ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Б. ОСМОНОВА

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ Д 05 22 651

На правах рукописи
УДК 517.968

Садыкова Гульхан Курбанбековна

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош - 2023

Работа выполнена на кафедре математического анализа Ошского государственного университета

Научный руководитель:	**Аширбаева Айжаркын Жоробековна,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики Ошского технологического университета имени М.М. Адышева (Кыргызстан, г.Ош).
Официальные оппоненты:	**Кененбаева Гулай Мекишовна**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий Кыргызского национального университета имени Ж.Баласагына (Кыргызстан, г.Бишкек). **Тампагаров Куштарбек Бекмуратович**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры естественно-гуманитарных дисциплин Научно-исследовательского медико-социального института (Кыргызстан, г.Жалал-Абад)
Ведущая организация:	Кыргызский государственный университет имени И.Арабаева, кафедра математики и технологии ее обучения. Кыргызстан, 720026, г. Бишкек, ул. Раззакова, 51А.

Защита диссертации состоится 28 марта 2023 г. в 11:00 часов на заседании диссертационного совета Д 05.22.651 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Ошском государственном университете и Жалал-Абадском государственном университете им. Б. Осмонова по адресу: 723500, г. Ош, 723500, ул. Ленина 331.

Код онлайн трансляции защиты диссертации:
https://vc.vak.kg/b/052-pvt-luj-9ih

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Ошского государственного университета и Жалал-Абадского государственного университета им. Б. Осмонова, а также на сайте диссертационного совета: https://oshsu.kg

Автореферат разослан 28 февраля 2023 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Бекешов Т. О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Дифференциальные уравнения в частных производных и системы дифференциальных уравнений в частных производных часто встречаются в задачах механики сплошных сред, биомеханике и в различных областях физики, где происходят моделирование некоторой сплошной среды.

Для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных сначала их сводят к уравнению или системе уравнений первого-второго порядка, затем ее классифицируют и применяют один из методов, разработанных для уравнений различных типов. Нахождение решения, таким образом, трудно и всегда это не удается.

В настоящее время для нахождения решения систем дифференциальных уравнений в частных производных используется метод дополнительного аргумента. С его помощью можно найти точное решение некоторой системы.

В развитие метода дополнительного аргумента весомый вклад внесли ученые М.И. Иманалиев (1989-2015), Ю.А. Ведь (1989, 1994), С.Н. Алексеенко (1992-2001), П.С. Панков (1995-2003), Т.М. Иманалиев (1991-2001), А.Ж. Аширбаева (1993-2022), Э.А. Мамазиаева (2012-2022), Ж.И. (Мамбетов 2013-2022) и др.

Т. М. Иманалиев (1999-2000) применил метод дополнительного аргумента сначала к системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных. В его работах рассмотрено применение метода дополнительного аргумента к системе квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

М. И. Иманалиевым и С. Н. Алексеенко (1992, 2001) рассмотрена система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и с помощью метода дополнительного аргумента доказаны существование и единственность решения поставленной задачи.

А. Ж. Аширбаева, Ж. И. Мамбетов (2013-2018) провели работу по распространению метода дополнительного аргумента для систем дифференциальных уравнений в частных производных нового класса.

В настоящее время распространение метода дополнительного аргумента для систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений нового класса определяет актуальность данной работы.

Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими работами, проводимыми образовательными и научными учреждениями. Исследование по теме диссертации проводилось в рамках утвержденной тематики «Развитие метода дополнительного аргумента для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных» кафедры математического анализа Ошского государствен-ного университета.

Цель исследования.

Цель настоящей работы состоит в развитии метода дополнительного аргумента для решения следующих задач:

1) получить достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковым сомножителем, где сомножитель зависить от нескольких неизвестных функций;
2) получить достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с неодинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций;
3) построить решения систем двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковым и с неодинаковыми сомножителями;
4) обобщить полученные результаты с использованием развитого метода дополнительного аргумента для многомерного случая.

Научная новизна полученных результатов. Получены следующие результаты:

– найдены достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковым сомножителем, где сомножитель зависит от нескольких неизвестных функций;

– найдены достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с неодинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций;

– построены решения систем двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковым и с неодинаковыми сомножителями;

– полученные результаты с использованием развитого метода дополнительного аргумента обобщены для многомерного случая.

Практическая значимость полученных результатов.

В диссертации получены новые результаты, которые подтверждены строгими доказательствами и вносят определенный вклад в теорию нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

По полученным результатам работы построены решения конкретных задач. Разработанную схему применения метода дополнительного аргумента для решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных можно использовать при решении систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений других классов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Доказательство теорем существования и единственности решения начальных задач для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковым сомножителем, где сомножитель зависит от нескольких неизвестных функций;
2. Доказательство теорем существования и единственности решения начальных задач для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с неодинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций;
3. Построение решения систем двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с неодинаковыми и с одинаковым сомножителями;
4. Осуществлено применения развитого метода дополнительного аргумента для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных со многими пространственными переменными.

