Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясы
Математика институту

Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети

Д 01.22.647 Диссертациялык кеңеши

Кол жазма укугунда
УДК 517.97

Дуйшеналиева Урумкан Эрмековна

Фредгольм тибиндеги интегро- дифференциалдык теңдемелери менен мүнөздөлгөн термелүү процесстерин чекиттик башкаруу

01.01.02– дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу

Физика- математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациянын
АВТОРЕФЕРАТЫ

Бишкек -2023

Иш Талас мамлекеттик университетинин математика, физика жана информатика кафедрасында аткарылды.

Илимий жетекчи: Керимбеков Акылбек

физика- математика илимдеринин доктору, профессор, Кыргыз - Россия Славян университетинин колдонмо математика жана информатика кафедрасынын профессору

Расмий оппоненттер: Искандаров Самандар

физика- математика илимдеринин доктору, профессор, Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институнун интегро- дифференциалдык теңдемелер теориясы бөлүмүнүн башчысы

Туркманов Жылдызбек Каныбекович

физика- математика илимдеринин кандидаты, доцент, К. Карасаев атындагы Бишкек мамлекеттик университетинин информатика жана математика кафедрасынын башчысы

Жетектөөчү мекеме: Ташкент мамлекеттик экономикалык университетинин колдонмо математика кафедрасы Өзбекстан, 100066, Ташкент шаары,
Ислам Каримов көчөсү, 49.

Диссертацияны коргоо Кыргыз республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институтунда жана Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин алдындагы физика-математика илимдеринин доктору (кандидаты) илимий даражасына талаптануучулардын диссертациясын коргоо боюнча түзүлгөн Д 01.22.647 диссертациялык кеңешинин 2023-ж. 2-мартында саат 14.00дө, Кыргыз Республикасы, 720071, Бишкек ш., Чуй пр. 265-а, 374-бөлмө дарегинде өтө турган отурумунда болот.

Коргоонун идентификатору: https://vc1.vak.kg/b/012-ltf-b7j-lgy

Диссертация менен Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын китепканаларынан (720071, Бишкек ш., Чуй пр., 265-а) жана Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин китепканаларынан (720033, Бишкек ш., Фрунзе көч., 547), ошондой эле www.math.kg, www.vak.kg сайттарынан таанышууга болот.

Автореферат 2023-жылдын 31-январында таркатылды.

Диссертациялык кеңештин окумуштуу катчысы
физика-математика илимдеринин
кандидаты, доцент Шаршембиева Ф.К.

ИЗИЛДӨӨНҮН ЖАЛПЫ МҮНӨЗДӨМӨСҮ

Диссертациянын темасынын актуалдуулугу. Сырткы таасирлер мезгилдүү болгон көптөгөн процесстердин математикалык моделдеринде компоненттери кандайдыр бир жетишээрлик чоң интервалда белгилерин өзгөрткөн, башкача айтканда термелүүчү функциялар кездешет. Ушул сыяктуу термелүүлөр көптөгөн башкарылуучу процесстерде да пайда болот.

Азыркы учурда бөлүштүрүлгөн параметрлүү оптималдуу башкаруу теориясынын методдору илим менен техниканын ар кандай тармактарында улам сүңгүп кирүүдө. Ушул себептүү Фредгольм жана Вольтерра интегралдык оператору менен жекече туундулардагы дифференциалдык теңдемелер же интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн математикалык моделдерди изилдөө актуалдуу. Бирок Фредгольмдун интегро-дифференциалдык теңдемелери менен мүнөздөлгөн термелүүчү процесстерге байланыштуу маселелер аз изилденген, А.Ковалевскийдин (2011), А.Ж. Хуршудяндын (2014) ж.б. аз сандагы эмгектери бар.

Диссертацияда Фредгольм интегро- дифференциалдык теңдемелери менен сүрөттөлгөн серпилгичтүү термелүүлөрдүн сызыктуу эмес маселелери бир чекиттин кыймылдуу булагынынын таасири астында пайда болгон жана тышкы аракет бир нече туруктуу чекиттерде топтолгон учурларда изилденет. Изилдөө учурунда мындай сызыктуу эмес маселелердин бир жана көп чекиттүү тышкы таасирлер болгон учурда бир маанилүү чечилиши үчүн жетиштүү шарттар аныкталган.

Диссертациянын темасынын ири илимий программалар (долбоорлор) жана илимий мекемелер тарабынан аткарылуучу негизги изилдөө иштери менен байланышы. Диссертация Билим берүү министрлигинин №КР 05 (мам.каттоо номери № 0007207) «Жекече туундулардагы интегро-дифференциалдык теңдемелер менен сүрөттөлгөн технологиялык процесстерди оптималдуу чекиттик башкаруунун математикалык ыкмалары» (2016-2017жж.) илимий долбоорунун алкагында аткарылган.

Изилдөөнүн максаттары жана милдеттери. Диссертациялык иштин максаты Фредгольм интегро-дифференциалдык теңдемелери менен мүнөздөлгөн чекиттик кыймылдуу булактарынын таасири астында пайда болгон серпилгичтүү термелүүлөрдү сызыктуу эмес оптималдуу башкаруу маселелерин изилдөө жана ал маселенин чыгарылыштарынын жашашы жана жалгыздыгы үчүн жетиштүү шарттарды алуу болуп саналат.

Изилдөөнүн милдеттери:

-башкарылуучу термелүү процесси Фредгольм интегро-дифференциалдык теңдемеси менен мүнөздөлгөн учурда чектик маселенин жалпыланган чыгарылышын тургузуу;

- түйүндөш чектик маселенин жалпыланган чыгарылышын тургузуу;

- кыймылдуу чекиттик башкаруу үчүн оптималдуу шарттарды жана башкарылуучу процесстин негизги жана түйүндөш чектик маселелеринин бир маанилүү чечилиши үчүн шарттарды алуу;

- чекиттик башкаруунун сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чыгарылышын тургузуу жана алардын оптималдык башкаруу, оптималдык процесс жана функционал боюнча жакындашууларынын жыйналуучулугун далилдөө;

- алынган теориялык натыйжаларды ырастаган сандык мисал келтирүү.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы. Биринчи жолу Фредгольм интегро-дифференциалдык теңдемелери менен мүнөздөлгөн серпилгичтүү термелүүнүн чекиттик башкаруусунун мисалында оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселесинин чыгарылышынын жана анын жакындашууларынын алгоритми иштелип чыккан. Жыйынтыктар биринчи жолу алынган жана алар бөлүштүрүлгөн параметрлүү системаларды оптималдуу башкаруу теориясынын методдорун андан ары өнүктүрүү катары мүнөздөлөт. Чекиттик башкарууда Фредгольм интегро-дифференциалдык теңдемелери тарабынан мүнөздөлгөн термелүү процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чечилиши үчүн жетиштүү шарттар табылган жана сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин жакындатылган чыгарылышын тургузуунун алгоритми иштелип чыкты жана алардын оптималдык башкаруу, оптималдуу процесс жана функционал боюнча жыйналуучулугу далилденди.

