**Институт математики Национальной Академии наук
Кыргызской Республики**

Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына

Диссертационный совет Д 01.22.647

На правах рукописи
УДК 517.9

Алыбаев Анарбек Масалбекович

Регуляризация обратных задач, где вырождаются некорректные интегральные уравнения Вольтерра первого рода

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Бишкек - 2023

Работа выполнена на кафедре алгебры, геометрии, топологии и преподавания высшей математики имени академика А. А. Борубаева Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына

Научный консультант: Омуров Таалайбек Дардайылович, доктор, физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа факультета математики и информатики Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына

Официальные оппоненты: Искандаров Самандар, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики Национальной Академии Наук Кыргызской Республики.

Анар Турмаганбет кызы Асанова, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования. город Алматы, Республика Казахстан.

Алымбаев Асангул Темиркулович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики института новых информационных технологий Кыргызского государственного университета имени И. Арабаева

Ведущая организация: Кафедра высшей математики механико-математического факультета Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилёва, Казахстан, город Астана, улица Мунайтпасова, 5.

Защита диссертации состоится 06 декабря 2023 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.22.647 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете имени Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374.

Идентификатор защиты – https://vc1.vak.kg/b/012-ltf-b7j-lgy

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики (720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а), Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына, (720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547) и на сайте www.vak.kg.

Автореферат разослан 05 ноября 2023 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико- математических наук, доцент Шаршембиева Ф. К

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. В общей теории математической физики (МФ) возникаются определенные классы обратных задач (ОЗ), где вырождаются некорректные интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма первого, третьего родов (ИУВ-1,ИУВ-3, ИУФ-1, ИУФ-3) с решениями в классе обобщенных функций (ОФ). Так как в общем смысле теория этих уравнений еще не разработана, то исследования, связанные в этой области, а тем более в области ОЗ с указанными ИУ актуальны.

Отметим, что основоположниками теории некорректных задач являются А.Н. Тихонов(1963), М.М. Лаврентьев (1962) и В.К. Иванов (1963), причем разработанные способы исследований указанных задач этими авторами были применены и развиты другими учеными к различным областям науки. Так как, в общем виде большинство задач МФ могут быть эквивалентным образом преобразованы к операторным уравнениям (ОУ), например:

$$Au = f,\ u \in X,\ \ f \in F,$$

где оператор A считается определенным на непустом множестве некоторого метрического пространства X с метрикой ρ_X (в общем случае указанный оператор может быть нелинейным), то для решения этого ОУ были использованы способы, связанные с аналитическими методами регуляризации (МР), численно-регуляризационными алгоритмами и др.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Исследование по теме диссертации проводилось в рамках утверждённой тематики «Операторные уравнения, равномерная топология, компьютерные моделирования и их приложения», факультета математики и информатики. Тематика утверждена протоколом №6 НТС КНУ имени Ж. Баласагына от 30 мая 2018 года.

Цель и задачи исследования. Целью исследования являются изучения вопросов регуляризируемости и единственности решения ОЗ в ограниченных и неограниченных областях, вырождающиеся в некорректные нелинейные ИУВ-1 с различными пределами интегрирования, где решения связаны с функцией Дирака (ФД).

К задачам исследования относятся коэффициентные ОЗ с операторами гиперболического типа в ограниченной области и с нагруженными операторами параболического характера и типа Кортевега-Де Фриза (КДФ) в неограниченной области, где вырождаются некорректные нелинейные ИУВ-1, например:

$$A\varphi \equiv \int_0^x K(x,s)\varphi^n(s)ds = f(x), (n = 2;3),$$

причем некорректность понимается на основе не согласованности интегрального оператора Вольтерра со свободной функцией $f(x)$ в начале отрезка[0,T],т.е.: $f(0) \neq 0$, а это значит, что решение ИУ не принадлежит к классу непрерывных функций. Здесь относительно известных функций имеют место условия: $C(D) \ni K(x,s), (K(s,s) \geq 0, D = \{(x,s): 0 \leq s \leq x \leq T \}), C^1[0,T] \ni f,$ при этом допускается, что $\varphi(x)$ - неотрицательная особая функция, связанная с ФД.

Основными методами исследования являются: метод интегральных преобразований (МИП), метод регуляризации (МР) в обобщенном смысле, элементы функционального и математического анализа.

Научная новизна исследования. Получены следующие результаты:
- разработан МР для некорректных нелинейных ИУВ-1 с различными пределами интегрирования в специальном пространстве в обобщенном смысле;
- на основе модификации разработанного МР доказаны регуляризируемости некорректных нелинейных систем ИУВ-1 в введенных пространствах;
- с учетом разработанного варианта МР решены ОЗ гиперболического типа, где вырождаются некорректные ИУВ-1 с различными пределами интегрирования;
- разработанные алгоритмы регуляризации использованы для решения нагруженных ОЗ параболического характера и типа Кортевега Де Фриза в неограниченной области, где вырождаются некорректные ИУВ-1.

Теоретическая и практическая ценность. Работа в основном носит теоретический характер, а ее результаты дополняют исследования по теории регуляризации ОЗ в обобщенном смысле в ограниченных и неограниченных областях. Результаты работы могут быть применены к задачам геофизики, влагопереноса, к задачам моделирования динамических развивающихся систем и др.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:
- выбор пространств и разработка регуляризирующих алгоритмов решения для исследуемых систем нелинейных некорректных ИУВ-1;
-на основе разработанного МР доказать регуляризируемости ОЗ для уравнений гиперболического типа, где вырождаются некорректные ИУВ-1 с различными пределами интегрирования;
- с учетом модификации разработанного МР доказать регуляризируемости в обобщенном смысле ОЗ, вырождающихся в некорректные многомерные ИУВ-1;
- на основе разработанных МР доказать регуляризируемости ОЗ с нагруженными дифференциальными операторами параболического характера и Кортевега Де Фриза в неограниченной области, где вырождаются ИУВ-1.

Личный вклад соискателя. Все научные результаты, изложенные в диссертации относительно изучаемых ИУВ-1 и ОЗ, и положения выносимых на защиту, получены диссертантом. В совместных работах [2,3,6-10,12-15] постановка задач принадлежит научному консультанту, обсуждение выводов и заключения внутри работ принадлежат другим соавторам, диссертанту - все научные выводы работ и их доказательства.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных конференциях (НК) различного ранга, и на семинарах, например:

- VI Congress of the Turkic World Mathematical Society, Astana-Kazakhstan, October 2-5, 2017;
- II международный НК «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике»-МНК, Бишкек, 2021г.;
- VII International TWMS Congress - 2023, September 20-23, Turkestan (Kazakhstan);
- на расширенном семинаре кафедры «Алгебры, геометрии, топологии и преподавания высшей математики» факультета «МиИ» КНУ им. Ж. Баласагына в 2023 г. (руководитель - д.ф-м.н., проф. Канетов Б.К.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях.

Опубликовано 16 работ в различных журналах КР, РК, РФ, Украины и Индии. Из них 1 монография [6], 12 научных статей [1-5, 7-13], 3 тезиса [14-16], в том числе 9 статей в зарубежных изданиях [2-5, 9,10-13]. Из указанных работ 5 написаны единолично [1,4,5,11,16], а 11-совместные работы [2,3,6-10,12-15]. Статьи [1,7] входят в базу данных РИНЦ КР, а статьи [2-5,9,10] в базу данных РИНЦ РФ, а [11-13] в базу данных WOS.

Структура и объем диссертации. Настоящая работа состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы из 71 наименований. Объем текста 203 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Работа состоит из 4 глав. В главе 1 приведены результаты работ по прямым и ОЗ математической физики, которые присоединяются к задачам диссертационной работы, а также указаны проблемы, которые не изучены.

А) Известно, что в основном ОЗ некорректны от неустойчивости решения трансформированных систем, где вырождаются некорректные уравнения. Указанные системы имеют различные формы: алгебраические, дифференциальные, интегральные и т.д. Например, системы ИУ-1 встречаются в работах А.С. Апарцина (1999), А. Асанова (1998), И.М. Иманалиева (1981), М.М. Лаврентьева (1977), Н.А. Магницкого (1979), В.А. Морозова (1987), Ш.А. Наубетовой (1988), Т.Д. Омурова (2003), А. Саадабаева (2013), В.О. Сергеева (1971), Я. Янно (1987) и др., где регуляризируемость этих уравнений доказаны в определенных пространствах сильной или слабой сходимостью.

Как известно, трудности, возникающие при изучении некоторых классов некорректных ИУВ-1, заключаются в том, когда исследуемые ИУ преобразуются к операторным уравнениям, например для наглядности приводим краткий обзор по работе А.Н. Тихонова (1974, соавтор: В.Я. Арсенин), т.е.:

$$Au = f\ , \tag{1.1.1}$$

где $u \in X,\ f \in F;\ X,F -$ метрические пространства, то, что обратный оператор A^{-1}, заданный на всей своей области определения $AX \subset F$, не является непрерывным. Значит, в некорректных уравнениях элемент: $u_\delta = A^{-1} f_\delta$, даже если он существует, не является приближенным решением, так как u_δ при малых δ может как угодно уклоняться от точного решения u.

Отметим, что аналогичные дефекты были указаны и в других работах ученых в этой области. Например, в работе акад. М.И. Иманалиева (1981) при исследовании некорректных нелинейных ИУВ-1 с решением в классе сингулярных обобщенных функций (СОФ), отмечено, что нельзя естественно определить никакую нелинейную функцию в пространстве СОФ. Это значит, что метод, учитывающий δ – функцию не применяется в прямом смысле для некорректных нелинейных ИУВ-1.

Для наглядности сказанного, приводится ИУВ-1:

$$\int_0^t K(t,s,y(s))ds = f(t) \tag{1.1.2}$$

с условиями: а) $C^{1,0,1}(D) \ni K(t,s,y); K_y(t,t,y) \geq \lambda > 0, (D = [0,T]\times[0,T]\times R)$,

б) $C^1[0,T] \ni f(t); f(0) \neq 0,$ где решение параметризированного ИУ:

$$\int_0^t K(t,s,y_\varepsilon(s))ds = f\left(t\right) - e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} f(0), \tag{1.1.3}$$

может слабо сходится (точнее в смысле $L^1(0,T)$) к решению вырожденного интегрального уравнения (ВырИУ), где свободный член согласуется с интегральным членом в начале отрезка. Но полученное решение ВырИУ, нельзя рассматривать как решение ИУ (1.1.2), что и требовалось показать.

Если в ИУВ (1.1.2) с условием (б) ядро обращается тождественно в нуль на диоганале, то алгоритм (1.1.3) не применим. Поэтому, в работе Т.Д. Омурова (2003), с учетом указанных условий для построения решения, было разработано пространство $Z^2(0,T)$, содержащее все элементы $L^2[0,T]$, а также СОФ: $z(t)$, сосредоточенные в начале отрезка. При этом, предлагаемый МР учитывает особую функцию:

$$\Omega_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} f(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \begin{cases} 0, t \neq 0, \\ \infty, t = 0, \end{cases} \tag{1.1.6}$$

которая ограничена в пространстве $Z^2(0,T)$, когда

$$(\varphi(t))^{-\beta} \in L^1(0,T), (2 < \beta; \varphi(t) = \int_0^t h(s)ds, 0 < h(t) \in L^1(0,T))\ . \tag{1.1.7}$$

Здесь $L^2[0,T]$ - пространство Гильберта квадратично интегрируемых функций $u(t)$, определенные на $[0,T]$ с нормой: $\| u(t) \|_{L^2} = (\int_0^T | u(t) |^2\, dt)^{\frac{1}{2}}$. И в этом случае, показаны аналогичные факты, которые указаны в случае (1.1.2) и (1.1.3) с условиями (а,б). Эти факты указаны не только в смысле $L^1(0,T)$, а были обобщены и в $Z^2(0,T)$.

В области ИУВ-1, отметим и работу А. Асанова (1998), но в отличие от вышеуказанных работ, здесь регуляризируемость доказана в пространствах сильной и слабой сходимостью с установлением близости решений параметризированного и исходного ИУ (1.1.2), когда искомая функция определяется в начале отрезка. Регуляризируемость ИУВ-1 в обобщенном смысле с условием (б) в указанной работе не рассматривается.

Отметим, что в работе А.С. Апарцина (1999) были исследованы ИУ с неклассическими пределами интегрирования (НПИ), например для ИУ-1:

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), x\in[x_0,T], \varphi(x)=\varphi^0(x), x\in[a(x_0),b(x_0)] \qquad (1.1.11)$$

были рассмотрены вопросы корректности и построения саморегуляризирующих методов кубатур (СМК) с учетом возмущения исходных данных, и др.

Известно, что если в указанных ИУ (1.1.11) нет согласования с функцией $f(x)$, то (1.1.11) является некорректным ИУВ-1. Кроме того, проблемные вопросы в области ИУВ-1 типа (1.1.11) возникаются и в случае, когда ядро:

$$K(x,s)\in C\ (D)\cap Lip(x|L_K), 0\le K(x,x)\in C[0,T], \qquad (1.1.12)$$

а свободная функция допускает условие (б). Знаем, что даже классические ИУВ-1 с условием (1.1.12), почти не изучены.

Б) Как выше отметили, что есть множества прикладных ОЗ, где вырождаются ИУ-1, например работы Ю.Е. Аниконова (1978), А.Л. Бухгейма 1983), П.Р. Вабищевича (1981), А.М. Денисова (1980), В.И. Дмитриева (1987), С.И. Кабанихина (2009), М.М. Лаврентьева (1969, соавторы: В.Г. Васильев, В.Г. Романов), Т. Тобиоса (1984) и др. Но, в нашем случае приводим краткий обзор по ОЗ, где вырождаются ИУВ-1 с решениями в классе СОФ, так как при применении МР к этим задачам, имеют место те дефекты, которые вышеуказаны (см. п. А). Например, в работах Т.Д. Омурова и Т.Т. Каракеев (2006) при изучении ОЗ вырождаются некорректные ИУВ-1 (и ИУВ-3) со специальными ядрами и решениями в классе СОФ. Регуляризируемость рассматривается в $Z^p(0,T)$ с особой функцией $\Omega_\varepsilon(t)$ вида (1.1.6) с условием:

$$(\varphi(t))^{-\beta}\in L^1(0,T), p<\beta, \qquad (1.1.15)$$

при этом $Z^p(0,T)$ - пространство, содержащее все $L^p[0,T]$, а также СОФ, сосредоточенные в начале отрезка $[0,T]$ и т.д.

Известно, что в работе В.И. Дмитриева (1987), в электромагнитных методах геофизики исследуется ОЗ магнитотеллурического зондирования (МТЗ):

$$\begin{cases} u''(z)+iw\mu_0\sigma(z)u(z)=0, \quad z\in(0,H), \\ u(z=0)=1, \quad u'(z=H)-i\sqrt{iw\mu_0\sigma_H}\,u(z=H)=0, \end{cases} \qquad (1)$$

$$Y(w)=\frac{H_y(z=0)}{E_x(z=0)}=\frac{1}{E_x(z=0)}\left(-\frac{i}{w\mu_0}\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)_{z=0}, \qquad (2)$$

где $Y(\omega)(2)$ - это адмитанса (проводимость) электромагнитного поля, при этом вектор функция: $P=(u,\sigma)$ является неизвестным (первая функция относительное электрическое поле (ЭП) в Земле, а вторая функция распределение электропроводности), причем, в основном исследуемая ОЗ неустойчива.

Действительно, сказанное вытекает из того, что по известному адмитансу однозначно и устойчиво определяется интегральная проводимость (ИП):

$$S(z)=\int_0^z \sigma(s)ds, z\in[0,H], \tag{1.1.16}$$

и при условии: $\|Y_1(w)-Y_2(w)\|_{L^2}\to 0$, следует: $\|S_1(z)-S_2(z)\|_C\to 0$. Причем, соответствующие $\sigma_1(z),\sigma_2(z)$ определяются из ИУВ-1 (1.1.16), решение которого неустойчиво, а это означает, что близким $S_1(z),S_2(z)$ могут соответствовать как угодно сильно отличающиеся $\sigma_1(z)$ и $\sigma_2(z)$ (см. выводы (1.1.1)).