Личный вклад соискателя. В совместных работах [1; 3; 7-9] постановка задач принадлежит научному руководителю А.Ж. Аширбаевой, полученные основные результаты и оценки - соискателю.

Апробации результатов диссертации. Результаты исследований доложены и обсуждены на:

– международной научной конференции "III Борубаевские чтения", посвященной 35-летию Института математики НАН КР (Бишкек, май, 2019, опубликованы тезисы);

– международной научной конференции «Проблемы современной математики и ее приложения», посвященной 70-летию академика А.А. Борубаева (г. Бишкек, с. Булан-Соготту, июнь, 2021, опубликованы тезисы);

– IV международной научной конференции «Актуальные проблемы теорий оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений», приуроченная 50 -летию научно-педагогической деятельности и 75 -летнему юбилею профессора Акылбека Керимбекова (г. Бишкек, июнь, 2022);

– шестой международной конференции по анализу и прикладной математике (ICAAM 2022) (г. Анталия, Турция, октябрь, 2022, опубликованы тезисы);
– конференции “Жогорку окуу жайлардагы илим изилдөөлөрдүн фундаменталдык жана колдонмо маанилүүлүгү” (г. Жалал-Абад, ноябрь, 2022 г.);
– региональном научном семинаре имени К. Алымкулова «Актуальные проблемы математики и их применения» (2018- 2022 гг.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты работы опубликованы в статьях [1; 3-4; 6-9], а также опубликованы тезисы докладов [2; 5;10].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, четырех глав, 18 разделов, выводов, списка использованных источников 86 наименований, всего 91 страница компьютерного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Материалы диссертации изложены в следующей последовательности.

Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, а также основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ» дается обзор работ других авторов по теме диссертации и заключение, где определены нерешенные ранее задачи для исследований.

Из обзора, произведенного в этой главе, следует, что ранее в работах других авторов рассматривались с помощью метода дополнительного аргумента некоторые системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Более общие системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных не рассматривались. Другими методами такие более общие системы уравнений тоже не рассматривались.

Во второй главе «МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ»

представлены материалы и методы, используемые в решении поставленных задач.

Вторая глава состоит из 5 разделов. В ней определены объект, предмет и задачи исследований и поставлены задачи для исследований.

Объект исследования: Система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производным с одинаковым и неодинаковыми сомножителями, с двумя и многими переменными, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций.

Предмет исследования: Достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для рассматриваемых систем, получение решение в конкретном случае

Методы исследования: Развивается метод дополнительного аргумента и используются: принцип сжимающих отражений, метод последовательных приближений.

Приведены вспомогательные результаты. Дана краткая информация о методе дополнительного аргумента. Приведены основные леммы, используемые в этом методе. Также представлена краткая информация об основных результатах, полученных в диссертационной работе.

В третьей главе «РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ» рассмотрено доказательство теорем существования и единственности решения начальных задач для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковыми и с неодинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций. Доказательства теорем и построение решения систем двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных проводятся методом дополнительного аргумента.

В 3.1. рассматривается начальная задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + a(t,x,u_1(t,x),..u_n(t,x))\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x} = f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x)) \quad (1)$$

$(t,x)\in Q_1(T),$

$$u_i(0,x) = \varphi_i(x), \quad x\in R, \quad i=1,2,...,n. \quad (2)$$

Доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 3.1.1. Если для i=1,2,..,n:

$\varphi_i(x)\in \overline{C}^1(R)\cap Lip(L_i), \quad L_i>0-const,$

$f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n)\cap Lip(M_0^i\big|_x, M_1^i\big|_{u_1},...,M_n^i\big|_{u_n}),\ M_j^i>0-const,$

$a(t,x,u_1,..u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n)\cap Lip(N_0\big|_x, N_1\big|_{u_1},...,N_n\big|_{u_n}),\ N_i>0-const.$

Тогда существует такое $0<T_*\le T$, что система нелинейных

дифференциальных уравнений в частных производных (1) с начальным условием (2) имеет единственное решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

В 3.2. рассмотрено использование развитого метода дополнительного аргумента для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_1(t,x),..u_n(t,x))\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}= f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),\ldots,u_n(t,x))+$$
$$+F_i(t,x;u_1(s,\xi),\ldots,u_n(s,\xi):s,\xi),\quad (t,x)\in Q_1(T),\ \mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{n}, \tag{3}$$

с начальным условием (2).