Теориялык жана практикалык баалуулугу. Диссертацияда алынган чекиттик башкарууда сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин жакындатылган чыгарылыштарын тургузуу үчүн алгоритмдердин практикалык мааниси, аларды термелүүчү системаларда кыймылдуу башкарылуучу аракеттерди колдонгон тармактарда жана ар кандай заманбап технологиялык процесстерде колдонсо болот. Алынган жыйынтыктар кыймылдуу башкаруу элементтери менен бөлүштүрүлгөн параметрлүү системаларды сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелерин чечүүнүн жаңы сапаттык жана конструктивдүү ыкмаларын иштеп чыгуу үчүн да теориялык мааниге ээ.

Диссертациянын коргоого коюлуучу негизги жоболору.

– тышкы булактар кыймылдуу чекиттик жана көп чекиттүү туруктуу болгондогу Фредгольм интегралдык операторун кармаган интегро-дифференциалдык теңдемелери менен мүнөздөлгөн сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинде изделүүчү оптималдык башкаруу тиешелүү түрдө спецификалык түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесинин жана алардын системасынын чыгарылышы түрүндө аныкталаары далилденди;

– экинчи түрдөгү Фредгольм сызыктуу эмес интегралдык теңдемесинин жана алардын системасынын чыгарылышынын жашашы үчүн жетиштүү шарттары табылды;

– тышкы булак функциясы функционалдык өзгөрмө боюнча монотондуу болгон учурдагы сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин толук чыгарылышынын жашашы далилденди;

– квадраттык суммалануучу функциялардын Гильберт мейкиндигинин нормасында оптималдык башкаруунун жакындашууларынын, оптималдык процесстин жана функционалдын минималдуу маанисинин үч түрдөгү жакындашууларынын жыйналуучулугу далилденди;

– каралып жаткан оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселесинин чыгарылыштарын тургузууга интегралдык кошулуучунун тийгизген таасиринин спецификалык өзгөчөлүктөрү аныкталды;

– алынган теориялык корутундуларды ырастаган сандык эсептөө жүргүзүлдү.

Изденүүчүнүн өздүк салымы. Биргелешип жарыяланган эмгектерде маселенин коюлушу, жыйынтыктарын талкуулоо илимий жетекчиге таандык, ал эми негизги жыйынтыктар: жалпыланган чыгарылышты тургузуу, оптималдуу шартты алуу, сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чечиминин жашашы үчүн жетиштүү шарттардын алынышы, сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин так жана жакындатылган чыгарылыштарын тургузуу алгоритми, ошондой эле жакындатылган чыгарылыштарынын жакындашууларынын жыйналуучулугун далилдөө сыяктуу натыйжалар изденүүчү тарабынан алынды.

Диссертациянын жыйынтыктарын апробациялоо. Диссертациянын натыйжалары Кыргыз-Орус Славян университетинин колдонмо математика жана информатика кафедрасынын илимий семинарларында (жетекчиси проф. Керимбеков А.) жана Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институтунун семинарында (илимий жетекчиси академик А.А. Бөрүбаев) жана төмөнкү эл аралык конференцияларда талкууланган:

– “Башкаруу теориясынын, топологиянын жана оператордук теңдемелердин актуалдуу маселелери” III Эл аралык конференциясы, Исык-Көл, Чолпон-Ата, 19-22 июнь, 2017;

– Түрк тилдүү өлкөлөрдүн математикалык коомунун VI конгресси, Астана, Казахстан, 2-5 октябрь, 2017;

– “Математикалык анализ, дифференциалдык теңдемелер жана алардын колдонулушу” 8-эл аралык конференциясы, MADEA-8, Чолпон-Ата, Кыргызстан, 17-23 июнь, 2018;

– “Оптималдуу башкаруунун, динамикалык системалардын жана оператордук теңдемелердин теорияларындагы актуалдуу маселелер” IV эл аралык илимий конференциясы, Бишкек, 23-25-июнь, 2022-ж.

Диссертациянын жыйынтыктарынын басылмаларда толук чагылдырылышы. Диссертациянын негизги жыйынтыктары жарыяланган эмгектердин тизмесинде келтирилген 7 илимий макалада [1-7] жарык көргөн. [7] макала Web of Science, [6] макала Scopus маалымат базасына, [2-5] макалалар РИНЦ маалымат базасына киргизилген.

Диссертациянын түзүлүшү жана көлөмү. Диссертациялык иш кириш сөздөн, төрт баптан, корутундудан, 85 колдонулган адабияттардын тизмесинен, 12 таблицадан турат. Диссертациялык иштин жалпы көлөмү 106 барак текстти камтыйт.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН НЕГИЗГИ МАЗМУНУ

Илимий изилдөөлөрдүн натыйжалары төмөнкү ырааттуулукта берилген:

Киришүүдө теманын актуалдуулугунун негиздемеси, иштин жалпы мүнөздөмөсү, изилдөөнүн максаты жана милдеттери, илимий жаңылыгы, теориялык жана практикалык мааниси жана коргоого коюлуучу негизги жоболор берилген.

«АДАБИЯТТАРГА ОБЗОР» аттуу I бапта Фредгольм интегро-дифференциалдык теңдемелери менен сүрөттөлгөн колдонмо маселелердин мисалдары келтирилип, диссертациянын темасына байланыштуу мурунку изилдөөлөргө кыскача баяндама жасалды. Ошондой эле категориялар теориясынан маалымат берилип, эмгекте колдонулган теңдеме категориясынын камтылган категориялары үчүн белгилөөлөр киргизилген.

«ИЗИЛДӨӨНҮН МАТЕРИАЛЫ ЖАНА МЕТОДДОРУ» аттуу II бапта изилдөөнүн объекти жана предмети, изилденип жаткан маселелерди чечүү үчүн колдонулган ыкмалар баяндалат. Диссертациялык иште изилдөө объектиси болуп Фредгольм интегро-дифференциалдык теңдемелери менен мүнөздөлгөн серпилгичтүү термелүүлөр эсептелинет.

Изилдөөнүн предмети болуп Фредгольм интегро-дифференциалдык теңдемелери менен мүнөздөлгөн серпилгичтүү термелүүлөрдү башкаруу чекиттин кыймылдуу булагынын таасири астында жана тышкы таасирлердин фиксирленген чекиттерде, ал эми тышкы таасирдин функциясы башкаруудан сызыктуу эмес көз каранды болгон учурларда оптималдуу башкаруу маселесин чечүүнүн алгоритмин иштеп чыгуу саналат.

«ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИ МЕНЕН МҮНӨЗДӨЛГӨН КЫЙМЫЛДУУ ЧЕКИТТИК БАШКАРУУНУН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС МАСЕЛЕСИН ЧЕЧҮҮ» аттуу III бапта чекиттик кыймылдуу булагынын аракети астында пайда болгон серпилгичтүү термелүүлөрдү оптималдуу башкаруунун сызыктуу эмес маселеси изилденген.