При изучении этой ОЗ, интересны те выводы, где сказано, что если найдется некоторое распределение: $\hat{\sigma}(z)\in\sum_\delta$, причем $\hat{\sigma}(z)$ может сильно отличаться от истинного распределения электропроводности, при этом, если вычислим ИП:

$$\tilde{S}(z)=\int_0^z \hat{\sigma}(s)ds, \tag{1.1.18}$$

а так как $S(z)$ определяется по правилу (1.1.16) устойчиво, то

$$\left\|\tilde{S}(z)-\int_0^z \sigma(s)ds\right\|_{L^2}\le\varepsilon(\delta),\delta\in\sum_\delta. \tag{1.1.19}$$

Определение $\hat{\sigma}(z)\in\sum_\delta$ не требует применения устойчивого метода, так как является промежуточным результатом для получения приближенной $\tilde{S}(z)$, хотя в указанном пространстве не можем указать близости $\hat{\sigma}(z),\sigma(z)$ при выполнении неравенство (1.1.19).

В результате приближенное распределение электропроводности вычисляется из задачи минимизации по стандартной схеме Тихонова:

$$\tilde{\sigma}=\left\{\sigma_\alpha:\inf_\sigma\left[\left\|\ \tilde{S}(z)-\int_0^z \sigma(s)ds\ \right\|_{L^2}^2+\alpha\left\|q(z)(\sigma(z)-\sigma^0(z))\right\|_{L^2}^2\ \right]\right\}$$

с выбором параметра регуляризации α, в соответствии с принципом невязки, $\sigma^0(z)-$гипотетическое распределение электропроводности, построенное по априорным данным, $q(z)>0$ учитывает достоверность априорной информации на различных глубинах $(0<q(z)<1)$.

В нашем случае, так как в рассматриваемых ОЗ вырождаются некорректные ИУВ-1 с решениями, которые связаны с функцией Дирака, в чем и сильно отличается от указанной задачи. Поэтому регуляризируемость этих ИУВ в $Z^2(0,T)$ понимается в обобщенном смысле с условием (1.1.19), только вместо L^2 будет $Z^2(0,T)$ (или $Z^3(0,T),(p=3)$), здесь не учитываются условия (1.1.7) и (1.1.15) соответственно, и т.д.

В) Как отмечено выше, что решения исследуемых ИУВ-1 и ОЗ, связаны с СОФ, то введем краткий обзор по ОФ. Известно, в соответствии с определением (см. работы В.С. Владимирова (1976) и А.Р. Колмогорова (1976, соавтор: С.В. Фомин), что в общем, ОФ называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций. Но СОФ нельзя отождествить ни с какой локально интегрируемой функцией, так как ОФ, определяемые локально интегрируемыми в R функциями по правилу:

$$< f,\varphi >= \int f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in D \tag{1.2.6}$$

называются регулярными ОФ, где имеет место линейность этого функционала и непрерывность на D - пространство основных функций.

Известно, что классическим примером СОФ является $\delta-$функция Дирака (ФД), т.е.:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, x=0, \\ 0, x \neq 0, \end{cases}$$

причем, определяемая как функционал, действующий на функции $\varphi(x)\in D,$ по правилу:

$$<\delta,\varphi>=\varphi(0), \tag{1.2.8}$$

$\delta \in D'_0$ $-$пространство СОФ, так как здесь не содержится регулярные ОФ, при этом линейность и непрерывность функционала (1.2.8) очевидны.

Поэтому D'_0 отличается от общего пространства ОФ, символически которое обозначается в виде D'- это линейное пространство всех ОФ (регулярных и сингулярных), где сходимость в D' рассматривается как слабая сходимость последовательности функционалов, т.е. последовательность ОФ $\{f_n\}_1^\infty$ из D' сходится к ОФ $f \in D',$ если для любой $\varphi \in D$:

$$< f_n,\varphi > \xrightarrow[n\to\infty]{} < f,\varphi >. \tag{1.2.9}$$

В этом случае можем писать и символической форме:

$f_n \xrightarrow{D'} f$ при $n \to \infty,$ (называется слабой сходимостью).

Замечание 1.2.2. Иногда, вместо последовательности $f_n \in D'$ рассматривается семейство функционалов $\{f_\varepsilon\}$, $\varepsilon-$малый параметр. В этом случае формула $f_\varepsilon \xrightarrow{D'} f$ при $\varepsilon \to +0$, означает:

$$\lim_{\varepsilon\to+0} < f_\varepsilon,\varphi > \xrightarrow[n\to\infty]{} < f,\varphi > \text{ для } \forall\varphi \in D. \tag{1.2.10}$$

В частности, запись: $f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} \delta$ при $\varepsilon \to +0$, означает:

$$\lim_{\varepsilon\to+0} < f_\varepsilon,\varphi > \xrightarrow[n\to\infty]{} <\delta,\varphi>=\varphi(0) \text{ для } \forall\varphi \in D. \tag{1.2.11}$$

Г) Как сказано выше, что решения изучаемых ИУВ-1 и ОЗ, где вырождаются эти ИУ связаны СОФ, то относительно указанных ИУ введены специальные пространства, например: $Z^p(0,T)$(см. п. А и Б). Поэтому, в параграфе 1.2 (гл.1) приведены некоторые понятия в краткой форме по пространствам, которые связаны с данной работой.

Отметим, что понятия топологических пространств и их свойств хорошо даны в работах А.А. Борубаева (1990), В.С. Владимирова (1976), А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина (1976), В.А. Треногина (1980), Х.Л. Массера (1970, соавтор: Х.Х. Шеффер) и др., которые отмечены вышеуказанном параграфе указаны в параграфе 1.2.

Глава 2 носит вступительный характер, так как чтобы изучать ОЗ работы, где вырождаются некорректные ИУВ-1, сперва, необходимо разработать МР для доказательства регуляризируемости указанных ИУ в введенных пространствах.

Поэтому, в главе 2 и исследуются некорректные нелинейные ИУВ-1 с действительными (неотрицательными) решениями, которые связаны с ФД с определенными ядрами, например в параграфе 2.1 рассматривается ИУВ:

$$H\theta \equiv \int_0^x K(x,\tau)\theta^2(\tau)d\tau = F(x), \tag{2.1.1}$$

где известные функции допускают условия:

$$\begin{cases} K(x,\tau) \in C(D_0) \cap Lip(x|L_K); K(.) \ge 0; K(0,0) \ne 0, |K(.)| \le C_{01}, \\ D_0 = \{(x,\tau) : 0 \le \tau \le x \le X\}; C[0,X] \ni F(x) \cap Lip(x|L_F), \\ |F(x)| \le C_{02}; F(x) \ge \alpha > 0, \forall x \in [0,X], (0 < L_K, L_F = const). \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Тогда регуляризируемость и единственность решения этого ИУ доказывается в $Z^2(0,X)$ (без учета (1.1.7)).

Замечание. Если функция: $K(x,\tau) \equiv 1, F(x) \equiv 1,$ то $\theta = (\delta(x))^{\frac{1}{2}}$, т.е., в работе словосочетание связанность с ФД понимается в этом смысле.

§2.1.1. Регуляризирующие алгоритмы в ИУВ-1. Чтобы доказать регуляризируемость (2.1.1) при условиях (2.1.2), сперва проводим некоторые математические преобразования на основе заданных функций, а точнее доказывается лемма:

Лемма 2.1.1. При условии (2.1.2) относительно заданных данных существуют функции: $h(x), h_0(x), \phi_0(x), F_0(x)$, которые определяются в следующем виде с условиями:

$$\begin{cases} h(x) \equiv [\gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(x)]F(x) \ge m > 0, (1 < \gamma = const) \\ h_0(x) \equiv \gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(x); 0 \le \lambda(x) \in L^1(0, X),, \\ \phi_0(x) = \int\limits_0^x [\gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(\tau)]F(\tau)d\tau = \int\limits_0^x h(\tau)d\tau, \\ F_0(x) \equiv F(x) - F(0), F_0(0) = 0, \\ h_0(x) \le \alpha^{-1}h(x); 0 < \max C_{0j} = C_0, (j = 1, 2), \\ |F_0(x) - F_0(\tau)| \le L_{F_0}M_0(\phi_0(x) - \phi_0(\tau)), (\tau \le x; \gamma > 1; M_0 = (\gamma\alpha)^{-1}), \\ x \in [0, X]: \quad x = (x^{\frac{2}{7}})^{\frac{7}{2}} \le (\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}, (\lambda(x) = \frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}), \\ x \le M_1(\phi_0(x))^2, (M_1 = \sup\limits_{[0,X]}(\phi_0(x))^{\frac{3}{2}}). \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Далее, в рамках условий (2.1.2),(2.1.3) и оператора Вольтерра, т.е.:

$$< h, \theta >_{[0,x]} = \int\limits_0^x h(\tau)\theta(\tau)d\tau \tag{*}$$

ИУВ-1 (2.1.1) эквивалентно преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \int\limits_0^x h(\tau)\theta(\tau)d\tau = (Q\theta)(x) + F(x), \\ Q\theta \equiv \int\limits_0^x h_0(\tau)\theta(\tau)(H\theta)(\tau)d\tau - (H\theta)(x). \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Далее, рассмотрим уравнение с малым параметром ε, т.е.:

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(x) + (\Phi\theta_\varepsilon)(x) = F_\varepsilon(x), \\ (\Phi\theta_\varepsilon)(x) \equiv \int\limits_0^x h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau)d\tau - (Q\theta_\varepsilon)(x), \end{cases} \tag{2.1.5}$$

с условием

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon}F(0), \\ C[0, X] \ni F_\varepsilon(x): \|F_\varepsilon(x) - F(x)\|_C \le \Delta_0(\varepsilon), (F_\varepsilon(0) = F(0)). \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Решение этого ИУ ищем по правилу:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(x) + \upsilon(x) + \xi_\varepsilon(x), \\ \Pi_\varepsilon(0) = F(0), \upsilon(0) = 0, \xi_\varepsilon(0) = 0, \end{cases} \tag{2.1.7}$$

причем, относительно неизвестных функций имеют место:

$$\Pi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x h(\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau + F(0), \tag{2.1.8}$$

$$\int_0^x h(\tau)\upsilon(\tau)d\tau=(Q\upsilon)(x)+F_0(x), \qquad (2.1.9)$$

$$\varepsilon\xi_\varepsilon+\int_0^x h(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau=(Q[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon+\upsilon+\xi_\varepsilon])(x)-(Q\upsilon)(x)+F_\varepsilon(x)-F(x)-\varepsilon\upsilon(x), \qquad (2.1.10)$$

где:

а) $\Pi_\varepsilon(x)$ - является решением (2.1.8), которое доопределяет особую функцию $\Omega_\varepsilon(x)$, которое содержится в (2.1.7), т.е.:

$$\begin{cases}\Omega_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(x),\\ |\Omega_\varepsilon(x)|\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\begin{cases}0, x\neq 0,\\ \infty, x=0;\end{cases}\end{cases} \qquad (2.1.11)$$

б) $\upsilon(x)$ - решение видоизмененного вырожденного уравнения (2.1.9);

в) в данном разложении $\xi_\varepsilon(x)$ играет роль остаточного члена.

В самом деле, в случае (а) из (2.1.8) следует:

$$\begin{cases}\Pi_\varepsilon(x)=F(0)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)),\\ |\Pi_\varepsilon(x)|\leq C_{02}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))\leq C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)),\end{cases} \qquad (2.1.12)$$

так как для ядра $(-\varepsilon^{-1}h(\tau))$ существует резольвента:

$$R(x,\tau,\varepsilon)\equiv-\frac{1}{\varepsilon}h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x h(s)ds),(\tau\leq x)\,. \qquad (**)$$

Следовательно, действительно ИУ(2.1.8) преобразуется к (2.1.12), где допускается оценка, которое указано там же, поэтому и получим (2.1.11).

Значит, на основе (2.1.12) сформулируем лемму вида:

Лемма 2.1.2. В условиях леммы 2.1.1 из (2.1.11) и (2.1.12) следуют оценки:

$$\begin{cases}\|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(0,X)}\leq\gamma_1\varepsilon^{\frac{7}{4}},(\gamma_1=C_0 2^{-\frac{7}{2}}[7^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}),\\ \|\Omega_\varepsilon(x)\|_{Z^2(0,X)}\leq\gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}.\end{cases}$$

Доказательство. Действительно, из оценки (2.1.12) получим

$$\begin{cases}\int_0^x |\Pi_\varepsilon(\tau)|^2 d\tau \le C_0^2\int_0^x \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d\tau = C_0^2[\tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))\Big|_0^x + \\ +\int_0^x \tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))] = C_0^2[x\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)) + \int_0^x 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))^{\frac{7}{2}}\times \\ |\times\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))] \le C_0^2 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}[(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)) + \int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{\frac{7}{2}}d\rho] \le \\ \le C_0^2 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}[(2^{-1}7)^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + 2^{-4}105\sqrt{\pi}] = C_0^2 2^{-7}\varepsilon^{\frac{7}{2}}[7^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + 2^{-4}105\sqrt{\pi}], \\ \rho \equiv \varepsilon^{-1}\phi_0(x); \chi(\rho) \equiv \rho^k\exp(-\rho); \sup_{\rho\ge 0}\chi(\rho) = k^k\exp(-k), (k = 1, 2, 2^{-1}7), \\ \rho = 0 : \chi(0) = 0; \rho\to\infty : \chi\to 0,\end{cases}$$

или в смысле нормы $Z^2(0,X)$, следует:

$$\|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(0,X)} \le C_0 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{4}}[7^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}} = \gamma_1\varepsilon^{\frac{7}{4}}.$$

Поэтому

$$\|\Omega_\varepsilon(x)\|_{Z^2(0,X)} = \frac{1}{\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(0,X)} \le \frac{1}{\varepsilon}\gamma_1\varepsilon^{\frac{7}{4}} = \gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}. \quad \text{ЧиТД.}$$

А в случаях (б,в), следует лемма вида:

Лемма 2.1.3. В рамках допустимых условий:

1) функция $\upsilon(x)$ считается решением ИУ (2.1.9) и является пределом параметризированного ИУ:

$$\delta\upsilon_\delta(x) + \int_0^x h(\tau)\upsilon_\delta(\tau)d\tau = (Q\upsilon_\delta)(x) + F_0(x), \tag{2.1.13}$$

которое определяется однозначно в $C[0,X]$;

2) функция ξ_ε однозначно определено в $C[0,X]$ при этом равномерно сходится к нулю для любого $x\in[0,X]$, когда $\varepsilon\to 0$.

