задачи (9), соответствующее оптимальному управлению $u^0(t)$, имеет следующий вид

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right)z_n(x), \tag{22}$$

где $a_n^0(t)=\psi_{1n}\cos\lambda_nt+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_nt+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)z_n\left(x_0(\tau)\right)f\left[\tau,u^0(\tau)\right]d\tau$.

Зная оптимальное управление и оптимальный процесс, минимальное значение функционала (1) вычислено по формуле

$$I\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left[v^0(T,x)-\xi(x)\right]^2+\beta\int_0^T p^2\left[t,u^0(t)\right]dt.$$

Найденная тройка $\left(u^0(t),v^0(t,x),I\left(u^0\right)\right)$ определяет полное решение задачи нелинейной оптимизации (1)-(6).

k-е приближения оптимального управления находим следующим образом

$$u_k(t)=\varphi[t,q_k(t),\beta], \qquad k=1,2,3\ldots$$

где $q_k(t)$ и $q^0(t)$ удовлетворяют оценке

$$\left\| q^0(t) - q_k(t) \right\|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \overline{G}_0, \quad \gamma < 1, \ \overline{G}_0 - const$$

Из соотношения

$$\left\| V^0(t,x) - V_k^{m,r}(t,x) \right\|_{H(Q)} \le \left\| V^0(t,x) - V^m(t,x) \right\|_{H(Q)} +$$

$$\left\| V^m(t,x) - V_k^m(t,x) \right\|_{H(Q)} + \left\| V_k^m(t,x) - V_k^{m,r}(t,x) \right\|_{H(Q)} \xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0,$$

следует, что *m,k,r*– приближение $V_k^{m,r}$ сходится к оптимальному процессу $V^0(t,x)$.

Здесь $V^m(t,x) -$ приближения оптимального процесса по резольвенте, а $V_k^m(t,x) -$ приближения оптимального процесса и по резольвенте, и по оптимальному управлению.

Далее из соотношения

$$\left| I(u^0(t)) - I_m^r(u_k(t)) \right| \le \left| I(u^0(t)) - I_m(u^0(t)) \right| +$$

$$\left| I_m(u^0(t)) - I_m(u_k(t)) \right| + \left| I_m(u_k(t)) - I_m^r(u_k(t)) \right| \xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0,$$

следует сходимость *m,k,r*–приближения $I_m^r(u_k(t))$ к минимальному значению функционала $I(u^0(t))$.

Также на модельном примере приведены результаты численных расчетов, подтверждающие полученные теоретические результаты.

В главе IV «ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ УПРАВЛЕНИЯ» проведено исследование задачи с упругими колебаниями при многоточечных воздействиях внешних сил в случае, когда колебательный процесс описывается фредгольмовым интегро-дифференциальным уравнением *FInt-Diff-Equa-Func-Opt*. Сформулирован принцип максимума для рассматриваемой задачи и получены условия оптимальности управления в виде равенства и дифференциального неравенства.

В разделе 4.1 исследован волновой процесс, описываемый краевой задачей для уравнения *FInt-Diff-Equa-Func-Opt* вида

$$V_{tt} = V_{xx} + \lambda \int_0^T K(t,\tau) V(\tau,x) d\tau + \sum_{k=1}^{m} g_k(x) \delta(x - x_k) f_k[t, u_k(t)],$$

$$V(0,x) = \psi_1(x), V_t(0,x) = \psi_2(x), 0 < x < 1,$$

$$V_x(t,0) = 0, V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = 0, 0 < t \le T,$$

(23)

где функция $V(t,x)$ описывает состояние упругой нити, с длиной равной единице, которая колеблется под действиями внешних возмущающих сил

$g_k(x)f_k[t,u_k(t)], k=1,2,3,\dots,m$, приложенных соответственно к внутренним точкам $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ интервала *(0,1);* $\psi_1(x) \in H_1(0,1)$, $\psi_2(x) \in H(0,1)$, $g_k(x) \in H(0,1)$, $f_k[t,u_k(t)] \in H(0,T)-$ заданные функции, причем функции $f_k[t,u_k(t)]$ – нелинейны и монотонны по функциональной переменной $u_k(t)$, т.е. $\frac{\partial f_k[t,u(t)]}{\partial u_k(t)} \neq 0, \forall t \in [0,T]$; ядро $K(t,\tau)$ определено в области $D=\{0 \le t \le T, 0 \le \tau \le T\}$ и является элементом пространства $H(D)$, т.е. $\int_0^T \int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt = K_0 < \infty$; заданные функции $g_k(x)$ при каждом фиксированном $k=1,2,3,\dots,m$ непрерывны, имеют непрерывные производные $g_k'(x)$, и удовлетворяют условиям $g_k(1)=0$; $x_k \in (0,1)$; T - фиксированный момент времени, α - положительная постоянная, λ - параметр.

