Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясы
Математика институту

Ж. Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук университети

Д 01.22.647 Диссертациялык кеңеши

Кол жазма укугунда

УДК 517.968.72

Комарцова Елена Алексеевна

Жогорку тартиптеги сызыктуу Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын турумдуулугунун жетиштүү шарттары

01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу

Физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациянын

АВТОРЕФЕРАТЫ

Бишкек – 2023

Диссертациялык иш Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институтунун интегро-дифференциалдык теңдемелер теориясы лабораториясында аткарылган.

Илимий жетекчи: Искандаров Самандар, физика-математик илимдердин доктору, профессор, Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясыным математика институтунун интегро-дифференциалдык теңдемелер теориясы лабораториясынын башчысы.

Расмий оппоненттер: Дауылбаев Муратхан Кудайбергенович, физика-математикалык илимдердин доктору, профессор, аль-Фараби атындагы Казак Улуттук университетинин механика математикалык факультетинин дифференциалдык теңдемелер дана башкаруу теориясы кафедрасынын профессору.

Бараталиев Керим Бараталиевич, физика-математикалык илимдердин доктору, доцент, Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин математика жана информатика факультетинин математикалык анализ кафедрасынын профессору.

Жетектөөчү мекеме: Ош мамлекеттик университеттин математика жана информациялык технологиялар факультетинин иформациялык системалар жана программалоо кафедрасы, Кыргызстан, Ош шаары, Ленин көчөсү, 331.

Диссертацияны коргоо Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институтунун жана Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин алдындагы физика-математика илимдеринин доктору (кандидаты) илимий даражасына талаптануучулардын диссертациясын коргоо боюнча түзүлгөн Д 01.22.647 диссертациялык кеңешинин 2024-ж. 10-январында саат 14:00дө, Кыргыз Республикасы, 720071, Бишкек ш., Чүй проспекти 265-А, 374-дарскана дарегиндеги отурумунда болот.

Коргоонун идентификатору: https://vc1.vak.kg/b/012-ltf-b7j-lgy

Диссертация менен Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын (720071, Бишкек ш., Чуй пр., 265-а) жана Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин (720033, Бишкек ш., Фрунзе к., 547) китепканаларынан, ошондой эле www.vak.kg сайтынан таанышууга болот.

Автореферат 2023-жылдын 9 декабрында таркатылды.

Диссертациялык кеңештин окумуштуу катчысы,
физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент Шаршембиева Ф. К.

ИЗИЛДӨӨНҮН ЖАЛПЫ МҮНӨЗДӨМӨСҮ

Диссертациянын темасынын актуалдуулугу. С. Искандаровдун монографиясында белгиленгендей [4, 5б.] XIX кылымдын аягы - XX кылымдын башында италиялык улуу математик В. Вольтерранын эмгектеринде жогорку чеги өзгөрүлмө бар интегралдарды камтыган интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын жалпы жана сапаттык касиеттери аныкталган эмгектер пайда болгон. Натыйжада мындай теңдемелер В. Вольтерранын эмгегин баалоо катары «Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер» деген аталышка ээ болгон. Белгилей кетсек, В. Вольтерранын көптөгөн изилдөөлөрү биологиялык жана механикалык процесстерди изилдөөгө байланыштуу, алардын тарыхын (кийинки кубулуштарды) эске алуу менен жүргүзүлгөн. Алар анын монографияларында чагылдырылган [5, 60] жана ВИДТнин (Вольтерра интегро-дифференциалдык теңдемелердин) азыркы жалпы жана сапаттык теориясынын калыптанышына жагымдуу таасирин тийгизген.

Практикалык жана теориялык муктаждыктарга байланыштуу ата мекендик жана чет элдик окумуштуулардын күч-аракети менен ВИДТнин азыркы жалпы жана сапаттык теориясы түзүлдү, бул теорияны иштеп чыгууда төмөнкү окумуштуулар олуттуу салым кошушту: В. Вольтерра (1881-1940-ж.), Я. В. Быков (1951-1957-ж.), М. И. Иманалиев (1956-2015-ж.), Ю. А. Ведь (1960-2006-ж.), А. И. Боташев (1962-1998-ж.), Л. Е. Кривошеин (1962-ж.), Е. А. Барбашин (1957-1967-ж.), Н. В. Азбелев (1979-2001-ж.), А. Д. Мышкис (1949-1977, 2003-ж.), Н. Н. Красовский (1956-1959-ж.), А. М. Самойленко (1973-1976-ж.), В. Р. Винокуров (1967-ж.), Р. Беллман (1967-ж.), К. Р. Кук (1967-ж.), J. J. Levin (1963-1968-ж.), J. A. Nohel (1964-1971-ж.), C. Corduneanu (1963-1973-ж.), К. А. Касымов (1968-2004-ж.), К. Алымкулов (1972-1992), К. Какишов (1973-1991-ж.), А. Саадабаев (1982-2009-ж.), М. К. Дауылбаев (1979-2022-ж.), П. С. Панков (1971-1992-ж.), Г. Ражапов (1965-1973-ж.), З. Пахыров (1971-2017-ж.), С. Искандаров (1978-2023-ж.), А. Асанов (1977-2023-ж.), А. Б. Байзаков (2003-2023-ж.), А. Т. Халилов (1994-2023-ж.), З. А. Жапарова (2009-2014, 2022-ж.), В. Лакшмикантам жана С. Лила (1969-2007-ж.), А. А. Мартынюк (1985-1991-ж.), В. П. Максимов (1982-1991-ж.), Л. Ф. Рахматуллина (1978-1991-ж.), М. Е. Драхлин (1986-ж.), Л. М. Березанский (1982-2012-ж.), А. И. Домошницкий (2012-ж.), П. М. Симонов (1991-2001-ж.), В. С. Сергеев (1986-2000-ж.), T. A. Burton (1978-2005-ж.), R. P. Agarwal (1982 – 2012-ж.), G. Gripenberg, S.-O. Londen жана O. Staffans (1979-1990-ж.), C. Tunç (2016-2022-ж.), F. Alahmadi (2018-ж.) ж. б. Алардын көптөгөн эмгектеринде жаңы методдор иштелип чыгып, илимий изилдөөлөрдүн жаңы багыттары түзүлгөн.