3.1-бөлүмдө тышкы аракет функциясы оптималдуу башкаруудан сызыктуу эмес көз каранды болгон жана интегралдык квадраттык функционал минимумга келтирилген учурларда термелүү процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чечилиши изилденген.

Интегралдык жалпыланган квадраттык функциянын минималдуу маанисин табуу сызыктуу эмес маселеси каралат:

$$I\left[u\right]=\int_0^1\left[v\left(T,x\right)-\xi\left(x\right)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u\left(t\right)\right]dt,\quad \beta>0. \qquad (1)$$

төмөнкү чектик маселенин чыгарылыштарынын көптүгүндө

$$v_{tt}=v_{xx}+\lambda\int_0^T K\left(t,\tau\right)v\left(\tau,x\right)d\tau+\delta\left(x-x_0(t)\right)f\left[t,u\left(t\right)\right],\qquad \left(t,x\right)\in Q \qquad (2)$$

$$v\left(0,x\right)=\psi_1\left(x\right),\quad v_t\left(0,x\right)=\psi_2\left(x\right),\quad 0<x<1, \qquad (3)$$

$$v_x\left(t,0\right)=0,\quad v_x\left(t,1\right)+\alpha v\left(t,1\right)=0,\quad 0<t\le T. \qquad (4)$$

мында $K\left(t,\tau\right)$ – $D=\{0\le t\le 1, 0\le\tau\le 1\}$ областындагы берилген функция жана ал төмөнкү шартты канааттандырат:

$$\int_0^T\int_0^T K^2\left(t,\tau\right)d\tau dt=K_0<\infty, \qquad (5)$$

б.а. $K(t,\tau)\in H(D), \xi(x)\in H(0,1)$, $\psi(x)\in H(0,1)$-берилген функциялар; $f[t,u(t)]\in H(0,T)$- $u(t)\in H(0,T)$ башкаруу функциясынан сызыктуу эмес көз каранды болгон тышкы булак функциясы, төмөнкү шартты канааттандырат

$$f_u[t,u(t)]\ne 0,\quad \forall t\in(0,T)\ ; \qquad (6)$$

$x_0(t)$-0 дөн 1 чейинки маанилерди кабыл алуучу жана тышкы күч таасир эткен чекиттин кыймылынын законун мүнөздөөчү берилген функция,
λ - параметр, T - фиксирленген убакыт, $\alpha>0$ турактуу чоңдук.

Изилдөөдө (2)-(5) чектик маселесинин $v(t,x)\in H(Q)$ жалпыланган чыгарылышы түшүнүгүн колдонобуз.

Аныктама. (2)-(5) чектик маселесинин жалпыланган чыгарылышы деп $\forall t_1$ жана t_2 $(0 \le t_1 < t_2 \le T)$ жана $\forall \phi(t,x) \in C^{1,2}(Q)$ функциясы үчүн өзүнүн $v_t(t,x)$ жалпыланган туундусу менен төмөндөгү интегралдык теңдештикти канааттандырган $v(t,x) \in H(Q)$ функциясын түшүнөбүз:

$$\int_0^1 (v_t\phi - v\phi_t)_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left[(\phi_{xx} - \phi_{tt}) v(t,x) + \left(\lambda \int_0^t K(t,\tau) v(\tau,x) d\tau + \delta(x - x_0) f[t,u(t)] \right) \phi(t,x) \right] dxdt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left[-v(t,1)(\alpha\phi(t,1) + \phi_x(t,1)) + v(t,0)\phi_x(t,0) \right] dt$$

Ал эми баштапкы жана чектик шарттарга каалагандай $\phi_0(x) \in H(0,1)$ жана $\phi_1(t) \in H(0,T)$ функциялары үчүн алсыз (интегралдык) мааниде канааттандырат, б.а.

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1 v(t,x)\phi_0(x)dx = \int_0^1 \psi_1(x)\phi_0(x)dx, \ \lim_{t\to+0}\int_0^1 v(t,x)\phi_1(x)dx = \int_0^1 \psi_1(x)\phi_1(x)dx,$$

$u(t) \in H(0,T)$ башкаруу функциясына туура келген чектик маселенин жалгыз чыгарылышы бар деп болжолдоо менен (1) функционалынын өсүндүсү эсептелинген.

$$\Delta I(u) = -\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \delta(x - x_0(t)) \omega(t,x) dx \left[f(t,u+\Delta u) - f(t,u) \right] dt + \right.$$

$$+ \int_0^T \beta \left[p^2(t,u+\Delta u) - p^2(t,u) \right] dt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x) dx = -\int_0^T \Delta \prod(\cdot,u) dt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x) dx \quad (7)$$

мында Понтрягин тибиндеги функция төмөнкү түргө ээ:

$$\prod(\cdot,u) = \int_0^1 \delta(x - x_0(t))\omega(t,x)dx \cdot f(t,u(t)) - \beta p^2[t,u(t)] = \omega(t,x_0(t)) f[t,u(t)] - \beta p^2[t,u(t)], \quad (8)$$

$\omega(t,x) \in H(Q)$- $u(t) \in H(0,T)$ башкаруусуна туура келүүчү төмөнкү түйүндөш чектик маселесинин жалгыз жалпыланган чыгарылышы

$$\omega_{tt} - \omega_{xx} = \lambda \int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x) d\tau, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \le t < T, \quad (9)$$

$$\omega(T,x) = 0, \ \omega_t[T,x] = 2\left[v(T,x) - \xi(x) \right], \quad 0 < x < 1; \quad (10)$$

$$\omega_x(t,0) = 0, \ \omega_x(t,1) + \alpha\omega(t,x) = 0, \quad 0 \le t < T. \quad (11)$$

Максимум принциби далилденди: каралуучу (1)-(6) маселесинде $u^0(t) \in H(0,T)$ башкаруусу оптималдуу болушу үчүн

$$\Pi(t,\omega^0(t,x),v^0(t,x),u^0(t)) \quad (=) \quad \sup_{u\in Z} \Pi(t,\omega^0(t,x),v^0(t,x),u),$$

катышы $[0,T]$ кесиндисинин дээрлик бардык чекиттеринде аткарылышы зарыл жана жетиштүү, мында $Z - \ t \in [0,T]$ кесиндисинин ар бир чекитинде $u(t)$ функциясынын жол берилген маанилеринин көптүгү.

Максимум принцибинин так эмес далилдениши төмөнкү барабарсыздыктан келип чыгаарын белгилеп кетели:

$$\Delta\Pi(t,\omega(t,x),\nu(t,x),u(t)) = \Pi(t,\cdots,u(t)+\Delta u(t)) - \Pi(t,\cdots,u(t)) \le 0.$$

(8) ге ылайык максимум принцибинин натыйжасы катары төмөнкүдөй катыштар алынат:

$$\Pi_u(\cdot,u) = \omega(t,x_0(t))\, f_u\left[t,u(t)\right] - 2\beta p\left[t,u(t)\right]\cdot p_u\left[t,u(t)\right] = 0; \quad (12)$$

$$\Pi_{uu}(\cdot,u) = \omega(t,x_0(t))\, f_{uu}\left[t,u(t)\right] - 2\beta\left(p^2\left[t,u(t)\right] + p\left[t,u(t)\right] p_{uu}\left[t,u(t)\right]\right) < 0. \quad (13)$$

жана булар жалпысынан оптималдуулук шарттары деп аталат.