Также по выше изложенной схеме (пункт 3.1) найдено обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса по формуле

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds + a_n(t)\right)z_n(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \varepsilon_n(t,\eta,\lambda)\sum_{k=1}^{m} g_k(x_k)z_n(x_k)\, f_k[\eta,u_k(\eta)]d\eta\right\}z_n(x);$$

(24)

где

$$\psi_n(t,\lambda)=\psi_{1n}\left[\cos\lambda_n t+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right]+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n t+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right]; \quad (25)$$

$$\varepsilon_n(t,\eta,\lambda)=\begin{cases}\sin\lambda_n(t-\eta)+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & 0\le\eta\le t;\\ \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & t\le\eta\le T;\end{cases}$$

В разделе 4.2 исследована задача нелинейной оптимизации упругих колебаний с многоточечными управлениями, где требуется минимизировать обобщенный квадратичный функционал

$$J[u_1(t),\dots,u_m(t)]=\int_0^1\left\{[V(T,x)-\xi_1(x)]^2+[V_t(T,x)-\xi_2(x)]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^{m}p_k^2[t,u_k(t)]dt,\ \beta>0,$$

(26)

на множестве решений краевой задачи (23).

Согласно условию монотонности, каждое вектор-управление $u(t)=\{u_1(t),...,u_m(t)\}$ единственным образом определяет $V(t,x)$. С учетом этого обстоятельства вычислено приращение функционала

$$\Delta J[u(t)] = -\int_0^T \Delta\prod\big(t,V(t,x),\omega(t,x),u(t)\big)dt + \int_0^T \left\{\Delta V^2(T,x)+\Delta V_t^2(T,x)\right\}dx,$$

где

$$\Delta\prod\big(t,\cdot,u(t)\big)=\prod\big(t,\cdot,u(t)+\Delta u(t)\big)-\prod\big(t,\cdot,u(t)\big),$$

$$\prod\big(t,V(t,x),\omega(t,x),u(t)\big)=\sum_{k=1}^m g_k(x_k)\omega(t,x_k)f_k\left[t,u_k(t)\right]-\beta\sum_{k=1}^m p_k^2\left[t,u_k(t)\right]$$

(27)

а функция $\omega(t,x)$ является обобщенным решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt}=\omega_{xx}+\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau,\ 0<x<1,\ 0\le t<T,$$

$$\omega(T,x)=-2[V_t(T,x)-\xi_2(x)],$$
$$\omega_t(T,x)=2[V(T,x)-\xi_1(x)],$$

$$\omega_x(t,0)=0,\ \ \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0.$$

Для рассматриваемой задачи нелинейной оптимизации сформулирован принцип максимума:

Для оптимальности управления в задаче нелинейной оптимизации (23), (26) необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на отрезке [0, T] в области допустимых значений F выполнялось соотношение

$$\prod\big(t,V(t,x),\omega(t,x),u^0(t)\big)=\sup_{u\in F}\prod(t,V(t,x),\omega(t,x),u).$$

Поскольку область допустимых значений F является открытым множеством, то как следствие принципа максимума для оптимальности управлений $u_1(t),...,u_m(t)$ получены следующие соотношения

$$2\beta\frac{p_k\left[t,u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}=g_k(x_k)\omega(t,x_k),$$

(28)

$$\prod_{k=1}^m(-1)^k\ f_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]\left(\frac{p_k\left[t,u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}\right)>0,\quad k=1,...,m,$$

(29)

которые являются *условиями оптимальности*.