Операторы в (3), где $i=1,2,\ldots,n$ имеют один из следующих видов:

$$F_i(t;u_1(s,\xi),\ldots,u_n(s,\xi):s,\xi)=\int_0^t\int_0^\infty K_i(t,s,\xi,u_1(s,\xi),\ldots,u_n(s,\xi))d\xi ds,$$

$$F_i(t,x;u_1(s,\xi),\ldots,u_n(s,\xi):s,\xi)= f_i(t,x,\int_{-\infty}^{\infty}K_i(x,\xi)u_i(t,\xi)d\xi)._n$$

$$F_i(t,x;u_1(s,\xi),\ldots,u_n(s,\xi):s,\xi)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\xi^2-x^{-2})u_i(s,\xi)d\xi ds \text{ и.т.д.},$$

и требуем выполнения для них дополнительных условий.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть выпоняются все уловия теоремы 3.1.1 и

F1) операторы F_i– непрерывные по первой и второй переменной и $F_i\in Lip(H_0|_x)$;

F2) существует такие $H_i>0$, что для любого $T_*\le T$

$$\|F_i(t,x;u_1^1(s,\xi),\ldots,u_n^1(s,\xi)):s,\xi)-F_i(t,x;u_1^2(s,\xi),\ldots,u_n^2(s,\xi)):s,\xi)\|_{Q_1(T_*)}\le$$

$$\le\sum_{i=1}^n H_i\|u_i^1(t,x)-u_i^2(t,x)\|_{Q_1(T_*)}.$$

Тогда существует такое $0<T_*\le T$, что система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (3) с начальным условием (2) имеет единственное решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

Рассмотрен конкретный пример.

ПРИМЕР 3.2.1:

Рассмотрена система вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + (u_1(t,x)+u_2(t,x))\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = \int\limits_0^1 u_1(t,s)ds + f_1(t), \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + (u_1(t,x)+u_2(t,x))\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = f_2(t), \end{cases} \tag{4}$$

$(t,x) \in \tilde{Q}_1\ (T), \quad f_i(t) \in C(R_+, R), \qquad (k = 1,2),$

с линейным начальным условием:

$$u_i(0,x) = \alpha_i + \beta_i x, \quad \alpha_i, \beta_i \in R, \quad x \in R_+, \quad i = 1,2. \tag{5}$$

Задача (4)-(5) методом дополнительного аргумента сведена к системе интегральных уравнений:

$$u_1(t,x)) = \alpha_1 + \beta_1\left[\frac{x-\alpha_3 t}{1+\beta_3 t} - \frac{1}{1+\beta_3 t}\int\limits_0^t (t-s)\int\limits_0^1 u_1(\nu,\xi)d\xi d\nu ds - \frac{1}{1+\beta_3 t}\int\limits_0^t\int\limits_0^s f_3(\nu)d\nu ds\right] + $$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_1(s,\xi)d\xi ds + \int\limits_0^t f_1(s)ds, \tag{6}$$

$$u_2(t,x) = \alpha_2 + \beta_2\left[\frac{x-\alpha_3 t}{1+\beta_3 t} - \frac{1}{1+\beta_3 t}\int\limits_0^t (t-s)\int\limits_0^1 u_1(\nu,\xi)d\xi d\nu ds - \frac{1}{1+\beta_3 t}\int\limits_0^t\int\limits_0^s f_3(\nu)d\nu ds\right] + $$
$$+\int\limits_0^t f_2(s)ds, \tag{7}$$

где

$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_3 = \beta_1 + \beta_2, \quad f_3(t) = f_1(t) + f_2(t).$

Для (6) применяется метод последовательных приближений.

В частности, из (6), (7) можно получить решение однородной системы с условием (5) в виде:

$$u_1(t,x)) = \alpha_1 + \beta_1\frac{x-\alpha_3 t}{1+\beta_3 t},$$

$$u_2(t,x)) = \alpha_2 + \beta_2\frac{x-\alpha_3 t}{1+\beta_3 t}.$$

В 3.3. рассматривается система нелинейных операторно-дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$
\begin{cases}
D[a_1(t,x,u_1,\dots,u_n)]u_1(t,x) = a_1(t,x,u_1,\dots,u_n) + F_1(t;u_1) \\
D[a_2(t,x,,u_1,u_2)]u_2(t,x) = F_2(t,x;u_1,u_2) \\
D[a_3(t,x,u_1,u_2,u_3)]u_3(t,x) = F_3(t,x;u_1,u_2,u_3) \\
-------------------------------------- \\
D[a_n(t,x,u_1,\dots,u_n)]u_n(t,x) = F_n(t,x;u_1,\dots,u_n)
\end{cases}
\tag{8}
$$

$(t,x) \in Q_1(T)$.