Оптималдык башкаруу төмөнкү катыштан аныкталат:

$$2\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]\cdot p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]} = \omega(t,x_0(t)). \quad (14)$$

мында

$$\omega(t,x_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)\, z_n(x_0(t)) = -2\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)\left[-h_n + \int_0^T E_n(T,\eta,\lambda)\, f\left[\eta,u(\eta)\right]d\eta\right]. \quad (15)$$

Маселени изилдөөнүн жүрүшүндө төмөнкү теорема формулировкаланды:

Теорема. Мейли (2)-(5) чектик маселесинде $K(t,\tau)\in H(D)$, $\xi(x)\in H(0,1)$, $g(x)\in H(0,1)$, $\psi_2(x)\in H(0,1)$ берилген функциялары Гильберт мейкиндигинин, ал эми $\psi_1(x)\in H_1(0,1)$ биринчи тартиптеги Соболев мейкиндигинин элементтери болсун. Эгерде $f[t,u(t)]$ тышкы булак функциясы ар бир фиксирленген $u(t)\in H(0,T)$ үчүн квадраттык суммалануучу функциялардын Гильберт мейкиндигинин элементи болсо жана $u(t)$ функционалдык өзгөрмөсүнө карата монотондуулук шартын канааттандырса, б.а. (6) шарты аткарылса, анда (2)-(5) чектик маселеси $H(Q)$ квадраттык суммалануучу функциялар мейкиндигинде $v_t(t,x)$ жалпыланган туундуга ээ болуучу $v(t,x)$ жалгыз жалпыланган чыгарылышына ээ болот.

(14), (15) барабардыктарына ылайык *FInt-Equa-Func* категориясынан төмөнкү түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдеме алынды:

$$\beta \frac{p\left[t,u(t)\right]p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t,\lambda)\left[h_n - \int_0^T E_n(T,\tau,\lambda)\, f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right] \qquad (16)$$

мында

$$h_n = \xi_n - \psi_{1n}\left[\cos\lambda_n T + \lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right] - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n T + \lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right],$$

$$G_n(T,t,\lambda) = \frac{z_n(x_0(t))}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n(T-t) + \lambda\int_0^T P_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(T-s)ds\right],$$

$$E_n(T,\eta,\lambda) = \frac{1}{\lambda_n}\varepsilon_n(T,\eta,\lambda)z_n(x_0(\eta)),$$

$R_n(t,s,\lambda)$, $P_n(t,s,\lambda)$ −негизги жана түйүндөш чектик маселелерди чыгарууда алынган резольвенталар, алар төмөнкү баалоолорду канааттандырат:

$$\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds \le \frac{K_0T}{\left(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}. \quad \int_0^T P_n^2(s,t,\lambda)ds \le \frac{K_0T}{\left(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}.$$

$$\beta \frac{p\left[t,u(t)\right]p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]} = q(t)$$

$$u(t) = \varphi\left[t,q(t),\beta\right].$$

(17)

катыштарын эске алуу менен (16) теңдемеси

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t,\lambda)\left[h_n - \int_0^T E_n(T,\tau,\lambda)\, f\left[\tau,\varphi\left(\tau,q(\tau),\beta\right)\right]d\tau\right].$$

(18)

түрдөгү теңдемесине келтирилет же аны төмөндөгүдөй оператордук формада жазууга болот:

$$q = G\left[q(t)\right] = h - G_0[q].$$

(19)

мында

$$h = h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t,\lambda)h_n, \qquad (20)$$

$$G_0[q] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,\tau,\lambda)\int_0^T E_n(T,\tau,\lambda)\, f\left[\tau,\varphi\left(\tau,q(\tau),\beta\right)\right]d\tau. \qquad (21)$$

$$\left\| f\left[t,u(t)\right]- f\left[t,\bar{u}(t)\right]\right\|_{H(0,T)} \le f_0\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_{H(0,T)}, \qquad f_0>0$$

$$\left\|\varphi\left[\tau,q(t),\beta\right]-\varphi\left[\tau,\bar{q}(t),\beta\right]\right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta)\left\|\left[q(t)-\bar{q}(t)\right]\right\|_{H(0,T)}, \quad \varphi_0(\beta)>0$$

$$\gamma = 4\sqrt{T}\left[1+\frac{\lambda^2 K_0 T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right) f_0\varphi_0(\beta)<1$$

шарттарынын аткарылышында *FInt-Equa-Func* категориясынан (18) теңдемеси *H (Q)* мейкиндигинде жалгыз чыгарылышка ээ болот жана ал үчүн төмөнкү баалоо орун

$$\left\|q^0(t)-q_n(t)\right\|_{H(0,T)} = \left\|G\left[q^0(t)\right]-G\left[q_n(t)\right]\right\|_{H(0,T)} =$$
$$=\left\|h-G_0\left[q^0(t)\right]-h+G_0\left[q_n(t)\right]\right\| = \left\|G_0\left[q^0(t)\right]-G_0\left[q_n(t)\right]\right\|_{H(0,T)} \le$$
$$\le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G\left[q_0(t)\right]-q_0(t)\right\|_{H(0,T)} = \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|h-G_0\left[q_0(t)\right]-q_0(t)\right\|_{H(0,T)},$$

алаары далилденген:

мында $q^0(t)=\lim\limits_{n\to\infty} q_n(t)$ – (18) теңдемесинин так чыгарылышы.

$q^0(t)$ чыгарылышын колдонуу менен (16) бир тектүү эмес теңдемесинин чыгарылышы катары оптималдык башкарууну аныктайбыз.

$$u^0(t)=\varphi\left[t,q^0(t),\beta\right].$$

$u^0(t)$ оптималдык башкаруусуна туура келүүчү (9) чектик маселесинин чыгарылышы төмөнкүдөй түргө ээ:

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right)z_n(x), \tag{22}$$

мында

$$a_n^0(t)=\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)z_n(x_0(\tau))\, f\left[\tau,u^0(\tau)\right]d\tau .$$

Оптималдык башкаруу жана оптималдык процессти билүү менен (1) функционалынын минималдуу мааниси төмөнкү формула аркылуу табылат:

$$I\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left[v^0(T,x)-\xi(x)\right]^2+\beta\int_0^T p^2\left[t,u^0(t)\right]dt.$$

Табылган $\left(u^0(t),v^0(t,x),I\left(u^0\right)\right)$ үчтүгү (1)-(6) сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин толук чыгарылышын аныктайт.