Здесь

$$f_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]=\frac{\partial f_k\left[t,u_k(t)\right]}{\partial u_k},\quad p_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]=\frac{\partial p_k\left[t,u_k(t)\right]}{\partial u_k}.$$

Согласно условию (28) относительно оптимального управления $u^0(t)$ получили следующую систему нелинейных интегральных уравнений

$$\beta\frac{p_k\left[t,u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}+\sum_{n=1}^{\infty}g_k(x_k)z_n(x_k)G_n^*(T,t,\lambda)\int_0^T E_n(T,\tau,\lambda)\cdot$$
$$\cdot\sum_{k=1}^{m}g_k(x_k)z_n(x_k)f_k\left[\tau,u_k(\tau)\right]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}g_k(x_k)z_n(x_k)G_n^*(T,t,\lambda)h_n,\quad k=1,...,m. \tag{30}$$

В силу соотношений

$$\beta\frac{p_k\left[t,u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}=\sigma_k(t),\quad k=1,2,3,...,m.$$

(31)

$$u_k(t)=\varphi_k\left[t,\sigma_k(t),\beta\right],\quad k=1,...,m.$$

(32)

система (30) приводится к виду

$$\sigma(t)+\sum_{n=1}^{\infty}K_n\left[x_1,...,x_m\right]G_n^*(T,t,\lambda)\int_0^T E_n(T,\tau,\lambda)\sum_{k=1}^{m}K_n^*\left[x_1,...,x_m\right]f\left[\tau,\varphi\left(\tau,\sigma(\tau),\beta\right)\right]d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}K_n\left[x_1,...,x_m\right]G_n^*(T,t,\lambda)h_n,\quad k=1,...,m,$$

где

$$\sigma(t)=\left\{\sigma_1(t),...,\sigma_m(t)\right\},$$
$$K_n\left[x_1,...,x_m\right]=\left\{g_1(x_1)z_n(x_1),...,\mathrm{g}_m(x_m)z_n(x_m)\right\},$$
$$\varphi\left[t,\sigma(t),\beta\right]=\left\{\varphi_1\left[t,\sigma_1(t),\beta\right],...,\varphi_m\left[t,\sigma_m(t),\beta\right]\right\},$$
$$f\left[t,\varphi\left(t,\sigma(t),\beta\right)\right]=\left\{f_1\left[t,\varphi_1\left(t,\sigma_1(t),\beta\right)\right],...,f_m\left[t,\varphi_m\left(t,\sigma_m(t),\beta\right)\right]\right\}.$$

Доказано, что при условиях

$$\left|f_k\left[t,u_k(t)\right]-f_k\left[t,\tilde{u}_k(t)\right]\right|\le f_{k0}\left|u_k(t)-\tilde{u}_k(t)\right|,\quad f_{k0}>0,$$
$$\left|\varphi_k\left[t,\sigma_k(t),\beta\right]-\varphi_k\left[t,\tilde{\sigma}_k(t),\beta\right]\right|\le\varphi_{k0}(\beta)\left|\sigma_k(t)-\tilde{\sigma}_k(t)\right|,\quad \varphi_{k0}(\beta)>0.$$

$$\gamma=8T\sum_{k=1}^{m}\tilde{g}_{k0}^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right)\bar{f}_0\bar{\varphi}_0(\beta)<1,$$

где $f_0=\max\left(f_{10},...,f_{m0}\right)$, $\varphi_0\left(\beta\right)=\max\left(\varphi_{10}\left(\beta\right),...,\varphi_{m0}\left(\beta\right)\right)$, операторное уравнение $\sigma=K\left[\sigma\right]+h$ имеет единственное решение в пространстве $H^m(0,T)$.

Решение операторного уравнения $\sigma=K\left[\sigma\right]+h$ в пространстве $H^m(0,T)$ найдено методом последовательных приближений

$$\sigma_n=K\left[\sigma_{n-1}\right]+h,\quad n=1,2,3,...,$$

где σ_0-произвольный элемент пространства $H^m(0,T)$, причем между приближениями и точным решением

$$\sigma_0\left(t\right)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n\left(t\right)$$

имеет место соотношение

$$\left\|\sigma\left(t\right)-\sigma_n\left(t\right)\right\|_{H^m(0,T)}\le\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|K\left[\sigma_0\left(t\right)\right]+h\left(t\right)-\sigma_0\left(t\right)\right\|_{H^m(0,T)}.$$

Найденное решение $\sigma^0\left(t\right)=\left(\sigma_1^0\left(t\right),...\sigma_m^0\left(t\right)\right)$ подставляя в (32) получено оптимальное управление

$$u_k^0\left(t\right)=\varphi_k\left[t,\sigma_k^0\left(t\right),\beta\right],\quad k=1,2,3,...,m,$$