Выводы:

А) Если выполняются условия лемм 2.1.2; 2.1.3, то решение ИУ (2.1.5) единственным образом представимо в виде (2.1.7), при этом $\forall x\in(0,X]$решение уравнения (2.1.5) сходится (неравномерная сходимость) при *ε→0* к решению уравнения (2.1.9) с оценкой:

$$\begin{cases}|\theta_\varepsilon - \upsilon| \le \Delta_2(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}|\Pi_\varepsilon(x)| \le \Delta_2(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \\ |\Pi_\varepsilon(x)| \le C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \\ |\Omega_\varepsilon(x)| \le \frac{1}{\varepsilon}C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)).\end{cases} \tag{2.1.24}$$

Б) Причем, на основе (2.1.7),(2.1.11) следует:

$$x = 0 : \theta_\varepsilon(0) = \varepsilon^{-1}F(0).$$

§2.1.2. Регуляризация ИУВ-1 в $Z^2(0,X)$**.** В этом пункте доказывается:

Теорема 2.1.1. Пусть выполняются условия лемм 2.1.1-2.1.3 и имеет место (2.1.24). Тогда следуют:

1) $$\begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(0,X)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}}, (\gamma_1 = C_0 2^{-\frac{7}{2}}[7^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \|\Omega\|_{Z^2(0,X)} = \frac{1}{\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(0,X)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{cases} \qquad (2.1.25)$$

2) $$\|\theta_\varepsilon - \upsilon\|_{Z^2(0,X)} \le 2[\Delta_2(\varepsilon)\sqrt{X} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon), \qquad (2.1.26)$$

$$\|\theta_\varepsilon\|_{Z^2(0,X)} \le r_* = const, \qquad (2.1.27)$$

3) $$\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x) - F(x)\|_{Z^2(0,X)} \le \tilde{M}(\varepsilon), \left(\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\right). \qquad (2.1.28)$$

Из полученных результатов пунктов 2.1.1;2.1.2, в итоге имеем:

Утверждение 2.1.2. В условиях теоремы 2.1.1 ИУВ-1 (2.1.1) регуляризируется по правилу (2.1.5) в $Z^2(0,X)$ в обобщенном смысле.

В параграфе 2.2 исследуется нелинейная некорректная система ИУВ-1 в векторно-матричной форме:

$$H\theta \equiv \int_0^x \int_0^y K(x,y,\tau,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau = F(x,y) \qquad (2.2.1)$$

с условием

$$\begin{cases} K(x,y,\tau,\nu) \in C_{n\times n}(D_0) \cap Lip(x|L_K); K(.) \ge 0; \|K(.)\| \le C_{01}, \\ K(0,y,0,y) \ne 0, \forall y \in [0,b], (D_0 = [0,X]\times[0,b]\times\{0 \le \tau \le x \le X, 0 \le \nu \le y \le b\}), \\ (x,y) \in \bar{D}_1, (D_1 = (0,X)\times(0,b)); F(x,y) \in C_n^{0,1}(\bar{D}_1) \cap Lip(x|L_F); F(0,y) \ne 0, \\ F(x,0) = 0; F(x,y) > 0, \forall x \in [0,X], y \in (0,b]; \ \|F(x,y)\| \le C_{02}, \forall (x,y) \in \bar{D}_1, \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

F, K - известные данные, т.е. n -мерная векторная функция (столбец), $n\times n$ - матричная функция, соответственно. При этом $\theta-$ неизвестная неотрицательная n- мерная векторная функция из пространства $Z_n^2(D_1)$, т.е. всех n-мерных вектор-функций с компонентами из $Z^2(D_1)$, содержащее все элементы $L^2(\bar{D}_1)$, а также неотрицательных элементов $z(x,y)$, связанные с ФД по аргументу x.

Чтобы исследовать регуляризируемости системы (2.2.1) в обобщенном смысле в $Z_n^2(D_1)$, сперва, на основе ИУ (2.2.1) имеем:

$$(H\theta)(x,b) \equiv \int_0^x \int_0^b K(x,\tau,b,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau = F(x,b). \qquad (2.2.3)$$

Далее, предполагая, что относительно известных функций выполняются условия (2.2.2),(2.2.3) при этом допуская, что существует диоганально-матричная функция $H_0(x,b)$, получим следующие условия (т.е. результаты леммы 2.1.1 обобщаются к матричным и векторным функциям):

$$\begin{cases} H_0(x,b) \equiv G(x)F(x,b); G(x) \equiv \gamma + \dfrac{1}{\alpha}\lambda(x), \\ H_0(x,b) = diag(H_{01}(x,b),...,H_{0n}(x,b)), \\ H_{0i}(x,b) \equiv [\gamma + \dfrac{1}{\alpha}\lambda_i(x)]F_i(x,b), (i=\overline{1,n}; 1<\gamma = const), \\ 0 < \lambda_0(x) = \min\limits_{1\le i\le n}\lambda_i(x) \in L^1(0,X); \phi(x) = \int\limits_0^x \lambda_0(\tau)d\tau, \\ \min\limits_{1\le i\le n} F_i(x,b) = \tilde{F}(x,b) \ge \alpha > 0, \forall x\in[0,X]; F_0(x,y) \equiv F(x,y) - F(0,y), \\ F_0\big|_{x=0} = 0, \forall y \in [0,b]; \|F_0(x,y) - F_0(\tau,y)\| \le L_{F_0}|x-\tau|, \\ \|H_0(x,b)\| \le C_{03}h(x); \|G(x)\| \le C_{04}h(x), (h_0(x) \equiv \gamma + \dfrac{1}{\alpha}\lambda_0(x), \\ h \equiv h_0(x)\tilde{F}(x,b)); 0 < \max C_{0j} = \tilde{C}_1 = const, (j=\overline{1,4}), \\ C_1 = \max(1, \sqrt{n^m}\tilde{C}_1^k), (m=\overline{0,4}; k=\overline{1,6}), \\ \phi_0(x) = \int\limits_0^x h(\tau)d\tau = \int\limits_0^x [\gamma + \dfrac{1}{\alpha}\lambda_0(\tau)]\tilde{F}(\tau,b)d\tau. \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

Тогда, проведя относительно системы (2.2.1) математические действия, на основе оператора H_0, задаваемой формулой:

$$H_0\theta \equiv \int\limits_0^x H_0(\tau,b)\theta(\tau,y)d\tau, \qquad (*)$$

указанная система эквивалентна преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \int\limits_0^x H_0(\tau,b)\theta(\tau,y)d\tau = (Q\theta)(x,y) + F(x,y), \\ Q\theta \equiv (\tilde{Q}\theta)(x,y) - (H\theta)(x,y);\ \tilde{Q}\theta \equiv \int\limits_0^x G(\tau)(Q_0\theta)(\tau,y)d\tau, \end{cases} \qquad (2.2.5)$$

где:

$$\begin{cases} Q_0\theta = colon\{Q_{01}\theta,...,Q_{0n}\theta\}; Q_{0i}\theta \equiv \theta_i(x,y)(H_i\theta)(x,b), (i=\overline{1,n}), \\ (H\theta)(x,b) \equiv \int\limits_0^x\int\limits_0^b K(x,\tau,b,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau; \theta \in R^n. \end{cases}$$

Из системы (2.2.5) видно, что для матричной функции $H_0(x,b)$, на основе (2.2.4) существуют собственные значения $\lambda_i(x)$, причем: $0 < \lambda_0(x) = \min\{\lambda_i(x) | i = 1,..,n\}$.

Далее, так как в теории ИУВ-1 одним из возможных методов исследования, являются регуляризирующие алгоритмы, то и в нашем случае, так как система (2.2.5) состоит из ИУВ-1, введем параметризированную систему:

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(x,y) + (\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) = F_\varepsilon(x,y), \\ (\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) \equiv \int\limits_0^x H_0(\tau,b)\theta_\varepsilon(\tau,y)d\tau - (Q\theta_\varepsilon)(x,y), \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

имеющая особенность относительно малого параметра, где допускается условие:

$$\begin{cases}\theta_\varepsilon(0,y)=\dfrac{1}{\varepsilon}F(0,y),\\ C_n(\bar{D}_1)\ni F_\varepsilon(x,y):\|F_\varepsilon(x,y)-F(x,y)\|_{C_n}\le\Delta_0(\varepsilon),(F_\varepsilon(0,y)=F(0,y)).\end{cases}\qquad(2.2.7)$$

Решение этой системы, как и в случае параграфа 2.1 ищем с помощью представления АХ:

$$\begin{cases}\theta_\varepsilon(x,y)=\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(x,y)+\upsilon(x,y)+\xi_\varepsilon(x,y),\\ \Pi_\varepsilon(0,y)=F(0,y),\upsilon(0,y)=0,\xi_\varepsilon(0,y)=0,\end{cases}\qquad(2.2.8)$$

где относительно указанных вектор-функций, получим соответствующие системы ИУ:

$$\Pi_\varepsilon(x,y)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x H_0(\tau,b)\Pi_\varepsilon(\tau,y)d\tau+F(0,y),\qquad(2.2.9)$$

$$\int_0^x H_0(\tau,b)\upsilon(\tau,y)d\tau=(Q\upsilon)(x,y)+F_0(x,y),(F_0\equiv F(x,y)-F(0,y)),\qquad(2.2.10)$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon\xi_\varepsilon+\int_0^x H_0(\tau,b)\xi_\varepsilon(\tau,y)d\tau=(Q[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon+\upsilon+\xi_\varepsilon])(x,y)-(Q\upsilon)(x,y)+\\&+F_\varepsilon(x,y)-F(x,y)-\varepsilon\upsilon(x,y).\end{aligned}\qquad(2.2.11)$$

В рамках указанных условий доказаны:

Лемма 2.2.1. При выполнении условий (2.2.2),(2.2.4),(2.2.7) и (2.2.8) имеют место следующие выводы:

а) $\Pi_\varepsilon(x,y)$ является решением системы (2.2.9), которое доопределяет особую векторную функцию $\Omega_\varepsilon(x,y)$ условием

$$\begin{cases}\Omega_\varepsilon(x,y)=\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(x,y)=\dfrac{1}{\varepsilon}W(x,b,0,\varepsilon)F(0,y),\\ \|\Omega_\varepsilon(x,y)\|\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\begin{cases}0,x\ne0,\\ \infty,x=0;\end{cases}\end{cases}\qquad(**)$$

б) видоизмененная вырожденная система (2.2.10) регуляризируема в $C_n(\bar{D}_1)$, т.е. решение параметризированного ИУ

$$\delta\upsilon_\delta(x,y)+\int_0^x h(\tau)\upsilon_\delta(\tau,y)d\tau=(Q\upsilon_\delta)(x,y)+F_0(x,y)\qquad(2.2.12)$$

сходится к функции $\upsilon(x,y)$ в смысле $C_n(\bar{D}_1)$ при $\delta\to0$, причем (2.2.10) имеет решение в этом классе функций;

в) функция $\xi_\varepsilon(x,y)$ определяется единственным образом из системы (2.2.11), причем сходится к нулю в смысле $C_n(\bar{D}_1)$, когда малый параметр: $\varepsilon\to0$.

Теорема 2.2.1. Пусть имеют место условия леммы 2.2.1. Тогда, на основе (2.2.8) следуют:

$$1)\ \begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z_n^2(D_1)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}}, (\gamma_1 = C_1\sqrt{b}2^{-7}[7^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \|\Omega_\varepsilon\|_{Z_n^2(D_1)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{cases} \tag{2.2.25}$$

$$2)\ \begin{cases} \| \theta_\varepsilon - \upsilon \|_{Z_n^2(D_1)} \le 2[\Delta_2(\varepsilon)\sqrt{Xb} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon), \\ \| \theta_\varepsilon \|_{Z_n^2(D_1)} \le r_* = const, \end{cases} \tag{2.2.26}$$

$$3)\ \left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) - F(x,y)\right\|_{Z_n^2(D_1)} \le \tilde{M}(\varepsilon), \left(\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon) \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0\right). \tag{2.2.27}$$

Утверждение 2.2.1. В условиях теоремы 2.2.1 система (2.2.1) регуляризируется по правилу (2.2.8) в $Z_n^2(D_1)$ в обобщенном смысле.

Глава 3 состоит из трех параграфов. Отметим, что в исследуемых ОЗ параграфов 3.1;3.2, рассматриваемые уравнения являются разновидностями уравнения Аллера, неоднородного нелинейного уравнения Шредингера-Уиземи (НУШУ) в теории волн и уравнения деформации наследственной среды в НО и т.д. Известно, что прямые задачи с аналогичными уравнениями встречаются в работах М. Аллера (1966), А.М. Нахушева (1979), С.В. Нерпина (1975, соавтор: А.Ф. Чудновский), А. Ньюэлла (1989), П.И. Наумкина (1992), Дж. Уиземи (1977), М.А. Шханукова (1983) и др.

В параграфе 3.1 изучается ОЗ с уравнением указанного класса, т.е.:

$$\begin{gathered} V_{t^2} - b^2 V_{x^2} + K_0(x)[\Phi(V) + \int_0^t \Psi(t-s) V(s, x - b(t-s)) \frac{\partial}{\partial x}[V_s(s,x) - bV_x(s,x)]ds] = \\ = (J\theta)(t), \forall (t,x) \in \bar{D}_0, \end{gathered} \tag{3.1.1}$$

$$\begin{cases} V(t,x)\big|_{t=0} = 0, V(t,x)_t\big|_{t=0} = \psi(x), \forall x \in R, \\ (V_t - bV_x)\big|_{x=x_0} = g(t),\ \forall t \in [0,T], (D_0 = (0,T) \times R, x_0 \in R), \end{cases} \tag{3.1.2}$$

с условием согласования

$$(V_t - bV_x)\big|_{t=0} = \psi(x);\ g(0) = \psi(x_0), \tag{3.1.3}$$

$$(J\theta)(t) \equiv \lambda \int_0^{M(t)} K(t,\eta)\theta^2(\eta)d\eta \tag{*}$$

при этом относительно известных функций:

$$0 < b, 0 < \lambda < 1, (b, \lambda = const); K_0(x) \in C^1(R); \Phi(V) \in C^2(R); \Psi(t) \in C^1[0,T],$$
$$g(t) \in C^1[0,T], \psi(x) \in C^2(R), M(t), K(t,s)$$

имеют место условия:

а) $\sup\left|\Phi_V^{(j)}\right| \le \beta_1, (j = 0,1); \Phi_V(V) \in C(R) \cap Lip(V\left|L_{\Phi_V}\right.),$

б) $\left|g^{(j)}(t)\right| \le \beta_2; \left|\Psi^{(j)}(t)\right| \le \beta_3, \forall t \in [0,T], (j = 0,1); \left|\psi^{(i)}(x)\right| \le \beta_4, (i = 0,1,2),$

$$\text{в)}\begin{cases} 0 \le K_0(x) \le \tilde{K}_{01} < \infty : \int\limits_R K_0(x)dx \le \tilde{K}_{02} = const, (|K_0'(x)| \le \tilde{K}_{03} = const), \\ \tilde{K}_0 = \max(\tilde{K}_{01}, \tilde{K}_{02}, \tilde{K}_{03}); \text{например: } K_0(x) \equiv e^{-\beta x^2} \ (\beta > 0; \lim\limits_{x\to\pm\infty} K_0(x) = 0), \end{cases}$$

г) $K(t,s) \in C(D) \cap Lip(t|L_K), 0 < L_K = const; 0 \le K(t,t), K(0,0) \ne 0; |K(.)| \le C_{01},$

$$D = \{(t,s): 0 \le s \le t \le T\},$$

д) $0 \le M(t) \le t \le T, M(0) = 0$, $M(t) \in C[0,T] \cap Lip(t|L_M), 0 < L_M = const,$

при этом неизвестным является вектор функция $\mathrm{P} = (V, \theta)$. Тогда требуется доказать регуляризируемости ОЗ в обобщенном смысле в введенном пространстве, так как из ОЗ (3.1.1) - (3.1.3) вырождается некорректное нелинейное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД.