Оптималдуу башкаруунун k-жакындашуусу

$$u_k(t)=\varphi[t,q_k(t),\beta],\qquad k=1,2,3\ldots$$

$q_k(t)$ жана $q^0(t)$ төмөнкү баалоону канааттандырышат:

$$\left\|q^0(t)-\mathrm{q}_k(t)\right\|_{H(0,T)}\le\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\overline{G}_0,\quad \gamma<1,\ \overline{G}_0-const$$

$$\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\le\left\|\varphi[t,q^0(t),\beta]-\varphi[t,q_k(t),\beta]\right\|_{H(0,T)}\le\varphi_0(\beta)\left\|q^0(t)-q_k(t)\right\|_{H(0,T)}\le$$

$$\le\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\overline{G}_0\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$$

катышы алынат жана мындан оптималдык башкаруунун жакындашууларынын жыйналуучулугу келип чыгат.

Төмөнкү катыштардан

$$\left\|V^0(t,x)-V_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\left\|V^0(t,x)-V^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+$$
$$\left\|V^m(t,x)-V_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|V_k^m(t,x)-V_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0,$$

$V_k^{m,r}$, *m,k,r*– жакындашуусунун $V^0(t,x)$ оптималдуу процессине жыйналуучулугу келип чыгат.

Мында $V^m(t,x)$ –оптималдуу процесстин резольвента боюнча жакындашуулары, ал эми $V_k^m(t,x)$ – оптималдуу процесстин резольвента жана оптималдуу башкаруу боюнча жакындашуулары.

Төмөнкү катыштардан

$$\left|I(u^0(t))-I_m^r(u_k(t))\right|\le\left|I(u^0(t))-I_m(u^0(t))\right|+$$
$$\left|I_m(u^0(t))-I_m(u_k(t))\right|+\left|I_m(u_k(t))-I_m^r(u_k(t))\right|\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0,$$

$I_m^r(u_k(t))$ *m,k,r*– жакындашуусунун $I(u^0(t))$ функционалдын минималдуу маанисине жыйналуучулугу келип чыгат.

Ошондой эле моделдик мисалда алынган теориялык жыйынтыктарды ырастаган сандык эсептөөлөрдүн натыйжалары келтирилген.

«КӨП ЧЕКИТТҮҮ БАШКАРУУ БУЛАКТАРЫ МЕНЕН СЕРПИЛГИЧ ТЕРМЕЛҮҮЛӨРДҮ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПТИМАЛДАШТЫРУУ» аттуу IV бапта тышкы күчтөрдүн көп чекиттүү таасири астында Фредгольм интегро-дифференциалдык теңдемеси менен мүнөздөлгөн серпилгичтүү термелүүлөр маселеси изилденген. Каралып жаткан маселе үчүн максимум принциби формулировкаланып, оптималдуулук шарттары дифференциалдык барабардыктар жана барабарсыздыктар түрүндө алынды.

4.1 бөлүмүндө төмөнкү чектик маселе менен мүнөздөлгөн толкун процесси изилденген:

$$V_{tt} = V_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau + \sum_{k=1}^{m} g_k(x)\delta(x-x_k)f_k[t,u_k(t)],$$
$$V(0,x) = \psi_1(x), V_t(0,x) = \psi_2(x), 0 < x < 1,$$
$$V_x(t,0) = 0, V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = 0, 0 < t \leq T,$$

(23)

мында $V(t,x)$ функциясы узундугу бирге барабар серпилгичтүү жиптин *(0,1)* интервалынын тиешелүү $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ ички чекиттерине топтолгон $g_k(x)f_k[t,u_k(t)], k = 1,2,3,\dots,m,$ тышкы толкундоочу күчтөрдүн таасири астында термелүү абалын сүрөттөйт; $\psi_1(x) \in H_1(0,1),\ \psi_2(x) \in H(0,1),\ g_k(x) \in H(0,1),$ $f_k[t,u_k(t)] \in H(0,T)$ – берилген функциялар жана $f_k[t,u_k(t)]$ – сызыктуу эмес жана $u_k(t)$ функционалдык өзгөрмөсү боюнча монотондуу б.а. $\dfrac{\partial f_k[t,u(t)]}{\partial u_k(t)} \neq 0,\ \forall t \in [0,T];$ $K(t,\tau)$ ядросу $D = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq \tau \leq T\}$ областында аныкталган жана $H(D)$ мейкиндигинин элементи, б.а. $\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt = K_0 < \infty;$

$g_k(x)$ функциялары бардык $k = 1,2,3,...,m$ үчүн үзгүлтүксүз жана $g_k'(x)$ үзгүлтүксүз туундуларга ээ жана $g_k(1) = 0;$ $x_k \in (0,1);$ - фиксирленген убакыт моменти, α - оң маанидеги туруктуу, λ - параметр.

Ошондой эле, жогорудагы схема боюнча (3.1- пункту) башкарылуучу процесстин чектик маселесинин жалпыланган чыгарылышы төмөнкү формула менен табылат:

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds + a_n(t)\right)z_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n(t,\lambda) + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \varepsilon_n(t,\eta,\lambda)\sum_{k=1}^{m} g_k(x_k)z_n(x_k)\, f_k[\eta,u_k(\eta)]d\eta\right\}z_n(x);$$

(24)

мында

$$\psi_n(t,\lambda)=\psi_{1n}\left[\cos\lambda_n t+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right]+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n t+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right]; \quad (25)$$

$$\varepsilon_n(t,\eta,\lambda)=\begin{cases}\sin\lambda_n(t-\eta)+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & 0\le\eta\le t;\\ \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & t\le\eta\le T;\end{cases}$$

4.2-бөлүмдө көп чекиттүү башкаруулары менен серпилгичтүү термелүүлөрдү сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселеси изилденет. (23) чектик маселесинин чыгарылыштарынын көптүгүндө

$$J\left[u_1(t),...,u_m(t)\right]=\int_0^1\left\{\left[V(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_t(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^m p_k^2\left[t,u_k(t)\right]dt,\ \beta>0,$$

(26)

жалпыланган квадраттык функцияны минималдаштыруу талап кылынат.