Белгилүү болгондой, тарыхка чейинки кээ бир процесстердин туруктуулугун изилдөө ВИДТнын чыгарылыштарынын туруктуулугунун теориясын өркүндөтүү зарылчылыгына алып келет. Мындай теорияны өркүндөтүү үчүн ар кандай авторлордун күчтүү изилдөө методдору иштелип чыккан, алар С. Искандаровдун монографиясынын кириш сөзүндө жана мазмунунда чагылдырылган [С. Искандаров, 2002]. Акыркы мезгилде С. Искандаровдун жана анын шакирттеринин эмгектеринде дагы башка ыкмалар пайда болду, мисалы: туруктуулуктун спецификалык белгилерин жана биринчи, экинчи жана алтынчы тартиптерге чейинки сызыктуу бир тектүү ВИДТнин АТ (асимптоталык туруктуулук) чыгарылыштарын алуу ыкмасы; биринчи түрдөгү интегралдык барабарсыздык жөнүндө лемманы колдонуу менен экинчи, үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын жүрүм-турумуна Вольтерра тибиндеги интегралдык козголуулардын таасирин изилдөө ыкмасы; кээ бир жардамчы параметрлерди жана салмактык функцияларды камтыган стандарттуу эмес алмаштыруулардын жардамы менен жогорку тартиптеги ВИДТнин чыгарылыштарынын асимптоталык касиеттерин изилдөө системасына стандарттуу эмес методдору; Люстерник-Соболевдин леммасын колдонуу.

Бул ыкмалар менен алынган натыйжалардын талдоосу көрсөткөндөй, аларды андан ары өркүндөтүү жана башка белгилүү ыкмалар менен айкалыштырып колдонуу жарым окто экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи тартиптеги ВИДТнин жаңы класстарындагы чыгарылыштарынын асимптоталык касиеттерин изилдөөгө мүмкүндүк берет, бул болсо ушул диссертациянын темасынын актуалдуулугун тастыктайт.

Диссертациянын темасынын илимий долбоорлор жана негизги илимий-изилдөө иштер менен байланышы. Эмгек Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институтунун илим-изилдөө долбоорлорунун алкагында жүргүзүлдү: «Динамикалык системалардын туруктуулугунун, тескери маселелердин, экономикалык жана геофизикалык процесстердин чечилишинин теориясында компьютердик моделдөө, асимптоталык, топологиялык жана аналитикалык методдорду өркүндөтүү» (2015-2017), мамлекеттик каттоо номери 0007125; «Бирдиктүү топологиялык жана кинематикалык мейкиндиктердин, эволюциялык системалардын, оптималдаштырылган экономикалык маселелердин, математикалык моделдөөнүн теориясында асимптоталык, топологиялык жана аналитикалык методдорду өркүндөтүү» (2018-2019), мамлекеттик каттоо номери 0007664 жана ушул долбоорлор боюнча тиешелүү отчеттордо камтылган.

Изилдөөнүн максаттары жана милдеттери. Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институтунда иштелип чыккан сапаттык методдорду өркүндөтүү жана колдонуу менен Вольтерра тибиндеги интегралдык бузулуулардын жарым октогу экинчи, үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги тиешелүү ДТнин чыгарылыштарынын жүрүм-турумуна тийгизген таасирин изилдөө; жарым октогу төртүнчү жана бешинчи тартиптеги сызыктуу ВИДТнин чыгарылыштарынын туруктуулугунун; белгисиз функциянын үчүнчү туундусунун коэффициенти оң эмес болгондо төртүнчү тартиптеги сызыктуу бир тектүү ВИДТнин чыгарылыштарынын асимптоталык туруктуулугунун; жарым октогу бешинчи тартиптеги сызыктуу ВИДТнин чыгарылыштарынын асимптоталык туруктуулугунун жетиштүү шарттарын түзүү.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы. 3-главада жарым октогу чектүүлүктүн жана экинчи жана үчүнчү тартиптеги сызыктуу бир тектүү ВИДТнын бардык чыгарылыштарынын аргументтеринин чексиз өсүшү менен нөлгө умтулуунун жетиштүү шарттары белгиленген, эгерде тиешелүү сызыктуу бир тектүү ДТларда изилденип жаткан касиеттерге ээ эмес чыгарылыштар болушу мүмкүн. Төртүнчү тартиптеги тиешелүү сызыктуу бир тектүү жана бир тектүү эмес ДТлар жарым окто чектелбеген чечимдерге ээ болушу мүмкүн болгон учурда төртүнчү тартиптеги ВИДТнин бардык чыгарылыштарынын жарым огунда чектелүүлүктүн жетиштүү шарттары белгиленген. Ошентип, Вольтерра тибиндеги интегралдык бузулуулардын жарым октогу экинчи, үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын жүрүм-турумуна таасири изилденген. Биринчи түрдөгү интегралдык барабарсыздык жөнүндө лемманы колдонуу биздин маселелерди чыгарууда кээ бир кесүүчү функциялар чоң роль ойной тургандыгын көрсөттү, башкача айтканда, алар Вольтерра тибиндеги интегралдык бузулуулардын жарым октогу ВИДТнин жаңы класстагы чыгарылыштарынын жүрүм-турумуна тийгизген таасирин изилдөөгө жардам берет. Штольц формасындагы Лопиталь эрежесин колдонуу жарым октогу экинчи жана үчүнчү тартиптеги каралып жаткан сызыктуу ВИДТнин бардык чыгарылыштарынын аргументтеринин чексиз өсүшү менен нөлгө умтулуусун белгилөөгө жардам бергендигин да белгилейбиз.

4-главада системага стандарттуу эмес келтирүү методунун биринчи вариантын өркүндөтүү менен ушул ВИДТнин коэффициенттери жана ядролору жарым октун кээ бир чекиттеринде дифференциалданбай калышы мүмкүн болгон учурда төртүнчү жана бешинчи тартиптеги сызыктуу ВИДТнин чыгарылыштарынын туруктуулугунун жетиштүү шарттары белгиленген.

Алынган натыйжалар кичине бош мүчөлөрү бар төртүнчү жана бешинчи тартиптеги тиешелүү сызыктуу дифференциалдык теңдемелер үчүн да жаңы экени белгиленет.

Белгисиз функциянын үчүнчү туундусунун коэффициенти оң эмес болгондо, б.а. төртүнчү тартиптеги тиешелүү сызыктуу бир тектүү ДТнын ар кандай нөлдүк эмес чыгарылышы АТ болуп саналбаган учурда төртүнчү тартиптеги сызыктуу бир тектүү ВИДТнин чыгарылыштарынын АТсынын жетиштүү шарттары табылат, бул Остроградский-Лиувилл формуласы менен ырасталган. Бул натыйжалар негизинен системага стандарттуу эмес келтирүү методун, теңдемелерди квадратка көтөрүү методун жана жарым-жартылай кесүү методун өркүндөтүү аркылуу жетишилди.

Системага стандарттуу эмес келтирүү методун, теңдемелерди квадратка көтөрүү методун, жарым-жартылай кесүү методун өркүндөтүү менен бешинчи тартиптеги ВИДТнин чыгарылыштарынын АТ жетиштүү шарттары белгиленген. Алынган натыйжалар кичине бош мүчөсү бар бешинчи тартиптеги тиешелүү сызыктуу дифференциалдык теңдемелер үчүн да жаңы экени белгиленет.

Практикалык мааниси. Бул иш теориялык мүнөзгө ээ жана анын натыйжалары жарым окто жогорку тартиптеги ВИДТнин асимптоталык теориясында колдонулушу мүмкүн; эс тутуму бар үзгүлтүксүз чөйрөдө болуп жаткан айрым процесстердин туруктуулугун изилдөөдө, мисалы, аэро жана космостук динамикада; магистранттар жана докторанттар – математиктер жана механиктер үчүн атайын курстарды иштеп чыгууда.