Далее найден оптимальный процесс

$$V^0\left(t,x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left(t,\lambda\right)+\int_0^T\varepsilon_n\left(t,\tau,\lambda\right)\sum_{k=1}^m g_k\left(x_k\right)z_n\left(x_k\right)f_k\left[\tau,u_k^0\left(\tau\right)\right]d\tau\right\}z_n\left(x\right)\text{ и}$$

вычислено минимальное значение функционала

$$J\left[u^0\left(t\right)\right]=\int_0^1\left\{\left[V^0\left(T,x\right)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_t^0\left(T,x\right)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^m p_k^2\left[t,u_k^0(t)\right]dt,\ \beta>0.$$

Найденная тройка $\left(u^0\left(t\right),\ V^0\left(t,x\right),\ J\left[u^0\left(t\right)\right]\right)$ является полным решением задачи нелинейной оптимизации.

В рассматриваемой краевой задаче (23) наличие интегрального оператора Фредгольма в уравнении обусловливает построения трех видов приближений оптимального процесса и соответственно минимального значения функционала, т.е. мы будем различать следующие виды приближений оптимального процесса

1) *N*- е приближение по «резольвенте»

$$V^{0,N}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n^N\left(t,\lambda\right)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T\varepsilon_n^N\left(t,\eta,\lambda\right)\sum_{k=1}^m g_k(x_k)z_n\left(x_k\right)f_k[\eta,u^0{}_k(\eta)]d\eta\right\}z_n(x);$$

2) *N*,*i*-е приближение по управлению

3) $V_i^N(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n^N(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \varepsilon_n^N(t,\eta,\lambda)\sum_{k=1}^m g_k(x_k)z_n(x_k)\,f_k[\eta,u^{(i)}{}_k(\eta)]d\eta\right\}z_n(x);$

3) N,i,r-е конечномерное приближение

$$V_i^{N,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left\{\psi_n^N(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \varepsilon_n^N(t,\eta,\lambda)\sum_{k=1}^m g_k(x_k)z_n(x_k)\,f_k[\eta,u^{(i)}{}_k(\eta)]d\eta\right\}z_n(x);$$

и следующие виды приближений минимального значения функционала

1) N-е приближение по «резольвенте»

$$J^N\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left\{\left[V^{0,N}(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_t^{0,N}(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^m p_k^2\left[t,u_k^0(t)\right]dt,\ \beta>0$$

2) N,i-е приближение по управлению

$$J_i^N\left[u^{(i)}(t)\right]=\int_0^1\left\{\left[V_i^N(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_{t,i}{}^N(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^m p_k^2\left[t,u_k^{(i)}(t)\right]dt,\ \beta>0$$

3) N,i,r-е конечномерное приближение

$$J_i^{N,r}\left[u^{(i)}(t)\right]=\int_0^1\left\{\left[V_i^{N,r}(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_{t,i}{}^{N,r}(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^m p_k^2\left[t,u_k^{(i)}(t)\right]dt,\ \beta>0.$$

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе исследованы вопросы однозначной разрешимости задач нелинейной оптимизации упругими колебаниями, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда воздействие одного подвижного или нескольких фиксированных источников описывается нелинейными функциями от управления.

Установлено, что при минимизации интегрального квадратичного функционала, точечное оптимальное управление удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений и дополнительному условию в виде системы дифференциальных неравенств.

Найдены достаточные условия существования решения задачи нелинейной оптимизации. Разработан алгоритм построения приближенных решений задачи нелинейной оптимизации и доказана их сходимость по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

Разработанный метод решения задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при наличии подвижных точечных источников является конструктивным и может быть использован при решении нелинейных задач оптимизации процессов, описываемых фредгольмовыми или вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями параболического или гиперболического типов.