Монотондуулук шартына ылайык ар бир $u(t)=\{u_1(t),...,u_m(t)\}$ вектор-башкаруу функциясы жалгыз түрдө $V(t,x)$ функциясын аныктайт. Бул жагдайды эске алуу менен функционалдын өсүндүсү эсептелинген:

$$\Delta J\left[u(t)\right]=-\int_0^T\Delta\prod\left(t,V(t,x),\omega(t,x),u(t)\right)dt+\int_0^T\left\{\Delta V^2(T,x)+\Delta V_t^2(T,x)\right\}dx,$$

мында

$$\Delta\prod\left(t,\cdot,u(t)\right)=\prod\left(t,\cdot,u(t)+\Delta u(t)\right)-\prod\left(t,\cdot,u(t)\right),$$

$$\prod\left(t,V(t,x),\omega(t,x),u(t)\right)=\sum_{k=1}^m g_k(x_k)\omega(t,x_k)f_k\left[t,u_k(t)\right]-\beta\sum_{k=1}^m p_k^2\left[t,u_k(t)\right]$$

(27)

ал эми $\omega(t,x)$ функциясы төмөнкү түйүндөш чектик маселесинин жалпыланган чыгарылышы

$$\omega_{tt}=\omega_{xx}+\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau,\ 0<x<1,\ 0\le t<T,$$

$$\omega(T,x)=-2[V_t(T,x)-\xi_2(x)],$$

$$\omega_t(T,x)=2[V(T,x)-\xi_1(x)],$$

$$\omega_x(t,0)=0,\ \ \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0.$$

Каралып жаткан сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселеси үчүн максимум принциби төмөнкүдөй формулировкаланды:

(23), (26) сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинде башкаруунун оптималдуу болушу үчүн

$$\prod\left(t, V(t,x), \omega(t,x), u^0(t)\right) = \sup_{u\in F}\prod(t, V(t,x), \omega(t,x), u).$$

катышынын F жол берилген маанилеринин областынын [0, T] кесиндисинде дээрлик аткарылышы зарыл жана жетиштүү. F областы ачык көптүк болгондуктан, $u_1(t),...,u_m(t)$ оптималдык башкаруулары үчүн максимум принцибинин натыйжасы катары төмөнкү оптималдык шарттары алынды:

$$2\beta\frac{p_k\left[t,u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]} = g_k(x_k)\omega(t,x_k),$$

(28)

$$\prod_{k=1}^{m}(-1)^k f_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]\left(\frac{p_k\left[t,u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}\right) > 0, \quad k=1,...,m,$$

(29)

Мында

$$f_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right] = \frac{\partial f_k\left[t,u_k(t)\right]}{\partial u_k}, \quad p_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right] = \frac{\partial p_k\left[t,u_k(t)\right]}{\partial u_k}.$$

(28) шартына ылайык $u^0(t)$оптималдык башкаруусуна карата төмөнкү сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин системасы алынат:

$$\beta\frac{p_k\left[t,u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]} + \sum_{n=1}^{\infty} g_k(x_k)z_n(x_k)G_n^*(T,t,\lambda)\int_0^T E_n(T,\tau,\lambda)\cdot$$
$$\cdot\sum_{k=1}^{m} g_k(x_k)z_n(x_k)f_k\left[\tau,u_k(\tau)\right]d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} g_k(x_k)z_n(x_k)G_n^*(T,t,\lambda)h_n, \quad k=1,...,m. \tag{30}$$

Төмөнкү катыштардан

$$\beta\frac{p_k\left[t,u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[t,u_k(t)\right]} = \sigma_k(t), \quad k=1,2,3,...,m.$$

(31)

$$u_k(t) = \varphi_k\left[t,\sigma_k(t),\beta\right], \quad k=1,...,m.$$

(32)

(30) системасы төмөнкү түргө келтирилет:

$$\sigma(t) + \sum_{n=1}^{\infty} K_n\left[x_1,...,x_m\right]G_n^*(T,t,\lambda)\int_0^T E_n(T,\tau,\lambda)\sum_{k=1}^{m} K_n^*\left[x_1,...,x_m\right]f\left[\tau,\varphi\left(\tau,\sigma(\tau),\beta\right)\right]d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} K_n\left[x_1,...,x_m\right]G_n^*(T,t,\lambda)h_n, \quad k=1,...,m,$$

мында

$$\sigma(t) = \left\{\sigma_1(t),...,\sigma_m(t)\right\},$$

$$K_n[x_1,...,x_m]=\{g_1(x_1)z_n(x_1),...,g_m(x_m)z_n(x_m)\},$$
$$\varphi[t,\sigma(t),\beta]=\{\varphi_1[t,\sigma_1(t),\beta],...,\varphi_m[t,\sigma_m(t),\beta]\},$$
$$f[t,\varphi(t,\sigma(t),\beta)]=\{f_1[t,\varphi_1(t,\sigma_1(t),\beta)],...,f_m[t,\varphi_m(t,\sigma_m(t),\beta)]\}.$$

Төмөнкү шарттардын аткарылышында

$$\left|f_k[t,u_k(t)]-f_k[t,\tilde{u}_k(t)]\right|\le f_{k0}\left|u_k(t)-\tilde{u}_k(t)\right|,\quad f_{k0}>0,$$
$$\left|\varphi_k[t,\sigma_k(t),\beta]-\varphi_k[t,\tilde{\sigma}_k(t),\beta]\right|\le\varphi_{k0}(\beta)\left|\sigma_k(t)-\tilde{\sigma}_k(t)\right|,\quad \varphi_{k0}(\beta)>0.$$

$$\gamma=8T\sum_{k=1}^{m}\tilde{g}_{k0}^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right)\overline{f}_0\overline{\varphi}_0(\beta)<1,$$

мында $f_0=\max(f_{10},...,f_{m0})$, $\varphi_0(\beta)=\max(\varphi_{10}(\beta),...,\varphi_{m0}(\beta))$,

$\sigma=K[\sigma]+h$ оператордук теңдемеси $H^m(0,T)$мейкиндигинде жалгыз чыгарылышка ээ.

$H^m(0,T)$ мейкиндигинде $\sigma=K[\sigma]+h$ оператордук теңдемесинин чыгарылышы удаалаш жакындаштыруулар методу менен табылат: $\sigma_n=K[\sigma_{n-1}]+h,\quad n=1,2,3,...,$

мында σ_0- $H^m(0,T)$ мейкиндигинин эрктүү элементи

$\sigma_0(t)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(t).$

Жакындашуулар менен так чыгарылыштын ортосунда төмөнкү катыш орун алат:

$$\|\sigma(t)-\sigma_n(t)\|_{H^m(0,T)}\le\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\|K[\sigma_0(t)]+h(t)-\sigma_0(t)\|_{H^m(0,T)}.$$

Табылган $\sigma^0(t)=(\sigma_1^0(t),...\sigma_m^0(t))$ чыгарылышын (32) ге коюу менен оптималдык чыгарылыш $u_k^0(t)=\varphi_k[t,\sigma_k^0(t),\beta],\quad k=1,2,3,...,m$ түрүндө, андан кийин оптималдык процесс

$$V^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n(t,\lambda)+\int_0^T\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)\sum_{k=1}^{m}g_k(x_k)z_n(x_k)f_k[\tau,u_k^0(\tau)]d\tau\right\}z_n(x),$$

жана функционалдын минималдык мааниси төмөндөгүдөй эсептелинет

$$J[u^0(t)]=\int_0^1\left\{[V^0(T,x)-\xi_1(x)]^2+[V_t^0(T,x)-\xi_2(x)]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^{m}p_k^2[t,u_k^0(t)]dt,\ \beta>0.$$

$\left(u^0(t),\ V^0(t,x),\ J\left[u^0(t)\right]\right)$ табылган чыгарылыштардын үчтүгү сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин толук чыгарылышы болуп саналат.