§3.1.1. Интегрилизация ОЗ. С этой целью, на основе векторной функции $\mathrm{P}_0 = (Q, \theta)$ предположим:

$$\begin{cases} V_t - bV_x = \psi(x - bt) + (\Im[Q,\theta])(t,x), \ (\psi(x_0) = g(0)), \\ \Im[Q,\theta] \equiv \int\limits_0^t [(J\theta)(s) + \int\limits_{x-b(t-s)}^{x} K_0(\tau)Q(s,\tau)d\tau]ds, \end{cases} \tag{3.1.4}$$

при этом имеет место:

$$\begin{cases} V = \int\limits_0^t \psi(x + b(t-s) - bs)ds + \int\limits_0^t \int\limits_0^s [(J\theta)(s') + \int\limits_{x+b(t-s)-b(s-s')}^{x+b(t-s)} K_0(\tau)Q(s',\tau)d\tau]ds'ds \equiv \\ \equiv (A_0[Q,\theta])(t,x), \\ V_{t^2} - bV_{xt} = -b\psi_l(x - bt) + (J\theta)(t) + b\int\limits_0^t K_0(x - b(t-s))Q(s, x - b(t-s))ds \equiv A_1[Q,\theta], \\ V_{tx} - bV_{x^2} = \psi_l(x - bt) + \int\limits_0^t [K_0(x)Q(s,x) - K_0(x - b(t-s))Q(s, x - b(t-s))]ds \equiv \\ \equiv (A_2Q)(t,x), (l = x - bt), \\ V_{t^2} - b^2V_{x^2} = (J\theta)(t) + \int\limits_0^t K_0(x)Q(s,x)ds. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Тогда, учитывая (3.1.4), (3.1.5) и некоторые математические преобразования из исходного ИДУ следуют интегральные соотношения:

$$\begin{cases} \int_0^t (J\theta)(s) = g(t) - \{\psi(x_0 - bt) + \int_0^t \int_{x_0-b(t-s)}^{x_0} K_0(\tau)Q(s,\tau)d\tau]ds\} \equiv (BQ)(t,x_0), \\ (A_0[Q,\theta])(t,x) \equiv \int_0^t \psi(x+b(t-s)-bs)ds + \int_0^t (BQ)(s,x_0)ds + \\ +\int_0^t \int_0^s \int_{x+b(t-s)-b(s-s')}^{x+b(t-s)} K_0(\tau)Q(s',\tau)d\tau ds' ds \equiv (\tilde{A}_0 Q)(t,x) \end{cases} \tag{3.1.7}$$

и

$$\begin{gathered} Q(t,x) = -\{\Phi_\rho((\tilde{A}_0Q)(t,x))[\psi(x-bt) + \int_0^t b\psi_{l_2}(x+b(t-s)-bs)ds + (BQ)(t,x_0) + \\ +\int_0^t \int_{x-b(t-s)}^{x} K_0(\tau)Q(s,\tau)d\tau ds + \int_0^t \int_0^s [K_0(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s)) - K_0(x+ \\ +b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds] + \Psi(0)(\tilde{A}_0Q)(t,x)\times \\ \times(A_2Q)(t,x) + \int_0^t \Psi_t(t-s)(\tilde{A}_0Q)(s,x-b(t-s))\times(A_2Q)(s,x)ds + \int_0^t \Psi(t-s)\times \\ \times[\int_0^s\{-b\psi_{l_4}(x-b(t-s)+b(s-s')-bs') - b\int_0^{s'}[K_0(x-b(t-s)+b(s-s'))Q(\tilde{s},x-b(t-s)+ \\ +b(s-s')) - K_0(x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\tilde{s}))Q(\tilde{s},x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\tilde{s}))]d\tilde{s}\}\times \\ \times ds'](A_2Q)(s,x)ds\} \equiv (AQ)(t,x). \end{gathered} \tag{3.1.8}$$

Отметим, что предлагаемый вариант МИО (3.1.4), с учетом (3.1.7), имеет вид

$$V_t - bV_x = \psi(x-bt) + (BQ)(t,x_0) + \int_0^t \int_{x-b(t-s)}^{x} K_0(\tau)Q(s,\tau)d\tau ds \equiv (\tilde{\Im}Q)(t,x), \tag{3.1.4*}$$

где относительно искомой функции следует:

$$V = (\tilde{A}_0Q)(t,x), \tag{3.1.9}$$

при этом ИДУ (3.1.1) редуцируется к нелинейному ИУВ-2 (3.1.8) по переменной $t \in [0,T]$. Достоинством разработанного МИО является тот факт, что решение ИДУ сводится к решению ИУВ-2, для которого хорошо развиты теория исследований.

Лемма 3.1.1. Пусть оператор A допускает условия:

$$\begin{cases} A: L_A < 1, \\ \|AQ_0\|_C \le r(1-L_A). \end{cases} \tag{3.1.10}$$

Тогда ИУ (3.1.8) однозначно разрешимо в $C(\bar{D}_0)$ при этом следует, что $Q_x(t,x) \in C(\overline{D_0})$. Поэтому, на основе (3.1.9) функция V существует единственным образом в $C^{2,2}(\bar{D}_0)$.

Отметим, что из равномерной ограниченности Q_x, допускается:

$$\begin{cases} \|U(t,x)\|_C \le (1-L_A)^{-1}[T_0 + C_0\|Q\|_C] \le (1-L_A)^{-1}[T_0 + C_0 r_0] = \tilde{r}_0, \\ Q_x \equiv U(t,x); 0 < L_A < 1. \end{cases} \tag{3.1.14}$$

Следовательно, на основе доказанных условий леммы 3.1.1 и с учетом (3.1.9) можем сказать, что и функция V однозначным образом определяется в $C^{2,2}(\bar{D}_0)$, так как функции: $V, V_t, V_x, V_{t^2}, V_{x^2}, V_{tx}$, связаны с функциями $Q, Q_x \equiv U$. Значит, имеет место:

$$\|V\|_{C^{2,2}(\bar{D}_0)} = \sum_{j=0}^{2} \|V_{x^j}^{(j)}\|_{C(\bar{D}_0)} + \sum_{j=1}^{2} \|V_{t^j}^{(j)}\|_{C(\bar{D}_0)} \le N_0 = const. \qquad (**)$$

Примечание 3.1.1. Если бы исследовали прямую задачу, то результаты леммы 3.1.1 были бы достаточными в указанном пространстве с нормой (**). Но, так как рассматривается ОЗ, где вырождается некорректное ИУВ-1, то необходимо пространство со слабой сходимостью. Поэтому, учитывая условия леммы 3.1.1, на основе теоремы К. Фридрихса (1980, книга В.А. Треногина) можно относительно функции V вести весовое пространство, например: A_1) в $\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0)$ (обратно нет). При этом, с учетом ограничения относительно функций Q, U:

$$|Q| \le r_0; |U| \le \tilde{r}_0, \forall (t,x) \in \bar{D}_0 \qquad (3.1.16)$$

в пространстве: $\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0) = \{(t,x) \in \bar{D}_0 : V \in C^{1,2}(\bar{D}_0), V_{t^2} \in L^2_{K_0(x)}(D_0)\}$ с нормой

$$\begin{cases} \|V\|_{\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0)} = \|V\|_{C^{1,2}(\bar{D}_0)} + \|V_{t^2}\|_{L^2_{K_0(x)}(D_0)} \le N_0, \\ \|V_{t^2}(t,x)\|_{L^2_{K_0}} = (\int\limits_{D_0} K_0(\tau)|V_{\tau^2}(s,\tau)|^2 d\tau ds)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad (3.1.17)$$

получим соответствующие оценки в $\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0)$.

Если вместо (3.1.16) требуем, что Q, U ограничены в $L^2_{K_0}(D_0)$, т.е.:

$$\begin{cases} \|Q(t,x)\|_{L^2_{K_0}} = (\int\limits_{D_0} K_0(\tau)|Q(s,\tau)|^2 d\tau ds)^{\frac{1}{2}} \le N_{01} = const, \\ \|U(t,x)\|_{L^2_{K_0}} = (\int\limits_{D_0} K_0(\tau)|U(s,\tau)|^2 d\tau ds)^{\frac{1}{2}} \le N_{02} = const, \end{cases} \qquad (3.1.19)$$

то и функции: $V, V_t, V_x, V_{t^2}, V_{x^2}, V_{tx}$ будут ограничены в смысле $\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0)$.

Значит, так как решением ОЗ является вектор-функция $P = (V, \theta)$, то регуляризируемость ОЗ доказывается в векторном пространстве $\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0), Z^2(0,T)]}(D_0)$, с учетом (3.1.17) с нормой:

$$\|P\|_{\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0); Z^2(0,T)]}} = \|V\|_{\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0)} + \|\theta\|_{Z^2(0,T)}. \qquad (3.1.20)$$

§3.1.2. Регуляризация ИУВ-1. Так как в первом пункте относительно функции V доказали лемму 3.1.1, то с учетом (3.1.7) и (*), на основе дифференцирования по t, следует некорректное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД, т.е.:

$$(J\theta)(t) \equiv \lambda \int\limits_0^{M(t)} K(t,\eta)\theta^2(\eta) d\eta = F(t), \qquad (3.1.21)$$

где известные функции удовлетворяют условия:

$$\begin{cases} F(t) \equiv g'(t) - \{-b\psi_l(x_0 - bt) + b\int\limits_0^t \ [K_0(x_0 - b(t-s))Q(s, x_0 - b(t-s))]ds\}, \\ F(t) \in C[0,T] \cap Lip(t|L_F); F(t) \geq \alpha > 0, \forall t \in [0,T], \\ |F(t)| \leq C_{02} = const, \end{cases} \quad (3.1.22)$$

и (г, д). При этом, чтобы доказать регуляризируемости ИУ (3.1.21) в $Z^2(0,T)$ воспользуемся методом параграфа 2.1, т.е. преобразуем (3.1.21) к виду:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t \ h(\tau)\theta(\tau)d\tau = (H\theta)(t) + F(t), \\ H\theta \equiv \int\limits_0^t \ h_0(\tau)\theta(\tau)(J\theta)(\tau)d\tau - (J\theta)(t), \end{cases} \quad (3.1.23)$$

где известные функции, содержащиеся в (3.1.23) определяются, как в случае леммы 2.1.1. Поэтому, наряду с ИУ (3.1.23) введется уравнение с малым параметром ε:

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(t) + (\Phi\theta_\varepsilon)(t) = F_\varepsilon(t), \\ (\Phi\theta_\varepsilon)(t) \equiv \int\limits_0^t h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau)d\tau - (H\theta_\varepsilon)(t), \end{cases} \quad (3.1.25)$$

и решение этого уравнения представляется по правилу:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(t) + \upsilon(t) + \xi_\varepsilon(t), \\ \Pi_\varepsilon(0) = F(0), \quad \upsilon(0) = 0, \quad \xi_\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \quad (3.1.26)$$

Тогда, на основе (3.1.25) неизвестные функции:

$\Pi_\varepsilon(t), \upsilon(t), \xi_\varepsilon(t)$

определяются из системы:

$$\begin{cases} \Pi_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau + F(0), \\ \int\limits_0^t \ h(\tau)\upsilon(\tau)d\tau = (H\upsilon)(t) + F_0(t), \\ \varepsilon\xi_\varepsilon + \int\limits_0^t \ h(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau = (H[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon])(t) - (H\upsilon)(t) + F_\varepsilon(t) - F(t) - \varepsilon\upsilon(t). \end{cases} \quad (3.1.27)$$

В рамках указанных условий доказаны:

Лемма 3.1.2. Если допускаются условия леммы 3.1.1 и ((г,д), (3.1.22)), то относительно системы (3.1.27) имеют место:

$$\text{А) } \Pi_\varepsilon(t) = F(0)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)), \quad (3.1.28)$$

с оценкой

$$\left|\Pi_\varepsilon(t)\right| \le C_1 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)); \qquad (3.1.29)$$

Б) решение параметризированного ИУ

$$\delta\upsilon_\delta(t) + \int_0^t h(\tau)\upsilon_\delta(\tau)\,d\tau = (H\upsilon_\delta)(t) + F_0(t) \qquad (3.1.30)$$

равномерно сходится к решению второго уравнения системы (3.1.27) при $\delta \to 0$, так как указанное ИУ имеет решение в $C[0,T]$;

В) третье ИУ системы (3.1.27) однозначно разрешимо в $C[0,T]$, причем равномерно сходится к нулю, когда $\varepsilon \to 0$.

Теорема 3.1.1. Если допускаются условия леммы 3.1.2, то на основе (3.1.26) следуют:

$$1) \begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(0,T)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}}, (\gamma_1 = C_1 2^{-\frac{7}{2}}[7^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \|\Omega_\varepsilon\|_{Z^2(0,T)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{cases} \qquad (3.1.49)$$

$$2) \begin{cases} \|\theta_\varepsilon - \upsilon\|_{Z^2(0,T)} \le 2[\Delta_3(\varepsilon)\sqrt{T} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{Z^2(0,T)} \le r_* = const, \end{cases} \qquad (3.1.50)$$

$$3) \ \left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)\right\|_{Z^2(0,T)} \le \tilde{M}(\varepsilon), \left(\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon) \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0\right). \qquad (3.1.51)$$

§3.1.3. Общий вывод регуляризации ОЗ в векторном пространстве $\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0), Z^2(0,T)]}(D_0)$ с нормой (3.1.20). Из полученных результатов леммы 3.1.1 и теоремы 3.1.1 на основе (3.1.5), в итоге имеем:

$$\begin{cases} \left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)\right\|_{Z^2(0,T)} \le \tilde{M}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, (\text{см.}(3.1.51), \\ \tilde{\Delta}_*(\varepsilon) = 3b\tilde{K}_0 T\Delta_{01}(\varepsilon) + T^2 b^2 \tilde{K}_0[\Delta_{01}(\varepsilon) + \Delta_{02}(\varepsilon)], (\tilde{\Delta}_*(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0), \\ \left\|V_{t^2\varepsilon} - V_{t^2}\right\|_{L^2_{K_0(x)}(D_0)} = (\int_{D_0} K_0(\tau)\left|V_{t^2\varepsilon}(t,\tau) - V_{t^2}(t,\tau)\right|^2 d\tau dt)^{\frac{1}{2}}, \\ \left\|V_{t^2\varepsilon} - V_{t^2}\right\|_{L^2_{K_0(x)}(D_0)} \le 2\sqrt{\tilde{K}_0}[\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F\right\|_{Z^2(0,T)} + \sqrt{T}\tilde{\Delta}_*(\varepsilon)] \le 2\sqrt{\tilde{K}_0}[\tilde{M}(\varepsilon) + \\ +\sqrt{T}\tilde{\Delta}_*(\varepsilon)], \end{cases} \qquad (3.1.58)$$

$$\left\|V_\varepsilon - V\right\|_{C(\bar{D}_0)} \le \frac{2}{3}\sqrt{T^3}\tilde{M}(\varepsilon) + \frac{1}{2}T^2\tilde{K}_0\Delta_{01}(\varepsilon) = \Delta_{03} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \qquad (3.1.59)$$

$$\begin{aligned} &\left\|V_{t\varepsilon} - V_t\right\|_{C(\bar{D}_0)} \le \sqrt{T}\,\|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)\|_{Z^2(0,T)} + \tilde{K}_0 T(1+bT)\Delta_{01}(\varepsilon) \le \sqrt{T}\tilde{M}(\varepsilon) + \\ &+\tilde{K}_0 T(1+bT)\Delta_{01}(\varepsilon) = \Delta_{04}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \end{aligned} \qquad (3.1.60)$$

а также

$$\begin{cases} \left\|V_{x\varepsilon} - V_x\right\|_{C(\bar{D}_0)} \le \Delta_{05}(\varepsilon), \\ \left\|V_{x^2\varepsilon} - V_{x^2}\right\|_{C(\bar{D}_0)} \le \Delta_{06}(\varepsilon); \left\|V_{xt\varepsilon} - V_{xt}\right\|_{C(\bar{D}_0)} \le \Delta_{07}(\varepsilon). \end{cases} \qquad (3.1.61)$$

Тогда, на основе (3.1.58) -(3.1.61) с теми выводами, которые указаны выше следует:

$$\left\|V_{\varepsilon}-V\right\|_{\tilde{W}^{2}_{K_0(x)}(D_0)} \le \sum_{i=3}^{7} \Delta_{0i}(\varepsilon)+2\sqrt{\tilde{K}_0}[\tilde{M}(\varepsilon)+\sqrt{T}\tilde{\Delta}_{*}(\varepsilon)]=\bar{\Delta}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0. \quad (3.1.62)$$