Диссертацияны коргоодо чыгарылуучу негизги жоболор:

Жетиштүү шарттарды түзүү:

– тиешелүү сызыктуу бир тектүү ДТ изилденип жаткан касиеттерге ээ болбогон чыгарылышы болушу мүмкүн болгон учурда жарым окто чектүүлүк жана экинчи жана үчүнчү тартиптеги сызыктуу бир тектүү ВИДТнин бардык чыгарылыштарынын аргументинин чексиз өсүшү менен нөлгө умтулуу;
– тиешелүү сызыктуу бир тектүү жана бир тектүү эмес төртүнчү тартиптеги ДТ жарым окто чектелбеген чыгарылыштарга ээ болушу мүмкүн болгон учурда төртүнчү тартиптеги ВИДТнин бардык чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендиги;
– төртүнчү жана бешинчи тартиптеги сызыктуу ВИДТнин чыгарылыштарынын туруктуулугу, эгерде бул ВИДТнин коэффициенттери жана ядролору жарым октун кээ бир чекиттеринде дифференциалданбай калышы мүмкүн болгон учурда, системага стандарттуу эмес маалымат методунун биринчи вариантын өркүндөтүү менен;

– тиешелүү сызыктуу бир тектүү төртүнчү тартиптеги ДТнын ар кандай нөлдүк чечими асимптоталык жактан туруктуу болбогон учурда сызыктуу бир тектүү төртүнчү тартиптеги ВИДТнин чыгарылыштарынын АТы жарым-жартылай кесүү методун өркүндөтүү менен;
– бешинчи тартиптеги ВИДТнин чыгарылыштарынын АТысы, кээ бир төрт жардамчы параметрди жана бир салмактык функцияны киргизүү менен системага маалыматтардын стандарттуу эмес методун, теңдемелерди квадратка көтөрүү методун, жарым-жартылай кесүү методун өркүндөтүү менен.

Изденүүчүнүн жеке салымы. Диссертациялык иштин изилдөө максаттары жана милдеттери илимий жетекчи С. Искандаров тарабынан коюлган. Диссертацияда авторго таандык материалдар камтылган.

Диссертациянын жыйынтыктарын апробациялоо. Бул иштин натыйжалары төмөнкү иш-чараларда баяндалган жана талкууланган:

– Казакстан Республикасынын УИАсынын академиги К. А. Касымовдун 80 жылдыгына арналган «Математиканын жана информатиканын актуалдуу проблемалары» эл аралык илимий-практикалык конференциясы (Алматы ш., Аль-Фараби атындагы КазМУ, 2015-жылдын 21-23-декабры);
– II Бөрүбаев окуулары (Ж. Баласагын атындагы КУУ, КР УИА МИ, 1-март, 2018-жыл);
– Ири окумуштуу жана педагог, профессор Кривошеин Леонид Евгеньевичтин 100 жылдыгына арналган «Теориялык жана колдонмо математиканын актуалдуу проблемалары» эл аралык илимий-практикалык конференциясы (Бишкек ш., Ж. Баласагын атындагы КУУ, 18-октябрь, 2019-жыл);
– Дифференциалдык теңдемелердин сапаттык теориясы боюнча семинардын жазгы семестри (Москва ш., М. В. Ломоносов атындагы ММУ, 19-апрель, 2019-жыл);
– КР УИАнын 35 жылдыгына арналган «III Бөрүбаев окуулары» эл аралык илимий конференциясы (Бишкек ш., КР УИА МИ, 24-май, 2019-жыл);
– Б. Н. Ельцин атындагы КРСУнун «Жогорку математика» кафедрасынын илимий семинары (илимий жетекчиси – ф.-м.и.к., Л. Г. Лелевкина) (Бишкек ш., КРСУ, 26-апрель, 2021-жыл, 12-апрель, 2023-жыл);
– ЕТФтин биринчи деканы, профессор В. А. Юриковдун элесине арналган «Илимдеги жана техникадагы инновациялар» Эл аралык илимий-практикалык конференциясы (Бишкек ш., КРСУ, 20-21-апрель, 2022-жыл);

– КР УИАнын математика институтунун илимий семинарында (илимий жетекчиси – акад. Борубаев А. А.) (Бишкек ш., КР УИА МИ, 27-июнь, 2023-ж.).

Диссертациянын жыйынтыктарынын басылмаларда чагылдырылышынын толуктугу. Диссертациянын негизги мазмуну [1, 3 - 10] макалаларда жана М. В. Ломоносов атындагы ММУда баяндаманын аннотациясында жарыяланган [2]. Биргелешкен эмгектерде [2, 4-7, 9, 10] маселелерди коюу жана жыйынтыктарды талкуулоо илимий жетекчиси С. Искандаровго, теоремаларды, натыйжаларды далилдөө жана иллюстрациялык мисалдарды түзүү авторго таандык.

Диссертациянын структурасы жана көлөмү. Диссертациялык иш кыскартуулардын жана белгилөөлөрдүн тизмегинен, кириш сөздөн, 14 бөлүмдү камтыган төрт главадан, корутундудан, практикалык сунуштамалардан жана 75 аталыштагы колдонулган булактардын тизмесинен, 98 барак компьютердик тексттен турат.

Авторефератта диссертацияда кабыл алынган номерлөө системасы колдонулат жана сакталган: ар бир главанын ичинде кош үзгүлтүксүз номерлөө. Мисалы, формула (4.2) 4-главанын экинчи формуласы, 3.5-теорема 3-главанын бешинчи теоремасы, 3.4-мисал 3-главанын төртүнчү мисалы.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН НЕГИЗГИ МАЗМУНУ

«АДАБИЯТТАРГА СЕРЕП» деген биринчи главада мазмуну боюнча ушул диссертациялык иште чечилип жаткан маселелерге жакын болгон илимий адабияттарга кыскача сереп берилет.

«ИЗИЛДӨӨНҮН МЕТОДОЛОГИЯСЫ ЖАНА МЕТОДДОРУ» деген 2-главада изилдөөнүн объектиси, предмети, милдеттери аныкталган. Бул диссертациялык иштин маселелерин чыгаруунун кээ бир методдоруна кыскача баяндама жасалды. Изилдөөнүн методикасы баяндалган, башкача айтканда, биз алдыга койгон маселелерди чечүүгө мүмкүндүк берүүчү колдонулуучу жана өркүндөтүлүүчү конкреттүү методдордун маңызы көрсөтүлгөн. Интегралдык барабарсыздык жөнүндө 2 лемма; кош интегралдарды өзгөртүүлөр жана жарым окто ВИДТ тарабынан каралуучу, интегралдык мүчөлөрдү бош мүчөлөр менен байланыштырган өзгөртүүлөр жөнүндө леммалар берилген; ошондой эле Штольц формасындагы Лопиталь эрежеси жөнүндө лемма жана Люстерник-Соболевдин леммасы келтирилген

3, 4-главаларда алынган автордун өз жыйынтыктарынын кыскача мазмунунун баяндамасына өтөлү.