Каралып жаткан (23) чектик маселеде Фредгольм интегралдык операторунун теңдемеде бар болушу оптималдык процесстин жакындашууларынын жана ага ылайык функциянын минималдуу маанисинин жакындашууларынын үч түрүн аныктоого алып келет, б.а. оптималдык процесстин жакындашууларынын төмөнкүдөй түрлөрүн ажыратабыз:

1) «резольвента» боюнча N- жакындашуусу

$$V^{0,N}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n^N(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T\varepsilon_n^N(t,\eta,\lambda)\sum_{k=1}^{m}g_k(x_k)z_n(x_k)f_k[\eta,u^0{}_k(\eta)]d\eta\right\}z_n(x);$$

2) башкаруу боюнча N,i- жакындашуусу

$$V_i^N(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n^N(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T\varepsilon_n^N(t,\eta,\lambda)\sum_{k=1}^{m}g_k(x_k)z_n(x_k)f_k[\eta,u^{(i)}{}_k(\eta)]d\eta\right\}z_n(x);$$

3) N,i,r- чектик өлчөмдүү жакындашуусу

$$V_i^{N,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left\{\psi_n^N(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T\varepsilon_n^N(t,\eta,\lambda)\sum_{k=1}^{m}g_k(x_k)z_n(x_k)f_k[\eta,u^{(i)}{}_k(\eta)]d\eta\right\}z_n(x);$$

жана оптималдык процесстин жакындашууларына ылайык тиешелүү түрдө функционалдын минималдуу маанилеринин жакындашууларынын төмөнкү түрлөрүн карайбыз:

1) «резольвента» боюнча N-жакындашуусу

$$J^N\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left\{\left[V^{0,N}(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_t^{0,N}(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^{m}p_k^2\left[t,u_k^0(t)\right]dt,\ \beta>0$$

2) башкаруу боюнча N,i- жакындашуусу

$$J_i^N\left[u^{(i)}(t)\right]=\int_0^1\left\{\left[V_i^N(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_{t,i}{}^N(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^{m}p_k^2\left[t,u_k^{(i)}(t)\right]dt,\ \beta>0$$

3) N,i,r- чектик өлчөмдүү жакындашуусу

$$J_i^{N,r}\left[u^{(i)}(t)\right]=\int_0^1\left\{\left[V_i^{N,r}(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_{t,i}{}^{N,r}(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^{m}p_k^2\left[t,u_k^{(i)}(t)\right]dt,\ \beta>0.$$

КОРУТУНДУ

Диссертациялык иште бир кыймылдуу чекиттин же бир нече туруктуу булактардын таасири башкаруу функциясынан сызыктуу эмес функциялар менен мүнөздөлгөн учурдагы Фредгольм интегро-дифференциалдык теңдемелери менен мүнөздөлгөн серпилгичтүү термелүүлөрдүн сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелерин бир маанилүү чечилишинин маселелери изилденген.

Интегралдык квадраттык функционалды минимималдаштырууда чекиттик оптималдык башкаруу сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер жана алардын системасын, дифференциалдык барабарсыздык жана алардын системасы түрүндөгү кошумча шартты канааттандыраары белгиленген.

Сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чечилиши үчүн жетиштүү шарттар табылды. Сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин жакындатылган чыгарылыштарын тургузуунун алгоритми иштелип чыгып, алардын башкаруу, оптималдуу процесс жана функционал боюнча жыйналуучулугу далилденди.

Кыймылдуу чекиттик жана фиксирленген көп чекиттик тышкы булактардын катышуусунда термелүүчү процесстерди сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин чечүү үчүн иштелип чыккан ыкма конструктивдүү жана Фредгольм же Вольтерра тибиндеги параболалык же гиперболалык типтеги интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн процесстерди оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселелерин чечүүдө колдонулушу мүмкүн.

Алынган натыйжалар теориялык мааниге ээ жана бөлүштүрүлгөн параметрлүү системаларды сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелерин изилдөө үчүн кызыгууну жаратат.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН ТЕМАСЫ БОЮНЧА ЖАРЫЯЛАНГАН ЭМГЕКТЕРДИН ТИЗМЕСИ

1. Дуйшеналиева, У. Э. Обобщенное решение краевой задачи управляемого колебательного процесса [Текст]/ Керимбеков А.К., Дуйшеналиева У. Э., Эсенгулова П. // Исследования по интегро–дифференциальным уравнениям. –Вып. 33–Бишкек, 2014. –С. 123–127.

2. Дуйшеналиева, У. Э. Задача подвижного точечного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Керимбеков А.К., Дуйшеналиева У. Э. // Журнал «Вестник КРСУ», –Том 16, № 5, – Бишкек, 2016. –С. 51-57. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26452854

3. Дуйшеналиева, У. Э. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний при точечном управлении [Текст]/ Керимбеков А., Дуйшеналиева У.Э. // Проблемы автоматики и управления, –№2, – Бишкек, 2016. –С. 57-62. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27692767

4. Дуйшеналиева, У. Э. Решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями с подвижными точечными управлениями[Текст] / Дуйшеналиева У.Э. // Журнал «Вестник КРСУ». –Том 16, № 9. – Бишкек, 2016. – С. 7-11. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27422775

5. Дуйшеналиева, У. Э. Численный анализ сходимости приближений оптимального управления и оптимального процесса в задаче нелинейной оптимизации упругих колебаний [Текст] / У. Э. Дуйшеналиева //Журнал «Вестник КРСУ». –Том 21, № 12. –Бишкек, 2021. – С. 3-10. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48045601

6. Duishenalieva, U. Generalized solution of a boundary value problem under point exposure of external forces [Text] / A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva, U. Duishenalieva // International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 113 No. 4 – 2017 . – p. 609-623. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29484083

7. Duishenalieva, U. On solvability of optimization problem for elastic oscillations with multipoint sources of control [Text] / A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva, U. Duishenalieva, E. Seidakmat kyzy // International Conference «Functional Analysis in In-terdisciplinary Applications» (FAIA2017), AIP. American Institute of Physics, Melville, NY. – 2017, 060009. - Режим доступа: https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000417411800064

Дуйшеналиева Урумкан Эрмековнанын 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн сунушталган «Фредгольм тибиндеги интегро- дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн термелүү процесстерин чекиттик башкаруу» аттуу диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: термелүү процесси, кыймылдуу оптималдык башкаруу, жалпыланган чыгарылыш, резольвента, Неймандын катары, функционалды минималдаштыруу, максимум принциби, оператордук теңдеме, жыйналуучулук.

Изилдөөнүн объектиси: Фредгольм интегро- дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн башкарылуучу серпилгичтүү термелүүлөр

Изилдөөнүн предмети: Чекиттүү башкаруу аркылуу Фредгольм интегро- дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн серпилгичтүү термелүүлөрдү сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелеринин чыгарылышынын алгоритмин иштеп чыгуу.