Полученные результаты имеют теоретическую значимость и представляют интерес для исследований задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Дуйшеналиева, У. Э. Обобщенное решение краевой задачи управляемого колебательного процесса [Текст]/ Керимбеков А.К., Дуйшеналиева У. Э., Эсенгулова П. // Исследования по интегро–дифференциальным уравнениям. –Вып. 33–Бишкек, 2014. –С. 123–127.
2. Дуйшеналиева, У. Э. Задача подвижного точечного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Керимбеков А.К., Дуйшеналиева У. Э. // Журнал «Вестник КРСУ», –Том 16, № 5, – Бишкек, 2016. –С. 51-57. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26452854
3. Дуйшеналиева, У. Э. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний при точечном управлении [Текст]/ Керимбеков А., Дуйшеналиева У.Э. // Проблемы автоматики и управления, –№2, – Бишкек, 2016. –С. 57-62. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27692767
4. Дуйшеналиева, У. Э. Решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями с подвижными точечными управлениями[Текст] / Дуйшеналиева У.Э. // Журнал «Вестник КРСУ». –Том 16, № 9. – Бишкек, 2016. – С. 7-11. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27422775
5. Дуйшеналиева, У. Э. Численный анализ сходимости приближений оптимального управления и оптимального процесса в задаче нелинейной оптимизации упругих колебаний [Текст] / У. Э. Дуйшеналиева //Журнал «Вестник КРСУ». –Том 21, № 12. –Бишкек, 2021. – С. 3-10. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48045601
6. Duishenalieva, U. Generalized solution of a boundary value problem under point exposure of external forces [Text] / A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva, U. Duishenalieva // International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 113 No. 4 – 2017 . – p. 609-623. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29484083
7. Duishenalieva, U. On solvability of optimization problem for elastic oscillations with multipoint sources of control [Text] / A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva, U. Duishenalieva, E. Seidakmat kyzy // International Conference «Functional Analysis in In-terdisciplinary Applications» (FAIA2017), AIP.

American Institute of Physics, Melville, NY. – 2017, 060009. - Режим доступа: https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000417411800064

Дуйшеналиева Урумкан Эрмековнанын 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн сунушталган «Фредгольмдук интегро- дифференциалдык теңдемелер менен жазылган термелүү процесстерин чекиттик башкаруу» аттуу диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: термелүү процесси, кыймылдуу оптималдык башкаруу, жалпыланган чыгарылыш, резольвента, Неймандын катары, функционалды минималдаштыруу, максимум принциби, оператордук теңдеме, жыйналуучулук.

Изилдөөнүн объектиси: Фредгольм интегро- дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн башкарылуучу серпилгичтүү термелүүлөр

Изилдөөнүн предмети: Чекиттүү башкаруу аркылуу Фредгольм интегро- дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн серпилгичтүү термелүүлөрдү сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелеринин чыгарылышынын алгоритмин иштеп чыгуу.

Изилдөөнүн максаты: Фредгольм интегро-дифференциалдык теңдемелери менен мүнөздөлгөн серпилгичтүү термелүүлөрдү сызыктуу эмес оптималдуу башкаруу маселелерин изилдөө жана сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы үчүн жетиштүү шарттарды алуу.

Изилдөөнүн ыкмалары: Математикалык физика, бөлүштүрүлгөн параметрлүү системаларды оптималдык башкаруу теориясынын, оператордук теңдемелер теориясынын жана классикалык вариациялык эсептөөлөрдүн методдору колдонулду.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы: Изделген оптималдык башкаруу тышкы таасир этүү жана сапат критерий функциясына карата барабарсыздык

түрүндөгү кошумча шартты канааттандырган спецификалык формадагы сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чыгарылышы катары аныкталышы мүмкүн экендиги көрсөтүлдү; сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чыгарылышы бир маанилүү чечилишинин жетиштүү шарттары аныкталды жана ал чыгарылыштын жакындашууларынын оптималдык башкаруу, оптималдык процесс жана функционал боюнча жыйналуучулугу далилденди.

Изилдөөнүн практикалык мааниси: термелүү процесстерин чекиттик башкарууда сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин чечүү үчүн иштелип чыккан алгоритм тиркемелерде термелүү процесстерин башкарууга байланышкан колдонмо маселелерди чыгарууда колдонулушу мүмкүн.

РЕЗЮМЕ

диссертации Дуйшеналиевой Урумкан Эрмековны на тему «Точечное управление колебательными процессами, описываемыми фредгольмово интегро– дифференциальными уравнениями», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: колебательный процесс, подвижное оптимальное управление, обобщенное решение, резольвента, минимизация функционала, принцип максимума, операторное уравнение, сходимость.

Объект исследования: управляемые упругие колебания, описываемые фредгольмово интегро- дифференциальными уравнениями.

Предмет исследования: разработка алгоритма построения решения задачи нелинейной оптимизации упругими колебаниями, описываемыми фредгольмово интегро- дифференциальными уравнениями при точечных управлениях.