Бул диссертациялык иште төмөнкү түрдөгү Вольтерра тибиндеги сызыктуу интегро-дифференциалдык теңдемелер каралат:

$$x^{(n)}(t)+\sum_{k=0}^{m}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+\int_{t_0}^{t}Q_k\left(t,\tau\right)x^{(k)}\left(\tau\right)d\tau\right]=f(t),\quad t\ge t_0, \tag{2.1}$$

атап айтсак: экинчи тартиптеги ($n=2$, $m=1$, $f(t)\equiv 0$); үчүнчү тартиптеги ($n=3$, $m=2$, $f(t)\equiv 0$); төртүнчү тартиптеги ($n=4$, $m=3$, $f(t)\neq 0$ теңдеш жана $f(t)\equiv 0$); бешинчи тартиптеги ($n=5$, $m=4$), мында $a_k(t)$, $Q_k(t,\tau)$ ($k=0,1,2,3,4$), $f(t)$ деген $t\ge t_0$, $t\ge\tau\ge t_0$ болгондо үзгүлтүксүз болуп саналат. Сөз $x^{(k)}(t_0)$ $(k=0,1,...,n-1; n=2,3,4,5)$ ар кандай баштапкы маалыматтары бар ВИДТнин (2.1) $x(t)\in C^n(J,R)$ $(n=2,3,4,5)$ чечимдери жөнүндө болот. Ар бир мындай чечим бар жана жападан жалгыз.

4 бөлүмдөн турган 3-глава Вольтерра тибиндеги интегралдык бузулуулардын жарым октогу экинчи, үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги тиешелүү ДТнын чечимдеринин жүрүм-турумуна тийгизген таасирин изилдөөгө арналган.

3.1-бөлүмдө экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү ВИДТнын бардык чечимдеринин $t\to\infty$ болгондогу J жарым интервалындагы чектелүүлүктүн жетиштүү шарттары жана нөлгө умтулуу белгиленген:

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)\right]d\tau=0,\ t\ge t_0 \qquad (3.1)$$

тиешелүү сызыктуу бир тектүү ДТ төмөнкүдөй болгон учурда:

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=0, \qquad t\ge t_0 \qquad (3.1_0)$$

изилденүүчү касиетке ээ болбогон чечимдери болушу мүмкүн, б.а. Вольтерра тибиндеги интегралдык бузулуулардын ДТнын чечимдеринин $t\to\infty$ болгондогу J жарым интервалындагы чектелүүлүккө жана нөлгө умтулууга таасирин изилдөө (3.1 $_0$).

Бул бөлүмдүн негизги жыйынтыктарын берели. С. Искандаровдуку (2008) сыяктуу эле ВИДТде (3.1) стандарттуу эмес алмаштырууну жүргүзөбүз $x'(t)+\lambda^2x(t)=W(t)y(t)$, (3.2) мында λ - кээ бир жардамчы параметр, $0<W(t)$ - кээ бир салмактык функция, $y=y(t)$ - жаңы белгисиз функция. Анда ВИДТ (3.1) $x(t)$ үчүн ДТдан жана $y(t)$: үчүн биринчи тартиптеги ВИДТдан эквиваленттүү системага келет.

$$y'(t)+b_1(t)y(t)+b_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\left[P(t,\tau)x(\tau)+K(t,\tau)y(\tau)\right]d\tau=0, \quad t\ge t_0,$$

мында $b_1(t)\equiv a_1(t)-\lambda^2+W'(t)\left(W(t)\right)^{-1}$, $b_0(t)\equiv\left[a_0(t)-\lambda^2a_1(t)+\lambda^4\right]\left(W(t)\right)^{-1}$,

$P(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\left[Q_0(t,\tau)-\lambda^2Q_1(t,\tau)\right]$, $K(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}Q_1(t,\tau)W(\tau)$.

Диссертацияда мындай система (3.3) менен белгиленет. Андан ары С. Искандаровдун (2002) монографиясындагыдай шарттар жана белгилер киргизилген: $K(t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau)$, (*K*); $\psi_i(t)$ $(i=1..n)$ - кээ бир кесүүчү функциялар, $R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1}$ $(i=1..n)$ деп белгилейбиз жана

(3.3) системасына В. Вольтерранын теңдемелерин өзгөртүү методу иштелип чыгат, С. Искандаровдун (2003-ж.) доктордук диссертациясынын авторефератынан 1.4-лемманын (1.13) өзгөртүүсү колдонулат, андан кийин диссертациянын 2.1-леммасы же Ю. А. Веддин, З. Пахыровдун (1973-ж.) интегралдык барабарсыздык жөнүндө 1-леммасы колдонулат, натыйжада төмөнкүлөр далилденет:

3.1-ТЕОРЕМА. 1) $\lambda = 0$; 2) $R_i(t,t_0) \geq 0$, $R'_{i\tau}(t,\tau) \geq 0$, болсо $R_i^*(t) \geq 0$, $R_i^{**}(t) \geq 0$ функциялары болот, алар $R'_{it}(t,t_0) \leq R_i^*(t) R_i(t,t_0)$, $R''_{it\tau}(t,\tau) \leq R_i^{**}(t) R'_{i\tau}(t,\tau)$ $\left(i = 1..n\right)$. Анда (3.3) системасынын ар кандай чечими үчүн $\left(x(t), y(t)\right)$ төмөнкүдөй баа берүү адилеттүү:

$$\left(x(t)\right)^2 + 2\lambda^2 \int_{t_0}^{t} \left(x(s)\right)^2 ds + \left(y(t)\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} R_i(t,t_0)\left(Y_i(t,t_0)\right)^2 \leq c_* M_1(t), \qquad (3.5)$$

мында $M_1(t) \equiv \exp\left(\int_{t_0}^{t} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[R_i^*(s) + R_i^{**}(s) \right] + \left| a_1(s) + W'(s)\left(W(s)\right)^{-1} \right| + \right.\right.$

$$\left.\left. + \left|a_0(s)\right| \left(W(s)\right)^{-1} + \int_{t_0}^{s} \left[\left(W(s)\right)^{-1} \left|Q_0(s,\tau)\right| + \left|K_0(s,\tau)\right| \right] d\tau \right\} ds \right).$$

Мындан тышкары, 3) $R_j(t,t_0) > 0$, $\psi_j(t) > 0$, $\psi'_j(t) \geq 0$, $q_j(t,c_*) \geq 0$, $q'_j(t,c_*) \geq 0$, $q'_j(t,c_*)\left(\psi_j(t)\right)^{-1} \in L^1(J,R_+)$ $(1 \leq j \leq n)$; 4) $W'(t) \in L^1(J,R)$, мында $q_j(t,c_*) \equiv \sqrt{c_*}\left(R_j(t,t_0)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(M_1(t)\right)^{\frac{1}{2}}$. Анда $\int_{t_0}^{t} y(s)ds = O(1)$ жана ВИДТнин ар кандай чечими (3.1) $x(t) = O(1)$.