Система (8) рассматривается с начальным условием:

$$
\begin{cases}
u_1(0,x) = x, \\
u_\kappa(0,x) = \varphi_{\kappa-1}(x), \quad \kappa = 2,\dots,n
\end{cases}.
\tag{9}
$$

Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Пусть:

1) $\varphi_k(x) \in \overline{C}^{(1)}(R) \cap Lip(L_k), \quad k = 1,\dots,n-1,$

$a_i(t,x,u_1,\dots,u_n) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n) \cap Lip(M_i\big|_x, N_i\big|_{u_i})$, $M_i > 0 - const,$

$N_i > 0 - const$, *i=2,…,n;*

2) оператор *F_1*– непрерывный по первой переменной и он удовлетворяет условию Липшица: существует такое *K_1>0*, что для любого *$T_* \le T$*:

$$\| F_1(t;u_1) - F_1(t;u_2) \|_{Q_1(T_*)} \le K_1 \| u_1(t,x) - u_2(t,x) \|_{Q_1(T_*)},$$

3) операторы $F_i(t,x;u_1,u_2,\dots,u_i), \quad i = 1,\dots,n$ отображают непрерывные функции в непрерывные и

$F_i(t,x;u_1,u_2,\dots,u_i) \in Lip(P_i\big|_x, K_i\big|_{u_i}), \quad P_i, K_i - const, \quad i = 2,\dots,n.$

Тогда при $0 < T_* \le T$ задача (8)-(9) имеет решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

В разделе 3.4 . проводится построение решения начальной задачи для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_2(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 u_1(s,\xi)d\xi ds + f(t) \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = g(t,x,u_1(t,x)). \end{cases} \tag{10}$$

$$u_1(0,x) = x, \quad u_2(0,x) = \varphi(x), \; x \in R_+, \quad (t,x) \in \tilde{Q}_1. \tag{11}$$

Функции, приведенные в задаче (10) - (11), достаточно гладкие, т.е.

$$\varphi(x) \in \overline{C}(R_+), \quad g(t,x,u_1) \in \overline{C}^{(1)}(\tilde{Q}_1 \times R).$$

Решение поставленной задачи (10)-(11) имеет вид:

$$u_1(t,x) = x + (1+2b)t + \int\limits_0^t f(s)ds.,$$

$$u_2(t,x) = \varphi(p(0,t,x)) + \int\limits_0^t g(s, p(s,t,x), p(s,t,x) + (1+2b)s + \int\limits_0^s f(\nu)d\nu)ds,$$

где

$$b = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^s f(\nu)d\nu d\xi ds,$$

p(s,t,x)-решение следующего интегрального уравнения, для которого можно применять метод последовательных приближений:

$$p(s,t,x) = x - \int\limits_s^t\left[(1+2b)\nu + \int\limits_0^\nu f(\tau)d\tau\right]d\nu - \int\limits_s^t p(\nu,t,x)d\nu, \; (s,t,x) \in \tilde{Q}_2. \tag{12}$$

В частности, если система (10) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_2(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = \int\limits_0^1 u_1(t,s)ds + g(t,x,u_1(t,x)). \end{cases} \tag{13}$$

то решение интегрального уравнения (12) принимает вид:

$$p(s,t,x) = xe^{-(t-s)}.$$

Тогда получаем решение задачи (13)-(11) в виде:

$$u_1(t,x) = x,$$

$$u_2(t,x) = \frac{t}{2} + \varphi(xe^{-t}) + \int\limits_0^t g(s, xe^{-(t-s)}, xe^{-(t-s)})ds.$$

Построение решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковым сомножителем рассмотрено в разделе 3.5:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,s,\xi)\dfrac{\partial u_1(s,\xi)}{\partial \xi}\, d\xi\, ds + f(t) \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = g(t,x,u_1(t,x)), \quad (t,x)\in Q. \end{cases} \tag{14}$$

с (11).

Получено решение задачи (14), (11) в виде:

$$u_1(t,x) = x - [1+t]^{-1}\{xt + \int\limits_0^t \int\limits_0^{\eta} [\int\limits_0^{\rho} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds + g(\rho)]d\rho d\eta\} +$$

$$+\int\limits_0^t \left[\int\limits_0^{\rho} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds + g(\rho)\right]d\rho.$$

$$u_2(t,x) = \varphi(p(0,t,x)) + \int\limits_0^t g(s,p(s,t,x),u_1(s,p(s,t,x))ds,$$

где функция $p(s,t,x)$ − решение следующего интегрального уравнения:

$$p(s,t,x) = x - \int\limits_s^t u_1(\nu, p(\nu,t,x))d\nu.$$

В четвертой главе «РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ» применение развитого метода дополнительного аргумента проводится для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных со многими пространственными переменными.