Утверждение 3.1.1. В условиях лемм 3.1.1; 3.1.2, теоремы 3.1.1 и (3.1.62) ОЗ (3.1.1), (3.1.2) регуляризируема в обобщенном смысле в $\tilde{G}^{2}_{[\tilde{W}^{2}_{K_0(x)}(D_0);Z^2(0,T)]}(D_0)$

В параграфе 3.2 исследуется нелокальная ОЗ с нелинейным дифференциальным оператором гиперболического типа третьего порядка в ограниченной области, где вырождается некорректное нелинейное ИУВ-1 с ядром, которое указана в параграфе 3.1, т.е. рассматривается нелокальная ОЗ:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\lambda D(U)\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}]=\lambda\frac{\partial U}{\partial t}+f(x)(J\theta)(t), \quad (3.2.1)$$

$$\begin{cases} U\big|_{t=0}=\varphi(x), \forall x\in[0,H], \\ U_x\big|_{x=0}=\psi_1(t); U\big|_{x=H}=\psi_0(t), \forall t\in[0,T], \\ \psi_0(0)=\varphi(H), \psi_1(0)=\varphi_x(0), \end{cases} \quad (3.2.2)$$

$$U_{x^2}(x_0,t)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i U_x(x_i,t)=g(t), \forall t\in[0,T], ((x_0;x_i)\in(0,H)), \quad (3.2.3)$$

$$J\theta\equiv\int_0^t K(t,s)\theta^3(s)ds, \quad (3.2.4)$$

где известные функции: $\lambda=A^{-1},\lambda_i(i=1,2);D(U),f(x),\varphi(x),\psi_0(t),\psi_1(t),g(t)$ изучаемой ОЗ допускают условия:

a1) $0<\lambda,\lambda_i=const;C^2(R)\ni D(U);C[0,H]\ni f(x);C^2[0,H]\ni\varphi(x);\psi_0(t),\psi_1(t),g(t)\in C^1[0,T]$,

a2) $K(t,s)\in C(D_1)\cap Lip(t|L_K), 0<L_K=const; 0\le K(t,t), K(0,0)\ne 0; |K(.)|\le C_{01}$,

$D_2=\{(t,s):0\le s\le t\le T\}$. Неизвестным является вектор-функция: $P=(U,\theta)$, поэтому требуется доказать регуляризируемости исходной ОЗ в обобщенном смысле, так как относительно функции θ из исходной ОЗ вырождается некорректное нелинейное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД и с условием относительно свободной функции (см. ниже (3.2.16)):

a3) $F(t)\in C[0,T]\cap Lip(t|L_F), 0<L_F; F(t)\ge\alpha>0, |F(t)|\le C_{02}, \forall t\in[0,T]$.

При этом регуляризируемость этого ИУ рассматривается в $Z^3(0,T)$ (см. гл. 1, $p=3$, где не учитывается (1.1.15)).

§3.2.1. Интегрилизация ОЗ. Чтобы интегрилизировать исходную ОЗ, удобно применять соотношение, где искомая функция U связывается с векторной функцией $P_0=(Q,\theta)$, на основе равенства:

$$U_{x^2}(x,t)=\varphi_{x^2}(x)+\int_0^t[Q(x,s)+f(x)(J\theta)(s)]ds=(A_1[Q,\theta])(x,t), \quad (3.2.5)$$

кроме того, интегрируя дважды по переменной x получим:

$$\begin{cases} U_x = \psi_1(t) + \int\limits_0^x \{\varphi_{\tau^2}(\tau) + \int\limits_0^t [Q(\tau,s) + f(\tau)(J\theta)(s)]ds\}d\tau = (A_2[Q,\theta])(x,t), \\ U = \psi_0(t) - \psi_1(t)H - \int\limits_0^H (H-\tau)\{\varphi_{\tau^2}(\tau) + \int\limits_0^t [Q(\tau,s) + f(\tau)(J\theta)(s)]ds\}d\tau + \\ +\psi_1(t)x + \int\limits_0^x (x-\tau)\{\varphi_{\tau^2}(\tau) + \int\limits_0^t [Q(\tau,s) + f(\tau)(J\theta)(s)]ds\}d\tau \equiv (A_3[Q,\theta])(x,t), \end{cases} \tag{3.2.6}$$

где $Q(x,t)$ - новая неизвестная функция. Это значит, что на основе (3.2.3) с учетом (3.2.5),(3.2.6) и проведя некоторые математические преобразования, из (3.2.1) следуют:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t (J\theta)(s)ds = \beta_0^{-1}\{g(t) - (\varphi_{x^2}(x_0) + \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i\psi_1(t)) - \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i \int\limits_0^{x_i} \varphi_{\tau^2}(\tau)d\tau - \int\limits_0^t Q(x_0,s)ds - \\ -\sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i \int\limits_0^{x_i} \int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau\} \equiv (A_4 Q)(t), \\ \frac{\partial}{\partial t}(A_4 Q)(t) = \beta_0^{-1}[g'(t) - \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i\psi_1'(t) - Q(x_0,t) - \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i \int\limits_0^{x_i} Q(\tau,t)d\tau], \\ \beta_0 = f(x_0) + \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i \int\limits_0^{x_i} f(\tau)d\tau \neq 0;\ \tilde{g}(t) \equiv g(t) - (\varphi_{x^2}(x_0) + \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i\psi_1(t)) - \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i(\varphi_x(x_i) - \\ -\varphi_x(0)), (\tilde{g}(t)\big|_{t=0} = 0), \end{cases} \tag{3.2.7}$$

и

$$\begin{aligned} Q(x,t) = {} & \lambda\{\psi_0'(t) + \psi_1'(t)(x-H) - \int\limits_0^H (H-\tau)Q(\tau,t)d\tau + [-\int\limits_0^H (H-\tau)\times \\ & \times f(\tau)d\tau + \int\limits_0^x (x-\tau)f(\tau)d\tau]\beta_0^{-1}[g'(t) - \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i\psi_1'(t) - Q(x_0,t) - \\ & -\sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i \int\limits_0^{x_i} Q(\tau,t)d\tau] + \int\limits_0^x (x-\tau)Q(\tau,t)d\tau\} - \lambda\{D_\rho[(BQ)(x,t)]\{\psi_1(t) + \varphi_x(x) - \\ & -\varphi_x(0) + \int\limits_0^x\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau + (A_4 Q)(t)\int\limits_0^x f(\tau)d\tau\}^2 + D[(BQ)(x,t)]\times[\varphi_{x^2}(x) + \\ & +\int\limits_0^t Q(x,s)ds + f(x)(A_4 Q)(t)]\} \equiv (\tilde{B}Q)(x,t), \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

где (3.2.9) является ИУ-2 и поэтому, можем допустить:

Лемма 3.2.1. В рамках условий (3.2.2), (3.2.3), (3.2.7) и пусть имеют место условия Банаха:

$$\begin{cases} 0 < L_{\tilde{B}} < 1, \\ \tilde{B}: S_r \to S_r = \{Q: |Q - Q_0| \le r, \forall (x,t) \in \bar{D}_0\}, \\ \left\| \tilde{B}Q_0 - Q_0 \right\|_C \le (1 - L_{\tilde{B}})r, (|Q| \le r_0 = const, \forall (x,t) \in \bar{D}_0). \end{cases} \tag{3.2.10}$$

Тогда ИУ (3.2.9) однозначно разрешимо в $Q \in C(\bar{D}_0)$, значит, с учетом (3.2.8) единственным образом определяется и функция $U(x,t)$ в $C^{2,1}(\bar{D}_0)$.

Далее, в итоге учитывая результаты леммы 3.2.1, можем допустить:

$$\|U\|_{C^{2,1}(\bar{D}_0)} = \|U\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_t\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_x\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_{xt}\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_{x^2}\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_{x^2t}\|_{C(\bar{D}_0)} \le M_0.$$

Примечание 3.2.1. Аналогичные выводы (как было отмечено в параграфе 3.1), на основе теоремы К. Фридрихса получим и здесь, т.е. при выполнении условий леммы 3.2.1, так как функция U однозначно определяется по правилу (3.2.8) и ограничено в $C^{2,1}(\bar{D}_0)$, то по указанной теореме U оценивается и в пространстве $\tilde{W}^3(D_0)$ (обратно нет), когда
функция Q допускает условие:

$$|Q| \le r_0, \forall (x,t) \in \bar{D}_0. \tag{3.2.13}$$

Здесь: $\tilde{W}^3(D_0) = \{(x,t) \in \bar{D}_0 : U, U_x, U_{x^2} \in C(\bar{D}_0); U_t, U_{tx}, U_{tx^2} \in L^3(D_0)\}$ с нормой

$$\begin{cases} \|U\|_{\tilde{W}^3(D_0)} = \sum_{i=0}^{2} \|U_{x^i}^{(i)}\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_t\|_{L^3(D_0)} + \|U_{tx}\|_{L^3(D_0)} + \|U_{tx^2}\|_{L^3(D_0)} \le N_0, (U_{x^0}^{(0)} = U), \\ \|U_t(t,x)\|_{L^3} = (\int_{D_0} |U_s(\tau,s)|^3 d\tau ds)^{\frac{1}{3}}; \|U_{tx}(t,x)\|_{L^3} = (\int_{D_0} |U_{s\tau}(\tau,s)|^3 d\tau ds)^{\frac{1}{3}}, \\ \|U_{tx^2}(t,x)\|_{L^3} = (\int_{D_0} |U_{s\tau^2}(\tau,s)|^3 d\tau ds)^{\frac{1}{3}}, (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 : p = 3, q = \frac{3}{2}). \end{cases} \tag{3.2.14}$$

Если вместо (3.2.13) требуем, что функция Q в $L^3(D_0)$, т.е.:

$$\|Q(x,t)\|_{L^3} = (\int_{D_0} |Q(\tau,s)|^3 d\tau ds)^{\frac{1}{3}} \le N_{01} = const,$$

то, и в этом случае имеют место оценки, которые указаны по формуле (3.2.14).

Кроме того, так как решением исходной ОЗ является вектор функция $P = (U, \theta)$, то регуляризируемость ОЗ проводится в $\tilde{G}^3_{[\tilde{W}^3(D_0), Z^3(0,T)]}(D_0)$ с нормой:

$$\|P\|_{\tilde{G}^3_{[\tilde{W}^3(D_0); Z^3(0,T)]}} = \|U\|_{\tilde{W}^3(D_0)} + \|\theta\|_{Z^3(0,T)}. \tag{3.2.15}$$

§3.2.2. Регуляризируемость ИУВ-1. Из полученных результатов леммы 3.2.1 и с учетом формул (*), (3.2.7), следует нелинейное ИУВ-1 вида:

$$\begin{cases} J\theta \equiv \int_0^t K(t,s)\theta^3(s)ds = F(t), \\ F(t) \equiv \beta_0^{-1}[g'(t) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \psi_1'(t) - Q(x_0,t) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \int_0^{x_i} Q(\tau,t)d\tau], \end{cases} \tag{3.2.16}$$

причем допускаются условия (a_2, a_3), то (3.2.16) является некорректным ИУВ-1 в $C[0,T]$.

Для доказательства регуляризируемости (3.2.16) при условии (a_3) в обобщенном смысле, сперва преобразуем это ИУ к виду:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t h(\tau)\theta(\tau)d\tau = (\Phi\theta)(t) + F(t), \\ \Phi\theta \equiv \int\limits_0^t h_0(\tau)\theta(\tau)(J\theta)(\tau)d\tau - (J\theta)(t), \end{cases} \tag{3.2.17}$$

так как можем вести, как и в случае параграфа 3.1, следующие преобразования:

$$\begin{cases} h(t) \equiv [\gamma + \frac{1}{\alpha}\mu(t)]F(t) \geq m > 0, (1 < \gamma = const); h_0(t) \equiv \gamma + \frac{1}{\alpha}\mu(t), \\ 0 \leq \mu(t) \in L^1(0,T); h_0(t) \leq a^{-1}h(t); F_0(t) \equiv F(t) - F(0); F_0(0) = 0, \\ \phi_0(t) = \int\limits_0^t [\gamma + \frac{1}{\alpha}\mu(\tau)]F(\tau)d\tau = \int\limits_0^t h(\tau)d\tau, \\ \left|F_0(t) - F_0(\tau)\right| \leq L_{F_0} M_0(\phi_0(t) - \phi_0(\tau)), (\tau \leq t; M_0 = \frac{1}{\gamma\alpha}), \\ 0 < \max C_{0j} = C_0, (j = 1,2; см.(a_2, a_3)), \\ t \in [0,T]: \ t = (t^{\frac{2}{9}})^{\frac{9}{2}} \leq (\phi_0(t))^{\frac{9}{2}}, (\mu(t) = \frac{2}{9\sqrt[9]{t^7}}); t \leq M_1(\phi_0(t))^2, (M_1 = \sup\limits_{[0,T]}(\phi_0(t))^{\frac{5}{2}}). \end{cases} \tag{3.2.18}$$

Тогда, наряду с уравнением (3.2.17) введем ИУ с малым параметром:

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(t) + \int\limits_0^t h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau)d\tau = (\Phi\theta_\varepsilon)(t) + F_\varepsilon(t), \\ (\Phi_0\theta_\varepsilon)(t) \equiv \int\limits_0^t h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau)d\tau - (\Phi\theta_\varepsilon)(t), \end{cases} \tag{3.2.19}$$

и решение этого ИУ ищем по правилу:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(t) + \upsilon(t) + \xi_\varepsilon(t), \\ \Pi_\varepsilon(0) = F(0), \upsilon(0) = 0, \xi_\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \tag{3.2.20}$$

Следовательно, относительно неизвестных функций получим систему:

$$\begin{cases} \Pi_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)\Pi_\varepsilon(s)ds + F(0), \\ \int\limits_0^t h(s)\upsilon(s)ds = (\Phi\upsilon)(t) + F_0(t), \\ \varepsilon\xi_\varepsilon(t) + \int\limits_0^t h(s)\xi_\varepsilon(s)ds = (\Phi[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon])(t) - (\Phi\upsilon)(t) - \varepsilon\upsilon(t) + F_\varepsilon(t) - F(t), \end{cases} \tag{3.2.21}$$

и можем доказать следующие утверждения:

Лемма 3.2.2. При условиях леммы 3.2.1 и ((a_2, a_3), (3.2.18)), относительно ИУ системы (3.2.21) имеют место:

1) $\Pi_\varepsilon(t)=F(0)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)\,ds)$, с оценкой

$$\left|\Pi_\varepsilon(t)\right|\le C_0\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)\right); \qquad (3.2.22)$$

2) решение параметризированного уравнения

$$\delta\upsilon_\delta(t)+\int\limits_0^t h(s)\upsilon_\delta(s)ds=(\Phi\upsilon_\delta)(t)+F_0(t) \qquad (3.2.23)$$

равномерно сходится к решению второго ИУ системы (3.2.21) при $\delta\to 0$, так как это ИУ имеет решение в C [0, T];

3) функция $\xi_\varepsilon(t)$, как решение третьего ИУ системы (3.2.21) однозначно разрешимо в C [0, T], причем равномерно сходится к нулю, когда $\varepsilon\to 0$.