Изилдөөнүн максаты: Фредгольм интегро-дифференциалдык теңдемелери менен мүнөздөлгөн серпилгичтүү термелүүлөрдү сызыктуу эмес оптималдуу башкаруу маселелерин изилдөө жана сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы үчүн жетиштүү шарттарды алуу.

Изилдөөнүн ыкмалары: Математикалык физика, бөлүштүрүлгөн параметрлүү системаларды оптималдык башкаруу теориясынын, оператордук теңдемелер теориясынын жана классикалык вариациялык эсептөөлөрдүн методдору колдонулду.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы: Изделген оптималдык башкаруу тышкы таасир этүү жана сапат критерий функциясына карата барабарсыздык түрүндөгү кошумча шартты канааттандырган спецификалык формадагы сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чыгарылышы катары аныкталышы мүмкүн экендиги көрсөтүлдү; сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чыгарылышы бир маанилүү чечилишинин жетиштүү шарттары аныкталды жана ал чыгарылыштын жакындашууларынын оптималдык башкаруу, оптималдык процесс жана функционал боюнча жыйналуучулугу далилденди.

Изилдөөнүн практикалык мааниси: термелүү процесстерин чекиттик башкарууда сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин чечүү үчүн иштелип чыккан алгоритм тиркемелерде термелүү процесстерин башкарууга байланышкан колдонмо маселелерди чыгарууда колдонулушу мүмкүн.

РЕЗЮМЕ

диссертации Дуйшеналиевой Урумкан Эрмековны на тему «Точечное управление колебательными процессами, описываемыми фредгольмово интегро– дифференциальными уравнениями», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: колебательный процесс, подвижное оптимальное управление, обобщенное решение, резольвента, минимизация функционала, принцип максимума, операторное уравнение, сходимость.

Объект исследования: управляемые упругие колебания, описываемые фредгольмово интегро- дифференциальными уравнениями.

Предмет исследования: разработка алгоритма построения решения задачи нелинейной оптимизации упругими колебаниями, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями при точечных управлениях.

Цель исследования: исследование однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации упругими колебаниями, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда колебания происходят под действием точечных источников.

Методы исследования: методы математической физики, теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, теории операторных уравнений и классического вариационного исчисления.

Полученные результаты и новизна: установлено, что оптимальное управление может быть определено, как решение нелинейного интегрального уравнения специфического вида (двухкратная нелинейность), удовлетворяющее дополнительному условию в виде неравенства относительно функции внешнего источника и функции критерия качества; найдены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации упругими колебаниями и доказана сходимость приближений решения по оптимальному управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

Практическое значение исследования: разработанный алгоритм построения решения задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при точечном управлении может быть использован в приложениях при решении прикладных задач, связанных с управлением колебательных процессов.

SUMMARY

Dissertation of Duishenaliyeva Urumkan Ermekovna on the topic "Point control of oscillatory processes described by Fredholm integro-differential equations", submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control.

Keywords: oscillatory process, moving optimal control, generalized solution, integro-differential equation, resolvent, Neumann series, functional minimization, maximum principle, optimality conditions, operator equation, convergence.

Object of research: controlled elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations.

Subject of research: development of an algorithm for constructing a solution to the problem of nonlinear optimization by elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations with point controls.

The purpose of the research: to study the unique solvability of the problem of nonlinear optimization by elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations in the case when oscillations occur under the action of point sources, and to obtain sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the nonlinear optimization problem.

Research methods: the methods of the theory of differential equations, mathematical physics, the theory of integral equations, functional analysis, the theory of optimal control of systems with distributed parameters, the theory of operator equations and the calculus of variations were used in the study.

The obtained results and novelty: it is established that the optimal control can be defined as a solution to a nonlinear integral equation of a specific type (two-fold nonlinearity) that satisfies an additional condition in the form of an inequality with respect to the external source function and the quality criterion function; sufficient conditions for the unique solvability of the problem of nonlinear optimization by elastic vibrations are found; an algorithm for constructing an approximate solution to a nonlinear optimization problem was developed and their convergence in terms of optimal control, optimal process, and functional was proved.

Practical significance of the research: the developed algorithm for constructing a solution to the problem of nonlinear optimization of oscillatory processes with point control can be used in applications for solving applied problems related to the control of oscillatory processes.

БУЛ ИШТЕ КОЛДОНУЛГАН ШАРТТУУ БЕЛГИЛӨӨЛӨР ЖАНА ТҮШҮНҮКТӨР

1. $u_z(\dots, z, \dots) -$ z өзгөрмөсү боюнча u функциясынын жекече туундулары;

2. $Q = (0,1) \times (0, T)$ – Oxt тегиздигинин областы;

4. *H(Y)* - *Y* көптүгүндө аныкталган квадраттык суммалануучу Гильберт мейкиндиги*;*

5. *H_1(Y)* - *Y* көптүгүндө аныкталган функциялардын биринчи тартиптеги Соболев мейкиндиги;

6. $< \cdot, \cdot > - H$ Гильберт мейкиндигиндеги скалярдык көбөйтүндү;

7. $\| \cdot \|_H \; - H$ Гильберт мейкиндигиндеги элементтин нормасы;

8. $C^{1,2}(Q)\;-\;Q$ областында аныкталган жана t өзгөрмөсүнө карата биринчи тартиптеги туундуга жана x өзгөрмөсүнө карата экинчи тартиптеги туундуга ээ болгон *V(t,x)* үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги;

9. $\delta(x)$ - Дирактын дельта-функциясы;

10. *Equa-Func* - функциялар үчүн теңдемелер категориясы;

11. *Equa-Par* - параметрлүү теңдемелердин категориясы, анын ичинде эгерде параметр башкаруу катары каралса *Equa-Contr* жана эгерде теңдеменин аныктамасына башкаруу боюнча оптималдаштыруу керек болгон анык маанилүү функциясы камтылса *Equa-Opt*;

12. *Ord-Equa-Func* – бир скалярдык өзгөрмөлүү функциялар үчүн теңдемелер категориясы (анын ичинде – кадимки дифференциалдык теңдемелер);

13. *Part-Equa-Func* – вектордук өзгөрмөлүү же бир нече скалярдык өзгөрмөлүү функциялар үчүн теңдемелер категориясы (анын ичинде жекече туундулардагы дифференциалдык теңдемелер);

14. *Diff-Equa-Func* – белгисиз функциядан туундулар катышкан теңдемелер категориясы;

15. *Int-Equa-Func* – белгисиз функциядан интегралдар катышкан теңдемелер категориясы;

16. *FInt-Equa-Func*– белгисиз функциянын Фредгольм тибиндеги интегралдарын (белгиленген аралыкта) камтыган теңдемелердин категориясы;

17. *VInt-Equa-Func* – аргументтин мурунку маанилеринен (анын ичинде интегралдык белгиси астында) белгисиз функциянын маанилеринен турган теңдемелердин категориясы.