В 4.1. рассмотрено развитие метода дополнительного аргумента для начальной задачи системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t,x_1,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k} =$$

$$= f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),\dots,u_n(t,x_1,..,x_n)), \tag{15}$$

$$i=1,2,..,n, \quad (t,x_1,..,x_n)\in Q_1^n(T),$$

$$u_i(0,x_1,..,x_n) = \varphi_i(x_1,..,x_n), \quad i=1,2,..,n, \quad (x_1,..,x_n)\in R^n. \tag{16}$$

Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1.1. Пусть функции $\varphi_i(x_1,...,x_n) \in \overline{C}^1(R^n)$, $a_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n), f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n) \in \overline{C}^{0,\underbrace{1,...,1}_{n\,раз},\underbrace{1,...,1}_{n\,раз}}(Q_1^n(T) \times R^n)$, i=1,2,..,n.

Тогда задача (15), (16) имеет единственное решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T_*))\right)^n$, где T_* ($0 \le T_* \le T$) определяется из исходных данных.

Использование развитую методику для следующей системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с условием (16) рассмотрено в 4.2:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k} =$$
$$= f_i(t,x_1,..,x_n,u_1,u_2,...,u_n) + F_i(t,x_1,...,x_n;u_1,u_2,...,u_n : s,\xi_1,...,\zeta_n), \tag{17}$$

$i = 1,2,..,n, \quad (t,x_1,..,x_n) \in Q_2^n(T).$

Доказана следующая теорема о существование и единственности.

ТЕОРЕМА 4.2.1. Пусть выпоняются все уловия теоремы 4.1.1 и

F1) операторы F_i– непрерывные по первым n+1 переменным и $F_i \in Lip(H_0^1\big|_{x_1}, H_0^2\big|_{x_2},...,H_0^n\big|_{x_n}),\ H_0^i > 0 - const,\ i = 1,2,...,n;$

F2) существует такие $H_i>0$, что для любого $T_* \le T$

$$\big\| F_i(t,x_1,...,x_n;u_1^1(s,\xi),...,u_n^1(s,\xi)) : s,\xi_1,...,\zeta_n) -$$
$$- F_i(t,x_1,...,x_n;u_1^2(s,\xi),...,u_n^2(s,\xi)) : s,\xi_1,...,\zeta_n)\big\|_{Q_1^n(T_*)} \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} H_i \,\| u_i^1(t,x_1,...,x_n) - u_i^2(t,x_1,...,x_n) \|_{Q_1^n(T_*)}.$$

Тогда задача (17), (16) имеет единственное решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T_*))\right)^n$, где T_* ($0 \le T_* \le T$) определяется из исходных данных.

В 4.3. рассмотрено решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с неодинаковыми сомножителями и с n+1 независимыми переменными.

Рассматривается система с начальным условием:

$$u_1(0,x) = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$
$$u_\kappa(0,x) = \varphi_\kappa(x),\ x \in R^n, \quad \kappa = 2,...,n. \tag{18}$$

$$
\begin{cases}
D[a_{11}(t,x,u_1,\ldots,u_n),\ldots,a_{1n}(t,x,u_1,\ldots,u_n)]u_1(t,x)=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}(t,x,u_1,\ldots,u_n)+f(t)\\
D[a_{21}(t,x,,u_1,u_2),a_{22},\ldots,a_{2n}]u_2(t,x)=F_1(t,x;,u_1,u_2)\\
\\
D[a_{31}(t,x,u_1,u_2,u_3),\ldots,a_{3n}(t,x,u_1,u_2,u_3)]u_3(t,x)=F_2(t,x;u_1,u_2,u_3)\\
-------------------------------------\\
D[a_{n1}(t,x,u_1,\ldots,u_n),\ldots,a_{nn}(t,x,u_1,\ldots,u_n)]u_n(t,x)=F_{n-1}(t,x;u_1,\ldots,u_n)
\end{cases}
\quad (19)
$$

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ (t,x)\in Q_1^n(T).$

Для решения данной задачи использован метод дополнительного аргумента.

Рассмотрен следующий пример.

ПРИМЕР 4.3.1.

$$
\begin{cases}
D[a_{11}(t,x,y,u_1,u_2),.a_{12}(t,x,y,u_1,u_2)]u_1(t,x,y)=\sum_{k=1}^{2}a_{1k}(t,x,y,u_1,u_2)+\int_0^1\int_0^1 u(t,\xi,\eta)d\xi d\eta\\
D[a_{21}(t,x,y,u_1,u_2),a_{22}(t,x,y,u_1,u_2)]u_2(t,x,y)=b(t,x,y,u_1,u_2),
\end{cases}
\quad (20)
$$

$(t,x,y)\in \widetilde{Q}_1^2(T)=[0,T]\times R_+^2.$

Систему (20) рассмотрим с начальными условиями:

$$
\begin{aligned}
&u_1(0,x,y)=x+y,\\
&u_2(0,x,y)=\varphi(x,y),\ (x,y)\in R_+^2.
\end{aligned}
\quad (21)
$$

Заданные функции достаточно гладкие: $\varphi(x,y))\in C^{(1)}(R_+^2),\ a_{ij}(t,x,y,u_1,u_2)\in \overline{C}^{(1)}\widetilde{Q}_1^2(T)\times R^2),$