3.2-ТЕОРЕМА. Мейли 1) $\lambda \neq 0$ болсун; 2) 3.1-теореманын 2) шарты аткарылат. Анда (3.3) системанын $\left(x(t), y(t)\right)$ ар кандай чечими үчүн (3.5) деген баа адилеттүү, мында оң бөлүгүндө $M_1(t)$ функциясынын ордунда төмөнкү турат

$$M_2(t) \equiv \exp\left(\int_{t_0}^{t} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[R_i^*(s) + R_i^{**}(s) \right] + \left|b_1(s)\right| + \left|b_0(s)\right| + \int_{t_0}^{s} \left[\left|P(s,\tau)\right| + \left|K_0(s,\tau)\right| \right] d\tau \right\} ds \right).$$

Мындан тышкары, 3) 3.1-теореманын 3) шарты аткарылат, мында $q_j(t,c_*)$ функциясында $M_1(t)$ ордунда $t \to \infty$ $(k = 0{,}1)$ болгондо $M_2(t)$; 4) $W^{(k)}(t) \to 0$ турат. Анда $\int_{t_0}^{t} y(s)ds = O(1)$ жана $t \to \infty.$болгондо ВИДТнин ар кандай чечими.

Эки теоремада тең (3.5) тиешелүү баалоодон төмөнкүдөй баа туура болот: $R_j(t,t_0)(\int_{t_0}^{t}\psi_j(\eta)y(\eta)d\eta)^2 \le c_* M_r(t) \ (1 \le j \le n;\ r = 1,2)$, андан төмөнкүдөй болот

$$\left|\int_{t_0}^{t}\psi_j(\eta)y(\eta)d\eta\right| \le \sqrt{c_*}\left(R_j(t,t_0)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(M_r(t)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.6)$$

Биринчи түрдөгү (3.6) интегралдык барабарсыздыкка С. Искандаровдун (2002, 2017) төмөнкү леммасын колдонобуз: мейли $\psi(t) > 0$, $\psi'(t) \ge 0$, $q(t,c) \ge 0$, $q'(t,c) \ge 0$, $0 \le c = const$, $t \ge t_0$. Анда $|\int_{t_0}^{t}\psi(s)z'(s)ds| \le q(t,c)$ биринчи түрдөгү интегралдык барабарсыздыктан төмөнкүдөй баа чыгат:

$$|z(t)| \le |z(t_0)| + \left(\psi(t_0)\right)^{-1} q\left(t_0,c\right) + \int_{t_0}^{t} q'(s,c)\left(\psi(s)\right)^{-1} ds.$$

Натыйжада (3.6)дан $\int_{t_0}^{t} y(s)ds = O(1)$ алабыз. Мунун негизинде $\lambda = 0$ болгондо (3.2) алмаштыруусунан 3.1-теореманын ырастоосу келип чыгат. Андан ары 3.2-теореманын ырастоосун далилдөө үчүн, б.а., $\lambda \ne 0$ болгондо (3.2) алмаштыруусунан $x(t_0)$ каалаган баштапкы маани үчүн Кошинин (Н.М.Матвеев, 1967-ж.) белгилүү формуласына өтөбүз: $x(t) = e^{-\lambda^2(t-t_0)}[x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda^2(s-t_0)}W(s)y(s)ds]$, жана бөлүктөп интегралдаганда, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$x(t) = e^{-\lambda^2(t-t_0)}\{x(t_0) + e^{\lambda^2(t-t_0)}W(t)\int_{t_0}^{t} y(\eta)d\eta - \int_{t_0}^{t} e^{\lambda^2(s-t_0)}\left[\lambda^2 W(s) + W'(s)\right](\int_{t_0}^{s} y(\eta)d\eta)ds\}$$

Андан ары 3.2-теореманын шарттарын эске алуу менен бул барабардыкта $t \to \infty$ болгондогу чекке өтөбүз, мында Штольц формасындагы Лопиталь эрежесин колдонобуз (Ландау Э., 1948; Демидович Б. П., 1967). Анда төмөнкүнү алабыз: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Жөнөкөй 3.1-МИСАЛ келтирели.

$$x''(t) - 7(t+1)^{-1}x'(t) + 12(t+1)^{-2}x(t) + \int_0^t \frac{e^{-t+\tau+25(t^2+\tau^2)}(t+\tau+1)}{t+\tau+2}\left[x(\tau) + x'(\tau)\right]d\tau = 0,$$

$t \ge 0$ экинчи тартиптеги ВИДТ үчүн $\lambda = 0$ жана $\lambda = 1$, $W(t) \equiv e^{-t}$ болгондо 3.1, 3.2-теоремалардын бардык шарттары аткарылат, мында $t_0 = 0$, $P(t,\tau) \equiv 0$, $n = 1$, $\psi_1(t) \equiv e^{25t^2}$, $R_1(t,\tau) \equiv \dfrac{t+\tau+1}{t+\tau+2}$, $R_1^*(t) \equiv \dfrac{1}{(t+1)(t+2)}$, $R_1^{**}(t) \equiv 0$ жана ошондуктан ушул ИДТнин ар кандай чечими үчүн 3.1, 3.2-теоремалардын ырастоолору туура болот. Бирок Эйлердин тиешелүү ДТсы үчүн:

$$x''(t)-7(t+1)^{-1}x'(t)+12(t+1)^{-2}x(t)=0, \qquad t\geq 0$$

3.1, 3.2-теоремалардын ырастоолору алардын ар кандай нөлдүк эмес чечимдери үчүн адилетсиз, бул ушул ДТнын жалпы чечими менен ырасталат: $x(t)=\left[c_1+(t+1)^4c_2\right](t+1)^2$ ($c_1,\ c_2$ – бош турактуулар).

Ошентип, биз ВИДТнин (3.1) классын табууга жетиштик, ал үчүн 3.1 маселе чечилет.

3.2-бөлүм төмөнкүдөй түрдөгү үчүнчү тартиптеги ВИДТнин бардык чечимдеринин $t\to\infty$ болгондогу нөлгө умтулуусунун жана J га чектелүүлүктүн жетиштүү шарттарын белгилөөнүн 3.2-маселесине арналган:

$$x'''(t)+\sum_{k=0}^{2}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+\int_{t_0}^{t}Q_k\left(t,\tau\right)x^{(k)}\left(\tau\right)d\tau\right]=0, \quad t\geq t_0 \tag{3.11}$$

үчүнчү тартиптеги тиешелүү сызыктуу бир тектүү ДТ төмөнкүдөй болгон учурда $x'''(t)+\sum_{k=0}^{2}a_k(t)x^{(k)}(t)=0, \quad t\geq t_0$ (3.11$_0$) изилденип жаткан касиеттерге ээ болбогон чечимдер болушу мүмкүн.