Цель исследования: исследование однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации упругими колебаниями, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда колебания происходят под действием точечных источников.

Методы исследования: методы математической физики, теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, теории операторных уравнений и классического вариационного исчисления.

Полученные результаты и новизна: установлено, что оптимальное управление может быть определено, как решение нелинейного интегрального уравнения специфического вида (двухкратная нелинейность), удовлетворяющее дополнительному условию в виде неравенства относительно функции внешнего источника и функции критерия качества;

найдены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации упругими колебаниями и доказана сходимость приближений решения по оптимальному управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

Практическое значение исследования: разработанный алгоритм построения решения задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при точечном управлении может быть использован в приложениях при решении прикладных задач, связанных с управлением колебательных процессов.

SUMMARY

Dissertation of Duishenaliyeva Urumkan Ermekovna on the topic "Point control of oscillatory processes described by Fredholm integro-differential equations", submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control.

Keywords: oscillatory process, moving optimal control, generalized solution, integro-differential equation, resolvent, Neumann series, functional minimization, maximum principle, optimality conditions, operator equation, convergence.

Object of research: controlled elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations.

Subject of research: development of an algorithm for constructing a solution to the problem of nonlinear optimization by elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations with point controls.

The purpose of the research: to study the unique solvability of the problem of nonlinear optimization by elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations in the case when oscillations occur under the action of point sources, and to obtain sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the nonlinear optimization problem.

Research methods: the methods of the theory of differential equations, mathematical physics, the theory of integral equations, functional analysis, the theory of optimal control of systems with distributed parameters, the theory of operator equations and the calculus of variations were used in the study.

The obtained results and novelty: it is established that the optimal control can be defined as a solution to a nonlinear integral equation of a specific type (two-fold nonlinearity) that satisfies an additional condition in the form of an inequality with respect to the external source function and the quality criterion

function; sufficient conditions for the unique solvability of the problem of nonlinear optimization by elastic vibrations are found; an algorithm for constructing an approximate solution to a nonlinear optimization problem was developed and their convergence in terms of optimal control, optimal process, and functional was proved.

Practical significance of the research: the developed algorithm for constructing a solution to the problem of nonlinear optimization of oscillatory processes with point control can be used in applications for solving applied problems related to the control of oscillatory processes.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОНЯТИЯ, ПРИНЯТЫЕ В ДАННОЙ РАБОТЕ

1. $u_z(\dots, z, \dots)$ – частная производная функции *u* по переменной *z*;

2. $Q = (0,1) \times (0, T)$ – область плоскости *Oxt*;

4. *H(Y)* - гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве *Y;*

5. $H_1(Y)$ - пространство Соболева первого порядка функций, определенных на множестве *Y;*

6. $< \cdot, \cdot >$– скалярное произведение в гильбертовом пространстве *H*;

7. $\|\cdot\|_H$ –норма элемента гильбертово пространства *H;*

8. $C^{1,2}(Q)$ – пространство непрерывных функций *V(t,x),* определенных в области *Q* и имеющих производную первого порядка по переменной *t* и производную второго порядка по переменной *x*;

9. $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака;

10. *Equa-Func* - категория уравнений для функций;

11. *Equa-Par* - категория уравнений с параметрами, в том числе *Equa-Contr,* если параметр рассматривается, как управление, и *Equa-Opt,* если в определение уравнения входит вещественнозначная функция от решения, которую нужно оптимизировать по управлению;

12. *Ord-Equa-Func* – категория уравнений для функций одной скалярной переменной (в том числе – обыкновенные дифференциальные уравнения);

13. *Part-Equa-Func* – категория уравнений для функций векторной переменной или нескольких скалярных переменных (в том числе – дифференциальные уравнения в частных производных);

14. *Diff-Equa-Func* – категория уравнений, в которые входят производные от неизвестной функции;

15. *Int-Equa-Func* – категория уравнений, в которые входят интегралы от неизвестной функции;

16. *FInt-Equa-Func* – категория уравнений, в которые входят интегралы типа Фредгольма (по фиксированному отрезку) от неизвестной функции;

17. *VInt-Equa-Func* – категория уравнений, в которые входят значения неизвестной функции от предыдущих значений аргумента, в том числе под знаком интеграла.