$b(t,x,y,u_1,u_2)\in \overline{C}^{(1)}(\widetilde{Q}_1^2(T)\times R^2),\ i,j=1{,}2.$

С помощью метода дополнительного аргумента сводим первое уравнение системы к интегральному уравнению, для которого применяя метод последовательных приближений получаем:

$$u_1(t,x,y)=x+y+e^t-1.$$

Далее подставляя найденную функцию во второе уравнение системы, получаем задачу относительно неизвестной функции $u_2(t,x)$, которая с помощью метода дополнительного аргумента сводится к системе интегральных уравнений и для системы интегральных уравнений применяется принцип сжатых отображений.

В 4.3. рассмотрено решение системы нелинейных интегро-диффереиальных уравнений в частных производных с вырожденным ядром вида:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(t,x,y)}{\partial t}+u_1(t,x,y)\dfrac{\partial u_1(t,x,y)}{\partial x}+u_2(t,\mathrm{x},\mathrm{y})\dfrac{\partial u_1(t,x,y)}{\partial y}=u_1(t,x,y)+\\ +u_2(t,x,y)+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 H_1(t)K_1(s,\xi,\eta)u_1(s,\xi,\eta)d\xi d\eta ds,\\ \dfrac{\partial u_2(t,x,y)}{\partial t}+u_2(t,x,y)\dfrac{\partial u_2(t,x,y)}{\partial x}+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u_1(t,\xi,\eta)d\xi d\eta\dfrac{\partial u_2(t,x,y)}{\partial y}=\\ =\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 H_2(t)K_2(s,\xi,\eta)u_2(s,\xi,\eta)d\xi d\eta ds\end{cases} \qquad (22)$$

с условием

$$u_i(0,x,y)=x+y,\quad i=1,2,\quad (t,x,y)\in\tilde{Q}_1^2. \qquad (23)$$

В работе построено решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (22) с начальным условием (23) в виде:

$$u_1(t,x,y)=x+y+H_1(t)A/(1-B),$$

$$u_2(t,x,y)=\frac{xt}{1+t}+q_2(0,t,x,y)(1-t)+\frac{D}{1-E}\left[\int\limits_0^t H_2(\nu)d\nu-\frac{1}{1+t}\int\limits_0^t\int\limits_0^s H_2(\nu)d\nu ds\right],$$

где

$$A=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K_1(s,\xi,\eta)(\eta+\xi)d\xi d\eta ds,$$

$$B=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K_1(s,\xi,\eta)H_1(s)d\xi d\eta ds\neq 1,$$

$$D=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K_2(s,\xi,\eta)\left(\frac{\xi s}{1+s}+q_2(0,s,\xi,\eta)(1-s)\right)d\xi d\eta ds,$$

$$E=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K_2(s,\xi,\eta)\left[\int\limits_0^s H_2(\nu)d\nu-\frac{1}{1+s}\int\limits_0^s\int\limits_0^\tau H_2(\nu)d\nu d\tau\right]d\xi d\eta ds\neq -1,$$

$$q_2(s,t,x,y)=y-\int\limits_s^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1(\xi+\eta+f(s))d\xi d\eta ds.$$

В данной главе осуществлено применения развитого метода дополнительного аргумента для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных со многими пространственными переменными.

С помощью метода дополнительного аргумента построено решение одной системы интегро-дифференциальных уравнений с тремя независимымы переменными.

ВЫВОДЫ

В диссертации методом дополнительного аргумента получены достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций. Найдены достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с неодинаковыми сомножителями, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций.

Построены решения систем двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с неодинаковыми и одинаковым сомножителями.

Полученные результаты с использованием развитого метода дополнительного аргумента обобщены для многомерного случая.

Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами.

В диссертации получены новые результаты, которые вносят определенный вклад в теорию нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Построенные схемы применения метода дополнительного аргумента для решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных можно использовать при решении систем нелинейных уравнений других классов.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Аширбаевой Айжаркын Жоробековне за постановку проблемы исследования и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Садыкова, Г.К.** Развитие метода дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова // Международный научно-

исследовательский журнал. – Екатеринбург, 2019. – №4-1(82). – С. 6-10. https://elibrary.ru/item.asp?id=37282298

2. **Sadykova, G .** Development of the method of additional argument for a system of non-linear partial differential equations [Текст] /A. Ashirbaeva, G. Sadykova // Abstracts of International Scientific Conference “III Borubaev’s Readings” , Bishkek, May 24, 2019. / Ed. by Academician A. Borubaev. – P. 21.