Бул маселени чечүү үчүн ВИДТда (3.11) С. Искандаровдуку (2010-ж.) сыяктуу стандарттуу эмес алмаштыруулар жүргүзүлөт: $x'(t)+\lambda_1x(t)=W_1(t)y(t), \quad y'(t)+\lambda_2y(t)=W_2(t)u(t),$ мында $\lambda_1,\ \lambda_2$ - кээ бир жардамчы параметрлер, $0<W_1(t),\ W_2(t)$ - кээ бир салмактык функциялар, $y(t),\ u(t)$ - жаңы белгисиз функциялар. Анда ВИДТ (3.11) $x(t)$, $y(t)$ үчүн биринчи тартиптеги эки ДТдан жана $u(t)$ үчүн биринчи тартиптеги бир ВИДТдан эквиваленттүү системага (3.14) келет. Андан ары 3.1-бөлүмдөгү методика (3.14) системага чейин иштелип чыгат, бул 3.2-маселенин чечилишине алып келет, иллюстрациялык мисал келтирилет.

3.3-бөлүмдө төмөнкүдөй түрдөгү төртүнчү тартиптеги ВИДТнын бардык чечимдеринин J жарым интервалындагы чектелүүлүктүн жетиштүү шарттарын белгилөө маселеси чечилет:

$$x^{(4)}(t)+\sum_{k=0}^{3}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+\int_{t_0}^{t}Q_k\left(t,\tau\right)x^{(k)}(\tau)d\tau\right]=f(t), \quad t\geq t_0 \tag{3.23}$$

төртүнчү тартиптеги тиешелүү сызыктуу ДТ төмөнкүдөй болгон учурда:
$L(t,x)\equiv x^{(4)}(t)+a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=0, \quad t\geq t_0,$ (3.23$_0$)
$L(t,x)=f(t), \quad t\geq t_0,$ (3.23$_1$) J чечимдерге чексиз болушу мүмкүн.
Бизге белгилүү болгондой, бул маселе мурда изилденген эмес.

3.3-маселени чечүү үчүн С. Искандаровдуку (2006-ж.) сыяктуу стандарттуу эмес алмаштыруу (3.24) жүргүзүлөт: $x''(t)+\lambda^2x(t)=W(t)y(t)$, мында $0\neq\lambda$ - кээ бир жардамчы параметр, $\lambda\in R$; $0<W(t)$ - кээ бир салмактык функция, $y(t)$- жаңы белгисиз функция. Бул $x(t)$ үчүн бир ДТдан

жана $y(t)$ үчүн бир ВИДТдан турган төртүнчү тартиптеги ВИДТны (3.23) эквиваленттүү системага (3.25) алып келет. Андан ары (3.25) системага алгач В.Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүү методу $\left(x(t), y(t)\right)$ системасынын ар кандай чечүү үчүн) колдонулат, анын биринчи теңдемеси - ДТ $x'(t)$ көбөйтүлөт, экинчи теңдеме - ВИДТ $y'(t)$) көбөйтүлөт, андан соң кесүүчү функциялар методу колдонулат, мында төмөнкүлөр киргизилет: 3.1-бөлүмдүн (K) шарты, (F) шарты: $F(t) = \sum_{i=0}^{n} F_i(t);$ $\psi_i(t)\,(i = 1..n)$ - кээ бир кесүүчү функциялар, $R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1}$, $E_i(t) \equiv F_i(t)\left(\psi_i(t)\right)^{-1}$, (R): $R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t)\,(i = 1..n)$, шарты $c_i(t)\,(i = 1..n)$ - кээ бир функциялар, С. Искандаровдун (2003-ж.) доктордук диссертациясынын авторефератынан 1.4, 1.5-леммалар колдонулат. Ю. А. Веддин, З. Пахыровдун (1973-ж.) диссертациясынын 2.1-леммасын же интегралдык барабарсыздык жөнүндө 1-леммасын жана 3.1-бөлүмдөгү С. Искандаровдун интегралдык барабарсыздык жөнүндө леммасын колдонгондон кийин (3.25) системанын $|y(t)|$ үчүн баа белгиленет. Анда (3.23) төртүнчү тартиптеги берилген ВИДТнин $x(t)$ ар кандай чечиминин чектелгендиги Коши (Н. М. Матвеев, 1967-ж.) маселесинин интегралдык чагылдырылышынан келип чыгат:

$$x(t) = x(t_0)\cos\lambda(t-t_0) + \frac{1}{\lambda}x'(t_0)\sin\lambda(t-t_0) + \frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t}\left[\sin\lambda(t-s)\right]W(s)y(s)ds$$

$W(t) \in L^1\left(J, R_+ \setminus \{0\}\right)$ шартынын негизинде $x(t_0)$, $x'(t_0)$ ар кандай баштапкы маанилер үчүн (3.24) стандарттуу эмес алмаштыруудан. 4 иллюстрациялык мисал келтирилет.

3.4-бөлүмдө 3-главадагы изилдөөлөрдүн натыйжаларына талдоо жүргүзүлдү.

4-глава 5 бөлүмдү камтыйт жана жарым октогу төртүнчү жана бешинчи тартиптеги сызыктуу ВИДТнин чечимдеринин туруктуулугунун жетиштүү шарттарын түзүүгө арналган; сызыктуу бир тектүү төртүнчү тартиптеги ВИДТнин чечимдеринин спецификалык асимптоталык туруктуулугу; жарым октогу сызыктуу бешинчи тартиптеги ВИДТнин чечимдеринин асимптоталык туруктуулугу.

4.1-бөлүм төмөнкү түрдөгү төртүнчү тартиптеги сызыктуу ВИДТнин чечимдеринин туруктуулугунун жетиштүү шарттарын түзүүнүн 4.1 маселесин чечүүгө арналган:

$$x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + \right.$$

$$\left. + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau) + Q_3(t,\tau)x'''(\tau)\right]d\tau = f(t), \quad t \ge t_0. \tag{4.1}$$

Бул бөлүмдүн негизги жыйынтыгын берели. Ушул сыяктуу эле, Искандаров С. (2009-ж.) боюнча ВИДТда (4.1) төмөнкүдөй стандарттуу эмес алмаштыруулар жүргүзүлөт: $x'(t)=W_1(t)y(t)$, $y'(t)=W_2(t)z(t)$, $z'(t)=W_3(t)u(t)$, мында $0<W_k(t)$ $\left(k=1,2,3\right)$ - кээ бир жардамчы салмактык функциялар, $y(t), z(t), u(t)$ - жаңы белгисиз функциялар. Анда ВИДТ (4.1) төмөнкүдөй эквиваленттүү системага келет:

$$
\begin{aligned}
&x'(t)=W_1(t)y(t),\quad y'(t)=W_2(t)z(t),\quad z'(t)=W_3(t)u(t),\\
&u'(t)+b_3(t)u(t)+b_2(t)z(t)+b_1(t)y(t)+b_0(t)x(t)+\\
&+\int_{t_0}^{t}\left[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)y(\tau)+P_2(t,\tau)z(\tau)+K(t,\tau)u(\tau)\right]d\tau=F(t),\ t\ge t_0,
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