Теорема 3.2.1. При условиях леммы 3.2.2, на основе (3.2.20) следуют:

$$1)\begin{cases}\left\|\Pi_\varepsilon\right\|_{Z^3(0,T)}\le\gamma_4\varepsilon^{\frac{9}{6}},(\gamma_4=C_0[3^{\frac{9}{2}}(2e)^{-\frac{9}{2}}+\frac{945}{32}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{3}}),\\ \left\|\Omega_\varepsilon\right\|_{Z^3(0,T)}\le\gamma_4\varepsilon^{\frac{1}{2}},\end{cases} \qquad (3.2.39)$$

$$2)\begin{cases}\|\theta_\varepsilon-\upsilon\|_{Z^3(0,T)}\le\tilde M_0(\varepsilon),(\tilde M_0(\varepsilon)=2[\Delta_3(\varepsilon)\sqrt[3]{T}+\gamma_4\varepsilon^{\frac{1}{2}}]),\\ \|\theta_\varepsilon\|_{Z^3(0,T)}\le r_*=const,\end{cases} \qquad (3.2.40)$$

$$3)\ \left\|(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\right\|_{Z^3(0,T)}\le\tilde M(\varepsilon),\left(\tilde M_0(\varepsilon),\tilde M(\varepsilon)\to 0\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0\right). \qquad (3.2.41)$$

§3.2.3. Общий вывод регуляризации ОЗ в пространстве $\tilde G^3_{[\tilde W^3(D_0),Z^3(0,T)]}(D_0)$ с нормой (3.2.15). Из полученных результатов леммы 3.2.1 и теоремы 3.2.1, на основе (3.2.6), (3.2.7) и учитывая условие:

$$\left|Q-Q_\varepsilon\right|\le\tilde\Delta(\varepsilon),\forall(x,t)\in\bar D_0, \qquad (3.2.46)$$

в итоге следуют:

$$\left\|U_t-U_{t\varepsilon}\right\|_{L^3(D_0)}\le[\text{см.}(3.2.41)]\le 2[H^2\sqrt[3]{TH}\tilde\Delta(\varepsilon)+\gamma_3\sqrt[3]{H}\tilde M(\varepsilon)]=\Upsilon_{01}(\varepsilon), \qquad (3.2.47)$$

$$\begin{cases}\left\|U_{tx}-U_{tx\varepsilon}\right\|_{L^3(D_0)}\le\Upsilon_{02}(\varepsilon),\\ \left\|U_{tx^2}-U_{tx^2\varepsilon}\right\|_{L^3(D_0)}\le\Upsilon_{03}(\varepsilon),(\Upsilon_{02},\Upsilon_{03}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0),\end{cases} \qquad (3.2.48)$$

$$\|U-U_\varepsilon\|_{C(\bar D_0)}\le N_{01}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0, \qquad (3.2.49)$$

$$\begin{cases}\left\|U_{x\varepsilon}-U_x\right\|_{C(\bar D_0)}\le N_{02}(\varepsilon),\\ \left\|U_{x^2\varepsilon}-U_{x^2}\right\|_{C(\bar D_0)}\le N_{03}(\varepsilon).\end{cases} \qquad (3.2.50)$$

Поэтому, учитывая (3.2.47) -(3.2.50) получим оценку в смысле $\tilde W^3(D_0)$, т.е.:

$$\left\|U_\varepsilon-U\right\|_{\tilde W^3(D_0)}\le\sum_{i=1}^{3}(N_{0i}(\varepsilon)+Y_{0i}(\varepsilon))=\bar\Delta(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0\cdot \qquad (3.2.51)$$

Утверждение 3.2.1. В условиях леммы 3.2.1 и теоремы 3.2.1 и (3.2.51) ОЗ (3.2.1)- (3.2.3) регуляризируема в $\tilde G^3_{[\tilde W^3(D_0);Z^3(0,T)]}(D_0)$ в обобщенном смысле.

В параграфе 3.3 изучается многомерная ОЗ с дифференциальным оператором четвертого порядка гиперболического типа:

$$u_{tx^2y}+\lambda u_{x^2y}=\lambda_1 u_y+\Phi_0(u,u_x,u_{x^2})+f(t)(H\theta)(x,y), \tag{3.3.1}$$

$$\begin{cases} u(0,y,t)=u_x(0,y,t)=0, \\ u(x,0,t)=0; u(x,y,0)=\varphi(x,y), \forall(x,y,t)\in\bar{\Omega}, (\Omega=(0,X)\times(0,b)\times(0,\infty)), \\ \varphi(0,y)=\varphi(x,0)=\varphi(0,0)=0, (\varphi_x(0,y)=0; u(t,0,0)=0; u(0,0,0)=0), \end{cases} \tag{3.3.2}$$

$$\begin{cases} (u_t+\lambda u)\big|_{t=T}=g(x,y), \forall(x,y)\in\bar{D}_1, \\ g\big|_{x=0}=g\big|_{y=0}=0, (g(0,0)=0; D_1=(0,X)\times(0,b); T\in(0,\infty)), \end{cases} \tag{3.3.3}$$

где

$$H\theta\equiv\int_0^x\int_0^y K(x,\tau,y,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau, \tag{*}$$

при этом относительно известных функций $\lambda,\lambda_1,\Phi_0,f,\varphi,g,K$ допускаются условия:

$$\begin{cases} C(D_0)\ni K(x,\tau,y,\nu):|K(.)|\le C_{01}, \forall(x,\tau,y,\nu)\in D_0, \\ D_0=\{(x,\tau):0\le\tau\le x\le X\}\times[0,b]\times[0,b], \\ K(.)\ge 0; K(0,0,y,y)\ne 0, \forall y\in[0,b], \\ C^{1,1,1}(D_2)\ni\Phi_0(u_1,u_2,u_3), (D_2=R\times R\times R); |\Phi_0|\le\beta_1, |\Phi_{0u_i}|\le\beta_2, \\ (i=\overline{1,3}); C^{2,1}(\bar{D}_1)\ni\varphi(x,y); \sup\limits_{\bar{D}_1}[|\varphi(.)|,|\varphi_x|,|\varphi_{x^2}|,|\varphi_y|,|\varphi_{xy}|,|\varphi_{x^2y}|]\le\beta_3, \\ C^{1,1}(\bar{D}_1)\ni g(x,y); \sup\limits_{\bar{D}_1}[|g(.)|,|g_x(.)|,|g_y(.)|,|g_{xy}(.)|]\le\beta_4, \\ C(R_+)\ni f(t):0\le f(t)\le f_{01}<\infty:\int\limits_{R_+} f(t)dt\le f_{02}=const; f(T)\ne 0, \\ \|f(t)\|_C\left|f^{-1}(T)\right|\le\beta_5, (f_0=\max(f_{01},f_{02}), \beta_0=\max\beta_i, (i=\overline{1,5})). \end{cases} \tag{3.3.4}$$

Неизвестным является вектор-функция: $P=(u,\theta)$ с двумя компонентами, причем, так как из ОЗ (3.3.1)-(3.3.3) вырождается некорректное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД, то регуляризируемость этого ИУ рассматривается в $Z^2(D_1)$.

§3.3.1. Метод интегрилизации ОЗ (3.3.1)-(3.3.3)

Чтобы интегрилизовать исследуемую ОЗ, для искомой функции можем вести преобразование вида:

$$\begin{aligned} u=\varphi(x,y)\exp(-\lambda t)+\int_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int_0^x\int_0^y (x-\tau)[f(s)(H\theta)(\tau,\nu)+ \\ +Q(\tau,\nu,s)]d\nu d\tau ds\equiv(A[\theta,Q])(x,y,t). \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Тогда, с учетом $u_t(x,y,t)$ из (3.3.5) и

$$\int_0^x\int_0^y(x-\tau)(H\theta)(\tau,\nu)d\nu d\tau=(f(T))^{-1}[g-\int_0^x\int_0^y(x-\tau)Q(\tau,\nu,T)]d\nu d\tau]\equiv(B_1Q)(x,y), \tag{3.3.7}$$

следует:

$$u = \varphi(x,y)\exp(-\lambda t) + (\int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) f(s)ds)(B_1Q)(x,y) + \\ +\int_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int_0^x\int_0^y (x-\tau)Q(\tau,\nu,s)d\nu d\tau ds \equiv (A_1Q)(x,y,t). \qquad (3.3.8)$$

Поэтому, относительно функции *u (x, y, t),* учитывая частные производные по совокупности аргументов до требуемого порядка и подставляя в (3.3.1), имеем ИУ:

$$Q(x,y,t) = \Phi_0[(A_1Q)(x,y,t),(A_2Q)(x,y,t),(A_3Q)(x,y,t)] + \lambda_1(A_4Q)(x,y,t) \equiv (BQ)(x,y,t), \qquad (3.3.11)$$

где Q-новая искомая функция, причем все операторы: $(A_1Q)(x,y,t);(A_2Q)(x,y,t),$ $(A_3Q)(x,y,t);(A_4Q)(x,y,t)$ – интегральные операторы, а уравнение (3.3.11) является ИУВ-2 по переменным (x,y).

Лемма 3.3.1. При условии (3.3.4) относительно известных данных $\lambda,\lambda_1,\Phi_0,f,\varphi,g$ и

$$\begin{cases} L_B < 1, \\ B: S_r(Q_0) \to S_{r_0}(Q_0) = \{Q \in C(\bar{\Omega}) : |Q - Q_0| \le r, \forall (x,y,t) \in \bar{\Omega}\}, \end{cases} \qquad (3.3.12)$$

ИУ (3.3.11) однозначно разрешимо в $C(\bar{\Omega})$, и решение строится по правилу Пикара:

$$Q_{n+1} = BQ_n, (n=0,1,2,) \qquad (3.3.13)$$

с оценкой погрешности

$$\|Q_{n+1} - Q\|_C \le L_B^{n+1} r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad (3.3.14)$$

где Q_0- начальное приближение, а $0 < L_B -$ коэффициент Липщица оператора B. Тогда, с учетом (3.3.8) и существует единственная функция $u \in C^{2,1,1}(\bar{\Omega})$.

Примечание 3.3.1. Известно, что на основе теоремы К. Фридрихса при выполнении условий леммы 3.3.1, так как функция u однозначно определяется по правилу (3.3.8) и ограничено в $\tilde{C}^{2,1,1}(\bar{\Omega})$, то функция u оценивается и в линейном пространстве $\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega)$ (обратно нет), когда Q, с учетом леммы 3.3.1 допускает:

$$|Q| \le r_0, \forall (x,y,t) \in \bar{\Omega}. \qquad (3.3.18)$$

При этом: $\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega) = \{(x,y,t) \in \Omega : u, u_t, u_x \in C(\bar{\Omega}); u_y, u_{x^2}, u_{x^2y}, u_{tx^2y} \in L^2_{k_0(t)}(\Omega)\}$

с нормой:

$$\begin{cases} \|u\|_{\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega)} = \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_t\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_x\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_y\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} + \|u_{x^2}\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} + \|u_{x^2y}\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} + \\ + \|u_{tx^2y}\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} \le N_0, \\ \text{например}: \|u_y(t,x)\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} = (\int_\Omega k_0(s)|u_v(\tau,v,s)|^2 dv d\tau ds)^{\frac{1}{2}}, \\ 0 \le k_0(t) \le \tilde{k}_{01} = const : \int_0^{+\infty} k_0(s)ds \le \tilde{k}_{02} = const, (\tilde{k}_0 = max(\tilde{k}_{01}, \tilde{k}_{02})). \end{cases} \qquad (3.3.19)$$

В итоге, так как решением ОЗ является функция $P=(u,\theta)$, то регуляризируемость ОЗ рассматривается в $\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega),Z^2(D_1)]}(\Omega)$ с нормой:

$$\|P\|_{\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega);Z^2(D_1)]}}=\|u\|_{\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega)}+\|\theta\|_{Z^2(D_1)}. \qquad (3.3.20)$$

§3.3.2. Регуляризация некорректного ИУВ-1, которое вырождается из исследуемой ОЗ. В условиях леммы 3.3.1 из ИУ (3.3.7), с учетом дифференцирования по совокупности аргументов, следует некорректное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД, т.е.:

$$H\theta\equiv\int_0^x\int_0^y K(x,\tau,y,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau=F(x,y), \qquad (3.3.21)$$

где

$$\begin{cases} F(x,y)\equiv(f(T))^{-1}[g_{x^2y}(x,y)-Q(x,y,T)],\\ F(x,y)\in C^{0,1}(\bar{D}_1)\cap Lip(x|\ \ L_F),0<L_F=const;|F(x,y)|\le C_{02},\forall(x,y)\in\bar{D}_1,\\ F(0,y)\ne 0;F(x,0)=0;F(x,b)\ge\alpha>0,\forall x\in[0,X]. \end{cases} \qquad (3.3.22)$$

Чтобы доказать регуляризируемости ИУ (3.3.21) в обобщенном смысле, сперва проводим следующие математические преобразования, т.е., если допускаем

$$(H\theta)(x,b)\equiv\int_0^x\int_0^b K(x,\tau,b,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau=F(x,b) \qquad (3.3.23)$$

и условие (3.3.22), а также условие вида (2.2.4) (здесь, только будет в скялярном виде), то ИУВ-1 (3.3.21) эквивалентно преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \int_0^x h(\tau)\theta(\tau,y)d\tau=(\Psi\theta)(x,y)+F(x,y),\\ \Psi\theta\equiv\int_0^x h_0(\tau)\theta(\tau,y)(H\theta)(\tau,y_0)d\tau-(H\theta)(x,y). \end{cases} \qquad (3.3.25)$$

Далее, введем уравнение с малым параметром ε, вида

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(x,y)+(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y)=F_\varepsilon(x,y),\\ (\Phi\theta_\varepsilon)(x,y)\equiv\int_0^x h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau,y)d\tau-(\Psi\theta_\varepsilon)(x,y), \end{cases} \qquad (3.3.26)$$

с условием

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(0,y)=\dfrac{1}{\varepsilon}F(0,y),\\ C(\bar{D}_1)\ni F_\varepsilon(x,y):\|F_\varepsilon(x,y)-F(x,y)\|_C\le\Delta_0(\varepsilon),(F_\varepsilon(0,y)=F(0,y)). \end{cases} \qquad (3.3.27)$$

Тогда решение ИУ (3.3.26) представляя по правилу:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(x,y)=\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(x,y)+\upsilon(x,y)+\xi_\varepsilon(x,y),\\ \Pi_\varepsilon(0,y)=F(0,y),\upsilon(0,y)=0,\xi_\varepsilon(0,y)=0, \end{cases} \qquad (3.3.28)$$

получим систему ИУ относительно функций: $\Pi_\varepsilon(x,y),\upsilon(x,y),\xi_\varepsilon(x,y)$, т.е.:

$$\begin{cases} \Pi_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x h(\tau)\Pi_\varepsilon(\tau,y)\,d\tau + F(0,y), \\ \int\limits_0^x h(\tau)\upsilon(\tau,y)\,d\tau = (\Psi\upsilon)(x,y) + F_0(x,y), \\ \varepsilon\xi_\varepsilon + \int\limits_0^x h(\tau)\xi_\varepsilon(\tau,y)\,d\tau = (\Psi[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon])(x,y) - (\Psi\upsilon)(x,y) + F_\varepsilon(x,y) - \\ -F(x,y) - \varepsilon\upsilon(x,y). \end{cases} \quad (3.3.29)$$

В рамках указанных условий доказаны следующие утверждения:

Лемма 3.3.2. В условиях (3.3.4) и (3.3.22) из системы (3.3.29) следуют выводы:

а) функция $\Pi_\varepsilon(x,y)$, которое является решением первого ИУ системы (3.3.29) допускает неравенство:

$$\left|\Pi_\varepsilon(x,y)\right| \le C_0 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)); \quad (3.3.30)$$

б) $\upsilon(x,y)$ - решение второго ИУ системы (3.3.29) в $C(\bar{D}_1)$ и находится как предел параметризированного ИУ:

$$\delta\upsilon_\delta(x,y) + \int\limits_0^x h(\tau)\upsilon_\delta(\tau,y)\,d\tau = (\Psi\upsilon_\delta)(x,y) + F_0(x,y), \quad (3.3.31)$$

в смысле $C(\bar{D}_1)$;

в) функция $\xi_\varepsilon(x,y)$ определяется единственным образом из третьего ИУ системы (3.3.29) и сходится к нулю в смысле $C(\bar{D}_1)$, когда малый параметр: $\varepsilon \to 0$.