3. **Садыкова, Г.К.** Развитие метода дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2019. – №12. – С. 35-39.
https://elibrary.ru/item.asp?id=43930772

4. **Садыкова, Г.К.** Исследование решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / Г.К. Садыкова // Известия ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2019. – №11. – С.15-19.
https://elibrary.ru/item.asp?id=45642100

5. **Sadykova, G**. Solution of a system of first-order nonlinear partial differential equations with n+1 independent variables [Текст] / A.Ashirbaeva, G.Sadykova//Theses of International Scientific Conference “Problems of modern mathematics and its applications”. June 16-19, 2021, Issyk-Kul, Bishkek, Kyrgyzstan /Ed. by Academician A. Borubaev. – P.89.

6. **Садыкова, Г.К.** Построение решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. [Текст] / Г.К. Садыкова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2021. – №7. – С.10-13.
https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47474895

7. **Садыкова, Г.К.** Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с n+1 независимыми переменными. [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова // Евразийское научное объединение. – Москва, 2021. – № 8–1(78). – С. 6–8. https://elibrary.ru/ item.asp?id=46571284

8. **Садыкова, Г.К.** Решение системы операторных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова // Евразийское научное объединение. – Москва, 2021. – № 11–1 (81). – С. 1–5. https://elibrary.ru/item.asp?id=47417315

9. **Садыкова, Г.К.** Үч көз карандысыз өзгөрүлмөлүү жекече туундулуу сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелердин системасын чыгаруу [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова // Вестник Ошского государственного университета. – Ош, 2022. – №1. – С. 103–111. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48614391

10. **Sadykova, G.** Solving of system partial operator equations of the first order by the method of additional argument. [Текст] / A. Ashirbaeva, G. Sadykova // Abstract book of the conference ICAAM 2022. October 31-November 6, 2022, Antalya, Turkey / Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics. – P. 102.

Садыкова Гульхан Курбанбекованын «Жекече туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн кошумча аргумент кийирүү усулу өнүктүрүү» деген темада 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер системасы, сызыктуу эмес теңдеме, интегро-дифференциалдык теңдеме, кошумча аргумент кийирүү усулу, Кошинин маселеси, кысуучу чагылтуулардын принциби.

Изилдөө объектиси: Эки жана көп өзгөрмөлүү, бир нече белгисиз функциялардан көз каранды болгон бирдей жана бирдей эмес көбөйтүүчүлөрү менен жекече туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдемелердин системасы.

Изилдөө предмети: Каралып жаткан системалар үчүн баштапкы маселенин чечиминин жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары, айрым учурлардагы алынган чыгарылыштар.

Иштин максаты: Кошумча аргумент кийирүү усулу менен жекече туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык жана оператордук теңдемелердин системасынын чечимин изилдөө.

Изилдөө методдору: Кошумча аргумент кийирүү усулу өнүктүрүлөт жана төмөнкүлөр колдонулат: кысуучу чагылтуулардын принциби, удаалаш жакындаштыруу усулу.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы: Эки жана көп өзгөрмөлүү, бир нече белгисиз функциялардан көз каранды болгон бирдей жана бирдей эмес көбөйтүүчүлөрү менен жекече туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдемелердин системасынын кеңири классы үчүн каралган баштапкы маселенин чечиминин жашашынын жана

жалгыздыгынын жетиштүү шарттары алынган. Кошумча аргумент кийирүү усулу боюнча айрым теңдемелер системасынын чыгарылышы тургузулган.

Алынган жыйынтыктардын теориялык жана практикалык маанилүүлүгү: Диссертациянын жыйынтыктары так далилдөөлөр менен бекемделген. Иште алынган жыйынтыктар боюнча конкреттүү маселелердин чыгарылыштары тургузулган. Иштелип чыккан жекече туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдемелер системаларын чыгаруу үчүн, кошумча аргумент кийирүү усулун колдонуу схемасын башка класстардагы сызыктуу эмес дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин системаларын чыгаруу үчүн да колдонууга болот.

РЕЗЮМЕ

диссертации Садыковой Гульхан Курбанбековны на тему: “Развитие метода дополнительного аргумента для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных” на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: Система дифференциальных уравнений в частных производных, нелинейное уравнение, интегро–дифференциальное уравнение, метод дополнительного аргумента, задача Коши, принцип сжимающих отображений.

Объект исследования: Система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производным с одинаковым и неодинаковыми сомножителями, с двумя и многими переменными, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций.

Предмет исследования: Достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для рассматриваемых систем, получение решение в конкретном случае

Цель исследования: Исследование решений систем нелинейных интегро-дифференциальных и операторных уравнений в частных производных с использованием метода дополнительного аргумента.

Методы исследования: Развивается метод дополнительного аргумента и используются: принцип сжимающих отражений, метод последовательных приближений.