мында $W(t)=W_1(t)W_2(t)W_3(t)$,

$b_3(t)\equiv a_3(t)+\left(W(t)\right)^{-1}\{[W_1'(t)W_2(t)+\left(W_1(t)W_2(t)\right)']W_3(t)+W'(t)\}$,

$b_2(t)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\{W_1''(t)W_2(t)+[W_1'(t)W_2(t)+\left(W_1(t)W_2(t)\right)']'+$

$+a_3(t)[W_1'(t)W_2(t)+\left(W_1(t)W_2(t)\right)']+a_2(t)W_1(t)W_2(t)\}$,

$b_1(t)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\{W_1'''(t)+a_3(t)W_1''(t)+a_2(t)W_1'(t)+a_1(t)W_1(t)\}$,

$b_0(t)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}a_0(t)$, $P_0(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}Q_0(t,\tau)$,

$P_1(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\{Q_1(t,\tau)W_1(\tau)+Q_2(t,\tau)W_1'(\tau)+Q_3(t,\tau)W_1''(\tau)\}$,

$P_2(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\{Q_2(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)+Q_3(t,\tau)[W_1'(\tau)W_2(\tau)+\left(W_1(\tau)W_2(\tau)\right)']\}$,

$K(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}Q_3(t,\tau)W(\tau)$, $F(t)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}f(t)$.

(4.9) системаны изилдөө үчүн В. Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүү методун өркүндөтөбүз, $\left(x(t),y(t),z(t),u(t)\right)$ ар кандай чечим үчүн (4.9) системанын биринчи ДТсын $x(t)$ га, экинчи ДТсын - $y(t)$ га, үчүнчү ДТсын - $z(t)$ га, төртүнчү ВИДТсын - $u(t)$ га көбөйтөбүз), андан соң 3.1-бөлүмдүн (*K*) шарттары, 3.3-бөлүмдүн (*F*) шарты аткарылгандыгын божомолдоп, төмөнкү функцияларды $\psi_i(t)\,(i=1..n)$ - кээ бир кесүүчү функциялар, $R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1}$, $E_i(t)\equiv F_i(t)\left(\psi_i(t)\right)^{-1}$ - белгисин, төмөнкү функцияларды R): $R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t)\,(i=1..n)$; $c_i(t)\,(i=1..n)$ - кээ бир функцияларды киргизип, С. Искандаровдун (2003-ж.) диссертациясынын 2.2-леммасын же доктордук диссертациясынын авторефератындагы 1.4, 1.5-леммаларын жана Ю. А. Веддин, З. Пахыровдун (1973-ж.) диссертациясынын 2.1-леммасын же интегралдык барабарсыздык жөнүндө 1-леммасын колдонуп, төмөнкүлөр далилденет:

4.1-ТЕОРЕМА. 1) $W_k(t)>0$ $\left(k=1,2,3\right)$ болсун; (*K*), (*F*), (*R*) шарттары аткарылсын; 2) $b_3(t)\ge 0$; 3) $A_i(t)\ge 0$, $B_i(t)\ge 0$, $B_i'(t)\le 0$, $R_{i\tau}'(t,\tau)\ge 0$, $A_i'(t)\le A_i^*(t)A_i(t)$, $\left(E_i^{(k)}(t)\right)^2\le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$ $\left(k=0,1\right)$, $R_{it\tau}''(t,\tau)\le R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)$

$\left(i=1..n;\quad k=0,1\right)$ сыяктуу $A_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$, $c_i(t)$, $R_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$ функциялар бар; 4) $W_j(t)+|b_k(t)|+|F_0(t)|+\int\limits_{t_0}^{t}|P_k(t,\tau)|d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}|K_0(t,\tau)|d\tau\in$ $\in L_1\left(J,R_+\setminus\{0\}\right)$ $\left(j=1,2;\, k=0,1,2\right)$; 5) $W_j(t)$ $\left(j=1,2,3\right)$, $W_1'(t)$; $W_1''(t)$; $\left(W_1(t)W_2(t)\right)'$ функциялары J жарым интервалында чектелген. Анда ВИДТнын (4.1) ар кандай чечими $x(t)$ ВИДТ туруктуу.

4.1-теореманын 1) - 4) шарттары $x(t)=O(1)$, $y(t)=O(1)$, $z(t)=O(1)$ камсыз кылат. $W_1(t)=O(1)$ натыйжасында (4.2)ден $x'(t)=O(1)$ди алабыз. $W_1'(t)=O(1)$, $W_2(t)=O(1)$ негизинде (4.5) катышынан $x''(t)=O(1)$ дегенди алабыз. $W_j(t)=O(1)$ $\left(j=1,2,3\right)$, $W_1''(t)=O(1)$, $\left(W_1(t)W_2(t)\right)'=O(1)$ болгондуктан, (4.6) катышынан $x'''(t)=O(1)$ келип чыгат. (Мында $x(t)$ – ВИДТнын ар кандай чечими (4.1)). Демек, төртүнчү тартиптеги ВИДТнын (4.1) ар кандай чечими үчүн $x(t)$ төмөнкүлөр адилеттүү: $x^{(k)}(t)=O(1)$ $\left(k=0,1,2,3\right)$, бул $x(t)$ ВИДТнын (4.1) туруктуулугуна эквиваленттүү.

4.1 - МИСАЛ.

$$x^{(4)}(t)+[6+e^{\sqrt{t}}]x'''(t)+[11+3e^{\sqrt{t}}-e^{-2t}]x''(t)+[6+2e^{\sqrt{t}}-e^{-2t}+e^{-2t}/(t+1)^2]x'(t)-$$

$$-\frac{e^{-3t}}{t^2+\sqrt{t}+1}x(t)+\int\limits_0^t\{-\frac{e^{-3t}\left(\sin t\right)^{\frac{1}{7}}}{\left(t+\tau+4\right)^5}x(\tau)+[2Q_3(t,\tau)-\frac{e^{-3t}}{(t+\tau+1)^2}+\frac{e^{-3t}}{(t+2\tau+3)^4}]x'(\tau)+$$

$$+[3Q_3(t,\tau)-\frac{e^{-3t}}{(t+\tau+1)^2}]x''(\tau)+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)\}d\tau=\frac{e^{t^2-3t}\left(\sin 3t\right)^{\frac{1}{5}}}{t-\tau+8}-\frac{e^{-3t}}{(t+2)^2},\quad t\ge 0,$$

төртүнчү тартиптеги ВИДТ үчүн, мында

$$Q_3(t,\tau)\equiv e^{-3t+3\tau}\left\{\frac{t+\tau+6}{t+\tau+7}+\frac{1}{t-\tau+5}\right\}e^{t^2+\tau^2}\left(\sin 3t\sin 3\tau\right)^{\frac{1}{5}}-\frac{e^{-3t}\left(\cos t\right)^{\frac{1}{3}}}{t^2+\tau+1}$$ үчүн