Теорема 3.3.1. Пусть имеют место условия лемм 3.3.1;3.3.2. Тогда, с учетом (3.3.28) следуют:

$$1)\ \begin{cases} \left\|\Pi_\varepsilon\right\|_{Z^2(D_1)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}}, (\gamma_1 = C_0\sqrt{b}\,2^{-\frac{7}{2}}[7^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \left\|\Omega_\varepsilon\right\|_{Z^2(D_1)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{cases} \quad (3.3.43)$$

$$2)\ \begin{cases} \|\theta_\varepsilon - \upsilon\|_{Z^2(D_1)} \le 2[\Delta_1(\varepsilon)\sqrt{Xb} + \gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{Z^2(D_1)} \le r_* = const, \end{cases} \quad (3.3.44)$$

$$3)\ \left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) - F(x,y)\right\|_{Z^2(D_1)} \le \tilde{M}(\varepsilon), (\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon) \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0). \quad (3.3.45)$$

§3.3.3. Общий вывод регуляризации ОЗ в пространстве $\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega), Z^2(D_1)]}(\Omega)$ с нормой (3.3.20). Из полученных результатов леммы 3.3.1 и теоремы 3.3.1, на основе (3.3.5) и (3.3.7), с учетом (3.3.25) и

$$\left|Q - Q_\varepsilon\right| \le \tilde{\Delta}(\varepsilon), \forall (x,y,t) \in \bar{\Omega}, \quad (3.3.50)$$

в результате следует:

$$\left\|u_\varepsilon - u\right\|_{C(\bar{\Omega})} \le \frac{1}{\lambda} f_0 X\sqrt{Xb}\tilde{M}(\varepsilon) + \frac{1}{2\lambda} f_0 X^2 b\tilde{\Delta}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0. \quad (3.3.51)$$

Аналогично доказывается: $\|u_{t\varepsilon}-u_t\|_{C(\bar\Omega)}, \|u_{x\varepsilon}-u_x\|_{C(\bar\Omega)}$.

А далее, имеем:

$$\begin{cases} \|u_{x^2y\varepsilon}-u_{x^2y}\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} \le 2\dfrac{1}{\lambda} f_0\{(\int\limits_{\Omega} k_0(s)| (\Phi\theta_\varepsilon)(\tau,v)-F(\tau,v) |^2 d\tau dv ds)^{\frac{1}{2}} + \\ +\tilde\Delta(\varepsilon)\sqrt{bX\tilde k_0}\} \le 2\dfrac{1}{\lambda} f_0\{\tilde M(\varepsilon)\sqrt{\tilde k_0}+\tilde\Delta(\varepsilon)\sqrt{bX\tilde k_0}\}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ \int\limits_0^\infty k_0(s)ds \le \tilde k_0 = const. \end{cases} \tag{3.3.53}$$

Кроме того, аналогичным образом доказываются выражения:

$u_y-u_{y\varepsilon}; u_{x^2}-u_{x^2\varepsilon}; u_{tyx^2}-u_{tyx^2\varepsilon}$ в $L^2_{k_0(t)}(\Omega)$.

В итоге, получим:

$$\|u_\varepsilon-u\|_{\tilde W^2_{k_0(t)}(\Omega)} \le \Delta_*(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{3.3.54}$$

Утверждение 3.3.1. В условиях леммы 3.3.1 и теоремы 3.3.1 и (3.3.54) ОЗ (3.3.1) -(3.3.3) регуляризируема в $\tilde G^2_{[\tilde W^2_{k_0(t)}(\Omega),Z^2(D_1)]}(\Omega)$ в обобщенном смысле.

Глава 4 состоит из двух параграфов, где изучаются коэффициентные ОЗ с нагруженными дифференциальными операторами параболического вида и типа КДФ в НО. Для изучения этих ОЗ воспользуемся ПФ и МР в определенных пространствах.

Отметим, что в области теории волн прямые задачи типа КДФ были изучены в работах Р.М. Миура (1968), А. Ньюэлла (1989), Л.Д. Фаддеева (1985, соавтор: Л.А. Тахтаджян), М.И. Иманалиева (1995, соавторы: П.С. Панков, Т.М. Иманалиев) и др.

В §4.1 как выше отметили, что на основе ПФ и МР исследуются ОЗ в пространствах Банаха и Гильберта, т.е. рассматриваем КОЗ:

$$U_t+\lambda_1 U(U_{x^2}(x_0,t))^2+\lambda_2 U = (\Upsilon\theta)(t)U(x,0), \tag{4.1.1}$$

$$U(x,0)=\varphi(x), \forall x\in R, \tag{4.1.2}$$

$$U|_{x=0}=g(t), \forall t\in[0,T], (x_0\in R), \tag{4.1.3}$$

где А) $\Upsilon\theta \equiv f(t)$ или

Б) $\begin{cases} \Upsilon\theta \equiv \int\limits_0^t h(s)\Phi(s,\theta(s))ds, \\ \Phi\in C^{0,1}(D_0=[0,T]\times R), \Phi_\theta \ge \alpha > 0, (\theta(0)=q_0, \theta\in C[0,T]), \end{cases}$

или В) $\Upsilon\theta \equiv \int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds, (\theta(0)=0, \theta\in L^2[0,T])$.

При этом, относительно известных функций допускаются условия:

а) $q_0, \lambda_1, 0<\lambda_2, \alpha = const, \varphi(x)\in C^2(R), g(t)\in C^1[0,T]$,

$$t\in[0,T], x\in R, \forall(x,t)\in\bar D, (D=R\times(0,T)),$$

б) $0 < h(t) \in L^1(0,T), \phi(t) = \int\limits_0^t h(s)ds$. Тогда, в рамках указанных условий требуется восстановить векторную функцию, в случаях (А,Б): $P_0 = (U(x,t), f(t)), (\text{или } P = (U(x,t), \theta(t)))$ в пространстве:

$$\begin{cases} W_C(\bar{D}) = \{(U, f): U \in C^{2,1}(\bar{D}), f(t) \in C[0,T]\} \\ \text{или } W_C(\bar{D}) = \{(U,\theta): U \in C^{2,1}(\bar{D}), \theta(t) \in C[0,T]\} \end{cases}$$

с нормой

$$\begin{cases} \|P_0\|_{W_C} = \|U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} + \|f\|_{C\ [0,T]} \\ \text{или} \|P\|_{W_C} = \|U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} + \|\theta\|_{C\ [0,T]}, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

а в случае (В): $P = (U(x,t), \theta(t))$ в $W^2(\bar{D})$ с нормой:

$$\begin{cases} \|P\|_{W^2(\bar{D})} = \|U\|_{C\ (\bar{D})} + \sum\limits_{i=1}^{2} \|U^{(i)}_{x^i}\|_{C(\bar{D})} + \|U_t\|_2 + \|\theta\|_{L^2[0,T]}, \\ \|U_t\|_2 = (\sup\limits_R \int\limits_0^T |U_s(x,s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}}; \|\theta\|_{L^2[0,T]} = (\int\limits_0^T |\theta(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

В пунктах §4.1.1 и §4.1.2 данной главы, на основе ПФ и МР доказаны регуляризируемости ОЗ (4.1.1) -(4.1.3) с условиями (А,Б) в пространстве Банаха, приведен пример. Далее, в пункте §4.1.3, регуляризируемость ОЗ (4.1.1) -(4.1.3) с условием (В) доказана в пространстве Гильберта, здесь вырождается линейное ИУВ-1. В обоих случаях, использован классический вариант МР М.М. Лаврентьева (1977).

В параграфе 4.2 исследуется КОЗ с нагруженным оператором типа Кортевега Де Фриза в неограниченной области, т.е.:

$$U_t + \lambda U(U_x(t,x_0))^2 + U_{x^3} = \varphi(x)(J\theta)(t), \forall (t,x) \in \bar{D}, (D = (0,T) \times R), \tag{4.2.1}$$

$$U(0,x) = \varphi(x), \forall x \in R, \tag{4.2.2}$$

$$(U_t + U_{x^3})\big|_{x=0} = g(t), \forall t \in [0,T], \tag{4.2.3}$$

$$J\theta \equiv \sum_{i=0}^{1} (\lambda_i \int\limits_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds)^{i+1}, (\lambda_0 = 1), \tag{*}$$

и $\lambda, \lambda_1, \varphi(x), g(t), K_0(t,s) -$ известные функции удовлетворяют условия:

а) $\lambda < 1, 0 < \lambda_1; \lambda, \lambda_1 = const; \varphi(x) \in C^3(R); g(t) \in C^1[0,T]$,

б) $K_0(t,s) \in C\ (D_0) \cap Lip(t\big|L_{K_0}), (D_0 = \{(t,s): 0 \le s \le t \le T\}), K_0(t,s) \ge 0,$

$$K_0(t,0) \equiv q = const; |K_0(t,s)| \le C_{01} = const.$$

При этом, так как неизвестным является вектор-функция: $P = (U,\theta)$ из пространства $\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D); Z^1(0,T)]}(D) = \{(U,\theta): U \in \tilde{W}^1(D), \theta \in Z^1(0,T)\}$ с нормой:

$$\begin{cases} \|P\|_{\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D);Z^1(0,T)]}(D)} = \|U\|_{\tilde{W}^1(D)} + \|\theta\|_{Z^1(0,T)}, \\ \|U\|_{\tilde{W}^1(D)} = \|U\|_{C^{0,3}(\bar{D})} + \|U_t\|_1; \|U_t\|_1 = \sup\limits_R \int\limits_0^T |U_t(t,x)| dt. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Тогда регуляризируемость ОЗ доказывается в указанном пространстве в обобщенном смысле, так как из исследуемой ОЗ вырождается некорректное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД, т.е.:

$$J\theta \equiv \int_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds + \lambda_1(\int_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds)^2 = F(t)$$

с условием: в) $F(t) \in C\ [0,T] \cap Lip(t|L_F); F(t) > 0, (F(0) \neq 0); |F(t)| \leq C_{02}$.

§4.2.1. **Интегрилизация ОЗ (4.2.1) -(4.2.3).** Для этого, воспользуясь ПФ:

$$\begin{cases} U(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega, \\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\hat{\varphi}(\omega)d\omega, \end{cases} \tag{4.2.5}$$

при этом, учитывая частные производные функции U из (4.2.1) следует:

$$\begin{cases} z_t(t,0,\omega) - \lambda z(t,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \omega z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2 - i\omega^3 z(t,0,\omega) = (J\theta)(t), \\ z|_{t=0} = 1, \end{cases} \tag{4.2.7}$$

где z-новая искомая функция. Тогда, проведя некоторые математические преобразования, получим соотношения:

$$d = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega)d\omega \neq 0, \tag{4.2.9}$$

$$(J\theta)(t) = d^{-1}\{g(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda z(t,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \omega z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2 \hat{\varphi}(\omega)d\omega\} \equiv (B_0 z)(t), \tag{4.2.10}$$

$$z_t(t,0,\omega) = \lambda z(t,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \omega z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2 + i\omega^3 z(t,0,\omega) + (B_0 z)(t) \tag{4.2.11}$$

или

$$z(t,0,\omega) = e^{i\omega^3 t} + \int_0^t e^{i\omega^3(t-s)}\{\lambda z(s,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \omega z(s,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2 + (B_0 z)(s)\}ds \equiv (Bz)(t,0,\omega), \tag{4.2.12}$$

здесь (4.2.12) является ИУВ-2, то можем иметь:

Лемма 4.2.1. При условиях:

$$\begin{cases} L_B < 1, \\ B: S_r(z_0) \to S_r(z_0) = \{z : |z - z_0| \leq r = const, \forall(t,0,\omega) \in \bar{D}\} \end{cases} \tag{4.2.13}$$

ИУ (4.2.12) однозначно разрешимо в $C(\bar{D})$, причем решение строится МП: $z_{n+1} = Bz_n, (n = 0,1,...)$ с оценкой

$$\begin{cases} \|z_{n+1} - z\| \leq L_B^{n+1} r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ |z| \leq r_1, \forall(t,0,\omega) \in \bar{D}, \end{cases} \tag{4.2.14}$$

где z_0 - начальное приближение, при этом функция z имеет производную по t, которая удовлетворяет ДУ (4.2.11). Тогда, на основе (4.2.5) единственным образом определяется и функция U в $\tilde{W}^1(D)$ с оценкой:

$$\|U\|_{\tilde{W}^1(D)} \le (|d| + \sum_{i=0}^{2} d_i) r_1 + N_0 = N_1. \qquad (4.2.15)$$

§4.2.2. Регуляризация ИУВ-1, которое вырождается на основе (4.2.10)

Так как имеют место условия леммы 4.2.1, то с учетом (*) и (4.2.10), получим некорректное ИУВ-1:

$$J\theta \equiv \int_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds + \lambda_1(\int_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds)^2 = F(t), \qquad (4.2.20)$$

где имеют место условия (б,в) и:

$$C[0,T] \ni F(t) \equiv d^{-1}\{g(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\Psi(t,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \omega\Psi(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2\hat{\varphi}(\omega)d\omega)\}. \qquad (4.2.21)$$

Поэтому, регуляризация ИУ (4.2.20) в $Z^1(0,T)$, доказывается на основе модификации метода сингулярных возмущений параграфа 2.1, когда допустимы условия вида (2.1.3).

Для этого, преобразуя (4.2.20) к виду

$$\begin{cases} \int_0^t h(s)\theta(s)ds = (H\theta)(t) + F(t), \\ (H\theta)(t) \equiv \int_0^t h_0(s)\theta(s)(J\theta)(s)ds - (J\theta)(t) \overset{(4.2.20)}{=} \int_0^t h_0(s)\theta(s)\{\int_0^s K_0(s,\bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s} + \\ +\lambda_1(\int_0^s K_0(s,\bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s})^2\}ds - \int_0^t K_0(t,\bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s} - \lambda_1(\int_0^t K_0(t,\bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s})^2, \end{cases} \qquad (4.2.23)$$

введем параметризированную ИУ:

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(t) + (\Phi\theta_\varepsilon)(t) = F_\varepsilon(t), \\ (\Phi\theta_\varepsilon)(t) \equiv \int_0^t h(s)\theta_\varepsilon(s)ds - (H\theta_\varepsilon)(t). \end{cases} \qquad (4.2.24)$$

Тогда решения представляя по правилу:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon = \upsilon(t) + \xi_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(t), (\Pi_\varepsilon(0) = F(0), \upsilon(0) = 0, \xi_\varepsilon(0) = 0), \\ F_\varepsilon(0) = F(0); F_\varepsilon(t) : |F_\varepsilon(t) - F(t)| \le \Delta_0(\varepsilon), \forall t \in [0,T], \end{cases} \qquad (4.2.25)$$

получим систему:

$$\begin{cases} \varepsilon\Pi_\varepsilon(t) + \int_0^t h(s)\Pi_\varepsilon(s)ds = F(0), \\ \int_0^t h(s)\upsilon(s)ds = (H\upsilon)(t) + F_0(t), (F_0(t) \equiv F(t) - F(0)), \\ \varepsilon\xi_\varepsilon(t) + \int_0^t h(s)\xi_\varepsilon(s)ds = (H[\upsilon + \xi_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(t) - (H\upsilon)(t) + F_\varepsilon(t) - F(t) - \varepsilon\upsilon(t). \end{cases} \qquad (4.2.26)$$

Далее, доказаны утверждения:

Лемма 4.2.2. При выполнении условий (б,в, (4.2.21)) из системы (4.2.26), следуют:

1) $|\Pi_\varepsilon(t)| \le C_0 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t)),$ (4.2.27)

2) функция $\upsilon(t) \in C[0,T]$ определяется как предел параметризированного ИУ:

$$\delta\upsilon_\delta + \int_0^t h(s)\upsilon_\delta(s)ds = (H\upsilon_\delta)(t) + F_0(t) \tag{4.2.28}$$

в $C[0,T]$, где $(0,1) \ni \delta$ – малый параметр,

3) остаточная функция $\xi_\varepsilon(t)$ определяется однозначно из третьего ИУ системы (4.2.26), причем сходится равномерно к нулю в $C[0,T]$, когда $\varepsilon \to 0$.