Научная новизна исследования: Получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для систем широких классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производным с одинаковым и неодинаковыми сомножителями, с двумя и многими переменными, где сомножители зависят от нескольких неизвестных функций.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов: Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами. По полученным результатам работы построены решения конкретных задач. Разработанную схему применения метода дополнительного аргумента для решения систем нелинейных уравнений в частных производных можно использовать при решении систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений других классов.

SUMMARY

of dissertation «Development of the method of additional argument for a system of non-linear partial integro-differential equations» of Sadykova Gulkhan Kurbanbekova is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences by the specialty 01.01.02 –differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: system of partial differential equations, non-linear equation, integro-differential equation, method of additional argument, Cauchy problem, contracting mappings principle.

Object of research: A system of nonlinear integro-differential partial differential equations with same and unequal multipliers, with two and many variables, where the multipliers depend on several unknown functions.

Subject of research: Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the initial problem for the systems under consideration, obtaining a solution in a specific case

Purpose of the study: Investigation of solutions of systems of nonlinear integro-differential and operator partial differential equations using the additional argument method.

Research methods: The method of additional argument developed and the following are used: contracting mappings principle, the method of successive approximations.

Scientific novelty of the research: Sufficient conditions are obtained for the existence and uniqueness of the solution of the initial problem for systems of wide classes of nonlinear integro-differential partial differential equations with the same

and unequal multipliers, with two and many variables, where the multipliers depend on several unknown functions.

Theoretical and practical significance of the results obtained:

The results of the dissertation are confirmed by rigorous evidence. There are constructed solutions to specific tasks based on the results of the work. The developed scheme of application of the additional argument method for solving systems of nonlinear partial differential equations can be used in solving systems of nonlinear differential and integro-differential equations of other classes.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

R –множество вещественных чисел;

$R_+=[0,\infty)$, $R_{++}=(0,\infty)$;

R^n $(n\in N)$ – n-мерное вещественное евклидово пространство и его точки $x=(x_1, x_2, \ldots,x_n)$;

$||\cdot||$ - норма;

для непрерывных (и ограниченных, если область определения не ограничена) функций будем подразумевать максимум модуля функции;

$T\in R_{++}$, $m,n\in N$- некоторые фиксированные числа;

$$Q_m(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x)\,|\;0\le t_1\le t_2\le t_3\le\ldots\le t_m\le T,\,x\in R\};$$

$$Q_m^n(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x)\,|\,0\le t_1\le t_2\le t_3\le\ldots\le t_m\le T,\,x\in R^n\};$$

$$Q_m=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x)\,|\,0\le t_1\le t_2\le t_3\le\ldots\le t_m<\infty,\,x\in R\};$$

$$Q_m^n=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x)\,|\,0\le t_1\le t_2\le t_3\le\ldots\le t_m<\infty,\,x\in R^n\};$$

Если в вышеуказанных пространствах отмечено знак “~”, это означает, $x\epsilon R_+$;

Ω - подмножества евклидова пространства R^n;

$C(\Omega)$,$C^{(k)}(\Omega)$, $C^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\delta)}(\Omega)$ – пространства функций, определенных и непрерывных (соответственно вместе со всеми своими производными до порядка k; соответственно вместе со своими производными до порядка α_i по i-му аргументу $(i=1,\ldots,n)$) на Ω;

$\overline{C},\overline{C}^{(\ldots)}$ - пространства функций с дополнительным условием ограниченности (соответственно и для указанных производных);

$Lip(N|_u,M|_v,\ldots)$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной u с коэффициентом N, по переменной v с коэффициентом $M,\ldots$; для функции одной переменной индекс будем опускать;

Дифференциальные операторы:

$$D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x}, \;\; D_n[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n] = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \omega_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

Операторы, преобразующие функции в функции, будем записывать сначала в полном виде: функция каких переменных получается; (после знака ;): на какую функцию (или несколько функций) и каких переменных действует оператор; связанные переменные в этой функции (по аналогии с записью интегралов), через двоеточие. В дальнейшем, если запись повторяется без изменений, операторы будем записывать и в кратком виде. Например:

$$G(t; u(s,\xi) : s, \xi) = G(t; u) = \int_0^t \int_0^1 K(t,s,\xi) \frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi} d\xi ds + g(t), \quad (t,x) \in Q_1,$$

(оператор преобразует функцию двух переменных в функцию одной переменной, при этом используются значения функции-операнда в различных точках);

$$H(u(s,\xi_1,..\xi_n) : s, \xi_1,..\xi_n) = H(u) = \int_0^1 \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty u^2(s,\xi_1,..\xi_n) d\xi_1..d\xi_n ds$$ (если интеграл сходится);

Для единообразия зафиксируем значения букв:

u(t,x) – неизвестная функция;

v(τ,t,x) – неизвестная функция с одной добавленной переменной;

$$p(\tau, t, x; v(\rho, t, x) : \rho) = x - \int_\tau^t v(\rho, t, x) d\rho$$

- вспомогательный оператор.