Теорема 4.2.1. Если выполняются условия леммы 4.2.2, то на основе (4.2.25) следуют:

1) $$\begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^1(0,T)} \le \gamma_1\varepsilon^2, (\gamma_1 = 6C_0M_1), \\ \|\Omega_\varepsilon\|_{Z^1(0,T)} \le \gamma_1\varepsilon, \end{cases} \tag{4.2.46}$$

2) $$\begin{cases} \|\theta_\varepsilon - \upsilon\|_{Z^1(0,T)} \le \mathrm{E}_1(\varepsilon)T + \gamma_1\varepsilon = \tilde{M}_0(\varepsilon), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{Z^1(0,T)} \le r_* = const, \end{cases} \tag{4.2.47}$$

3) $$\left\|\left(\Phi\theta_\varepsilon\right)(t) - F(t)\right\|_{Z^1(0,T)} \le \tilde{M}(\varepsilon), \left(\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\right). \tag{4.2.48}$$

§4.2.3. Общий вывод регуляризации ОЗ в пространстве $\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D),Z^1(0,T)]}(D)$ с нормой (4.2.4).

Из полученных результатов леммы 4.2.1 и теоремы 4.2.1, на основе (4.2.5), (4.2.7) и функции $z, z_t(t,0,\omega)$, при этом учитывая (4.2.23), в результате следуют следующие оценки

$$\begin{cases} \left|z_\varepsilon - z\right| \le \Delta_{01}(\varepsilon), \forall(t,0,\omega) \in \bar{D}, \\ \left|z\right|, \left|z_\varepsilon\right| \le r_1, \forall(t,0,\omega) \in \bar{D};\ \Delta_{01}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \end{cases} \tag{4.2.54}$$

$$\left\|U_{t\varepsilon} - U_t\right\|_1 \le d_*\Delta_{01}(\varepsilon)T + \tilde{M}(\varepsilon) = \Upsilon_0(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \tag{4.2.55}$$

$$\left\|U_\varepsilon - U\right\|_{C(\bar{D})} \le \Upsilon_0(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{4.2.56}$$

Аналогично можем допускать и оценки:

$$\begin{cases} \left\|U_{x\varepsilon} - U_x\right\|_{C(\bar{D})} \le \Upsilon_2(\varepsilon), \\ \left\|U_{x^2\varepsilon} - U_{x^2}\right\|_{C(\bar{D})} \le \Upsilon_3(\varepsilon); \left\|U_{x^3\varepsilon} - U_{x^3}\right\|_{C(\bar{D})} \le \Upsilon_4(\varepsilon). \end{cases} \tag{4.2.57}$$

Следовательно, можем иметь:

$$\left\|U_\varepsilon - U\right\|_{\tilde{W}^1(D)} \le \sum_{i=0}^{4} \Upsilon_i(\varepsilon) = \Upsilon_*(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{4.2.58}$$

В итоге, учитывая вышеуказанные выводы получим:

$$\left\|V_\varepsilon\right\|_{\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D);Z^1(0,T)]}(D)} \le \Upsilon_*(\varepsilon) + \tilde{M}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{4.2.59}$$

Утверждение 4.2.1. В условиях леммы 4.2.1 и теоремы 4.2.1, и (4.2.59) ОЗ (4.2.1) - (4.2.3) регуляризируема в обобщенном смысле в $\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D);Z^1(0,T)]}(D)$.

Выводы

В настоящей работе исследованы некорректные нелинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода (ИУВ-1) с различными пределами интегрирования, а также обратные задачи (ОЗ) с гиперболическими операторами и с нагруженными операторами параболического характера, и типа Кортевега Де Фриза в неограниченной области, вырождающиеся в нелинейные ИУВ-1 с решениями, связанные с функцией Дирака. При этом изложены методы регуляризации в обобщенном смысле изучаемых некорректных ИУВ-1 и ОЗ в введенных пространствах.

Все научные результаты, излагаемые в диссертационной работе строго математически обоснованы в рассматриваемых пространствах и дополняют теорию регуляризации не только ИУВ-1 в обобщенном смысле, но и теорию многомерных ОЗ, где вырождаются многомерные ИУВ-1 с решениями в классе сингулярных обобщенных функций. А также результаты работы могут быть использованы магистрантами, аспирантами и специалистами в этой области.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Алыбаев А.М. Регуляризация обратной задачи в неограниченной области, вырождающая некорректное уравнение Вольтерра первого рода с неклассическим пределом интегрирования [Текст] /А.М. Алыбаев. //Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2023, №3(111).-С.366-385.
2. Алыбаев А.М. Решение многомерной обратной задачи для нелинейного дифференциального уравнения в неограниченной области [Текст] /А.М. Алыбаев, М.Т. Омуров, Бузурман кызы Ж., Г.Ж. Белгожоева. // Актуальные научные исслед. в современном мире. -Переяслав-Хмельницкий, 2020. –Вып. 2(58),ч.2.– С. 107-116.
3. Алыбаев А.М. Регуляризация обратных задач в неограниченной области посредством преобразования Фурье [Текст] /А.М. Алыбаев, Д.Н. Шабданов. //Актуальные научные исследования в современном мире. - Переяслав-Хмельницкий, 2021, №2-8(70).-С.9-13.
4. Алыбаев А.М. Регуляризация некорректного интегрального уравнения Вольтерра первого рода [Текст] /А.М. Алыбаев. // Бюллетень науки и практики. – Нижневартовск, 2022. -Т.8, №7. –С.29-40.
5. Алыбаев А.М. Регуляризация обратной задачи с оператором гиперболического типа, где вырождается некорректное уравнение Вольтерра первого рода [Текст] /А.М. Алыбаев. //Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. –М.: Акад. Естествознания, 2022. №7. –С.57-71.
6. Алыбаев А.М. Методы регуляризации обратных задач, где вырождаются некорректные интегральные уравнения Вольтерра первого рода [Текст] /Т.Д. Омуров, А.М. Алыбаев. /КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2023. - 196 с.
7. Алыбаев А.М. Регуляризация обратной задачи типа Аллера, где вырождается нелинейное уравнения Вольтерра первого рода [Текст] /Т.Д. Омуров, А.М. Алыбаев. //Изв. НАН КР. –Бишкек: Илим, 2023, №3.-С.7-28.

8. Алыбаев А.М. Решение смешанной системы уравнений с условиями типа Гурса с обратным временем [Текст] /Т.Д. Омуров, А.М. Алыбаев. // Вестник КГНУ: ЕТН- Бишкек, 2005. – Серия 3. -Вып.3. - С.96-102.
9. Алыбаев А.М. Обратно-нелокальная задача в неограниченной области, где вырождается неклассическое интегральное уравнение Вольтерра третьего рода [Текст] /Т.Д. Омуров, А.М. Алыбаев, К.Р. Джумагулов. //Москва. Наука, техника и образование, №1(31), 2017. –С.10-15.
10. Алыбаев А.М. Двухскоростные задачи с обратным временем для уравнений переноса типа Каца [Текст] /Т.Д.Омуров, А.М. Алыбаев, Ж. Саркелова. //Журнал – Переяслав-Хмельницкий, 2019. – Вып.11(55),ч.8. – С.31-39.
11. Alybaev, A.M. Regularization method in conditionally well-posed inverse problems degenerating in the first kind volterra equations [Текст] /A.M. Alybaev. //Advances in Differetial Equations and Control Processes, Vol. 24, (2): 187-198 (2021).
12. Alybaev, A.M. Solution of multidimensional inverse problem for third-order differentional equation [Текст] / T.D. Omurov, A.M. Alybaev, M.T. Omurov. //Advances in Differential Equations and Control ProcessesVol. 23 (2): 125-137 (2020).
13. Alybaev, A.M. Regularization of a system of the first kind Volterra incorrect two-dimensional equations [Текст] / T.D. Omurov, A.M. Alybaev. // Advances in Differential Equations and Control ProcessesVol. 27: 149-162 (2022).
14. Alybaev, A.M. Solving of multidimensional inverse problem for differential equation of the third order in unbounded domain [Текст] / T.D. Omurov, A.M. Alybaev, M.T. Omurov. // VI Congress of the Turkic World Mathematical Society, Astana-Kazakhstan, October 2-5, 2017, 108.
15. Alybaev, A.M. Regularization of conditionally well-posed inverse problems degenerating in the first kind Volterra equations [Текст] / T.D. Omurov, A.M. Alybaev. // KMS: Theses of International Scientific Conference “Problems of Modern Mathematics and ITS Applications”Kyrgyzstan, Bishkek- Issyk-Kul, 16-19 June, 2021, pp 94.
16. Alybaev, A.M. Regularization in the generalized sense of the looded inverse problem of Korteweg De Vries type degenerating to the incorret Volterra equation of the first kind [Текст] / A.M. Alybaev. // VII. International TWMS Congress- 2023, September 20-23, Turkestan (Kazakhstan). - 1 pp.

Алыбаев Анарбек Масалбековичтин "Вольтеррдин биринчи түрдөгү туура эмес коюлган интегралдык теңдемелери пайда болуучу, тескери маселелерди регуляризациялоо" деген темадагы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер адистиги боюнча физика - математикалык илимдердин доктору окумуштуу даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: өзгөчө маанидеги регуляризациялоо, Вольтеррдин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеси, дифференциалдык теңдеме, тескери маселе, туура эмес коюлган маселе, сингулярдуу өзгөчө функция.

Изилдөөнүн объектиси: гиперболалык, параболалык типтеги тескери маселелер жана Кортевага-Де Фриза тендемелери.

Изилдөөнүн предмети: диссертациялык иште интегралдоо пределдери ар-түрдүү болгон Вольтеррдин биринчи түрдөгү туура эмес коюлган сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин жана чыгарылыштары терс эмес болгон Дирактын функциясы менен байланышкан Вольтеррдин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелери пайда болуучу тескери маселелердин чыгарылыштарынын жалгыздыгынын жана регуляризацияланышынын суроолору изилденген.

Изилдөөнүн максаты: көрсөтүлгөн суроолор Вольтеррдин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелерине карата эквиваленттүүлүктөрү эсепке алынып киргизилген Вольтеррдин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин параметрзирленген интегралдык теңдемелеринин негизинде далилденген. Мында параметрленген интегралдык теңдеменин чыгарылышы кичине параметрге салыштырмалуу атайын сингулярдуу функцияны камтыган асимптотикалык мүнөздөгү көрүнүш түрүндө изделет.

Изилдөөнүн ыкмалары: интегралдык өзгөртүүлөр ыкмасы, өзгөчөлөнгөн маанидеги регуляризациялоо ыкмасы, функционалдык жана математикалык анализдин элементтери.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы: изилдөөлөрдүн сунушталган алгоритмдери резольвенталар теориясынын негизинде операторлордун жарым-жартылай кайрылууларынын мүмкүнчүлүктөрүн гана жаратпастан, алар интегралдык теңдемелердеги кичине параметрге салыштырмалуу сингулярдуулуктарды жымсалдоочу бааларды аныктоону кепилдешет. Булар эмгектеги сингулярдуу толкундоолор ыкмасын эсепке алган мейкиндиктерде киргизилген кичине параметрлүү трансформацияланган интегралдык теңдемелерден келип чыгышат. Демек, чындыгында сунушталган регуляризациялоо ыкмасынын негизинде, изилдөөлөрдүн киргизилген мейкиндиктеринде өзгөчө мааниде Вольтеррдин биринчи түрдөгү туура эмес коюлган интегралдык теңдемелеринин жана тескери маселелердин регуляризацияланышын далилдей алабыз.

Изилдөөнүн практикалык мааниси: бул эмгектин натыйжалары өзгөчө мааниде алынган жалаң гана Вольтеррдин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин регуляризациялоо теориясын эле эмес, алар чыгарылыштары сингулярдуу өзгөчө функциялардын классындагы көп өлчөмдүү Вольтеррдин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелерин пайда кылуучу көп өлчөмдүү тескери маселелердин теориясын дагы толукташат.

РЕЗЮМЕ

диссертации Алыбаева Анарбека Масалбековича на тему «Регуляризация обратных задач, где вырождаются некорректные интегральные уравнения Вольтерра первого рода», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02-дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: регуляризация в обобщенном смысле, интегральное уравнение Вольтерра первого рода, дифференциальное уравнение, обратная задача, некорректная задача, сингулярная обобщенная функция.

Объект исследования: обратные задачи гиперболического, параболического типов и уравнение Кортевега-Де Фриза.

Предмет исследования: в диссертационной работе исследованы вопросы единственности решения и регуляризируемости в обобщенном смысле некорректных нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода (ИУВ-1) с различными пределами интегрирования, и обратные задачи (ОЗ), вырождающиеся в ИУВ-1 с неотрицательными решениями, связанные с функцией Дирака.

Методы исследования: метод интегральных преобразований, метод регуляризации в обобщённом смысле, элементы функционального и математического анализа.

Полученные результаты и новизна: доказаны на основе параметризированных ИУ, введенные с учетом эквивалентных ИУВ-1, которые следуют из заданных ИУВ-1. При этом решение параметризированного ИУ ищется в виде представления асимптотического характера, где содержится специальная сингулярная функция относительно малого параметра.

Отметим, что предложенные алгоритмы исследований создают не только возможности частичного обращения операторов на основе теории резольвенты, но и гарантируют провести оценки, сглаживающие сингулярности относительно малого параметра в ИУ, которые следуют из трансформированных ИУ с малым параметром, с учетом метода сингулярных возмущений в тех пространствах, которые введены в работе. Это значит, что действительно на основе предложенного метода регуляризации можем доказать регуляризируемости исследуемых некорректных ИУВ-1 и ОЗ в введенных пространствах в обобщенном смысле.

Практическое значение исследования: полученные результаты работы дополняют теорию регулязиции не только ИУВ-1 в обобщенном смысле, но и теорию многомерных ОЗ, где вырождаются многомерные ИУВ-1 с решениями в классе СОФ.

SUMMARY

Dissertation of Alybaev Anarbek Masalbekovich on the topic "Regularization of inverse problems where non-correct Volterra integral equations of the first kind degenerate" submitted for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences on specialty 01.01.02- Differential equations, dynamical systems and optimal control.

Keywords: regularization in the generalized sense, Volterra integral equation of the first kind, differential equation, inverse problem, incorrect problem, singular generalized function.

Object of research: inverse problems of hyperbolical, parabolical types and Corteveg-DE Vries equations.

Subject of research: the doctoral thesis researches the questions of uniqueness of the solution and regularizability in the generalized sense of incorrect nonlinear Volterra integral equations of the first kind (VIE-1) with different limits of integration, and inverse problems (IPs) degenerating to VIE-1 with solutions in the class of singular generalized functions (SGFs).

The Purpose of the research: method of integral reorganization, method of regularization in general sense, elements of functional and math analysis.

The obtained results and novelty: the above questions proved on the basis of parametrized integral equation (IEs), introduced by considering equivalent VIE-1s that follow from the given VIE-1s. In result, the solution of the parameterized IEs is sought in the form of presentation of asymptotic character, which contains a special singular function with respect to a small parameter.

Notably, the proposed research algorithms create not only possibilities of partial operator reversal based on the resolvent theory, but also guarantee to carry out evaluations smoothing singularities with respect to a small parameter in the IEs which follow from transformed IEs with a small parameter, taking into account the method of singular perturbations in those spaces which are introduced in the research. Thus, on the basis of the proposed regularization method the regularizability of the studied non-correct VIE-1s and IPs in the introduced spaces can be proved in a generalized sense.

Practical significance of the research: the obtained results complement the theory of regularizability not only of VIE-1 in the generalized sense, but also the theory of multidimensional IPs, where multidimensional VIE-1s with solutions in the SGFs class degenerate.