$W_j(t)\equiv e^{-t}$ $\left(j=1,2,3\right)$ 4.1-теореманын бардык шарттары аткарылат. Мында $t_0=0$, $b_3(t)\equiv e^{\sqrt{t}}$, $b_2(t)\equiv -e^{-t}$, $b_1(t)\equiv 1/(t+1)^2$, $b_0(t)\equiv -1/(t^2+\sqrt{t}+1)$,

$$P_0(t,\tau)\equiv-\frac{\left(\sin t\right)^{\frac{1}{7}}}{\left(t+\tau+4\right)^5},\quad P_1(t,\tau)\equiv\frac{e^{-\tau}}{\left(t+2\tau+3\right)^4},\quad P_2(t,\tau)\equiv-\frac{e^{-2\tau}}{\left(t+\tau+1\right)^2},\quad n=1,$$

$$\psi_i(t)\equiv e^{t^2}\left(\sin 3t\right)^{\frac{1}{5}},\quad R_1(t,\tau)\equiv\frac{t+\tau+6}{t+\tau+7}+\frac{1}{t-\tau+5},\quad A_1(t)\equiv\frac{t+6}{t+7},\quad B_1(t)\equiv\frac{1}{t+5},$$

$A_1^*(t)\equiv 1/\left(t+6\right)\left(t+7\right)$, $R_1^*(t)\equiv 0$, $E_1(t)\equiv 1/(t+8)$, $c_1(t)\equiv 1/(t+5)$,

$K_0(t,\tau)\equiv -\dfrac{e^{-3\tau}(\cos t)^{\frac{1}{3}}}{t^2+\tau+1}$, $F_0(t)\equiv -\dfrac{1}{(t+2)^2}$. Демек, ВИДТ келтирген ар кандай чечим $t\in R_+$ болгондо туруктуу.

Иллюстрациялык мисал көрсөтүп тургандай, (4.1) түрдөгү төртүнчү тартиптеги ВИДТнын коэффициенттери жана ядролору J жарым интервалынын кээ бир чекиттеринде дифференциалданбай калышы мүмкүн экендигин белгилей кетели.

4.1-ЭСКЕРТҮҮ. 4.1-теоремадан $Q_k(t,\tau)\equiv 0$ $(k=0,1,2,3)$, $f(t)\equiv f_0(t)$ болгондо төртүнчү тартиптеги тиешелүү сызыктуу бир тектүү эмес ДТнын чечимдеринин асимптоталык туруктуулугунун жетиштүү шарттары келип чыгат, бул жыйынтыктар ушундай ДТ үчүн жаңы болот жана Л. Чезаринин (1964-ж.), И. Т. Кигурадзенин, Т. А. Чантурияныn (1990-ж.) монографияларынан алынган жыйынтыктарда камтылбайт.

4.2-бөлүмдө төмөнкү түрдөгү төртүнчү тартиптеги сызыктуу бир тектүү ВИДТнын чечимдеринин асимптоталык туруктуулугунун жетиштүү шарттарын белгилөө жөнүндө 4.2-маселе чечилген:

$$x^{(4)}(t)-a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\big[Q_0(t,\tau)x(\tau)+$$
$$+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)\big]d\tau=0,\quad t\ge t_0, \tag{4.11}$$

төмөнкүдөй шартта (a_3): $a_3(t)\ge 0$, б. а., төртүнчү тартиптеги тиешелүү сызыктуу бир тектүү дифференциалдык теңдеменин нөлдөн башка ар кандай чечими болгон учурда

$$x^{(4)}(t)-a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=0,\quad t\ge t_0 \tag{4.11$_0$}$$

асимптоталык туруктуулук болуп саналбайт, бул Остроградский-Лиувиллдин формуласы менен ырасталат. Бул маселени чечүү үчүн С. Исандаровдуку (2007-ж.) сыяктуу эле ВИДТда стандарттуу эмес алмаштыруу жүргүзүлөт:

$$x''(t)+px'(t)+qx(t)=W(t)y(t), \tag{4.12}$$

мында p,q - кээ бир жардамчы параметрлер, анда $p>0,\ q>0;\ 0<W(t)$ - кээ бир салмактык функция; $y(t)$ - жаңы белгисиз функция жана төртүнчү тартиптеги ВИДТ (4.11) $x(t)$ үчүн экинчи тартиптеги ДТдан жана $y(t)$ үчүн экинчи тартиптеги ВИДТдан турган эквиваленттүү системага туура келет. Андан аркы өзгөртүүлөр С. Исандаровдуку (2012-ж.) сыяктуу эле системанын (4.13) ар бир теңдемеси үчүн алгач өз-өзүнчө жасалат, андан соң алар кошулат. Атап айтсак, $(x(t),y(t))$ өз алдынча белгиленген чечим үчүн биринчи теңдеме, б. а. ДТ (4.12), системалар (4.13) квадратка көтөрүлөт (С. Искандаров, 1981-ж.), t_0дангө tчейин интеграцияланат, анын ичинде бөлүк-бөлүгү менен жана теңдештик (4.14) келип чыгат; экинчи теңдеме, б. а. $y(t)$ үчүн ВИДТ жарым-жартылай кесүү методу менен (С. Искандаров, Д. Н. Шабданов, 2004-ж.) В. Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүү методун

өнүктүрүү аркылуу изилденет, бул теңдештикке (4.16) алып келет; (a_3) шартынын жана $W'(t) \le 0$ шартынын аркасынан (4.16) теңдештикте оң эмес интегралдык мүчө болот (4.17): $I(t) \equiv -2\int_{t_0}^{t} b_3(s)\big(y'(s)\big)^2 ds$ ал Ю. А. Веддин, З. Пахыровдун (1973-ж.) диссертациясынын 2.1-леммасын же макаласындагы интегралдык барабарсыздык жөнүндө 1-леммасын колдонууга мүмкүндүк бербейт. Бул интеграл $\psi(t)$ кээ бир кесүүчү функцияларды киргизгенде жана өзгөртүүлөргө (С. Искандаров, 2002-ж.) же өзгөртүүлөргө (М. И. Иманалиев, С. Искандаров, 2009-ж.) окшош бөлүк-бөлүктөр боюнча интеграциялоо менен өзгөртүлөт , мында $\psi(t)$ функциясы төмөнкүдөй түрдө жазылат:

$$I(t) = -2\int_{t_0}^{t} b_3(s)\big(\psi(s)\big)^{-1} y'(s)\psi(s)y'(s)ds = -2\int_{t_0}^{t} \alpha(s)y'(s)d_sY(s,t_0) =$$

$$= -\alpha(t)y'(t)Y(t,t_0) + 2\int_{t_0}^{t}\big[\alpha'(s)y'(s) + \alpha(s)y''(s)\big]Y(s,t_0)ds, \qquad (4.18)$$

мында $\alpha(t) \equiv b_3(t)\big(\psi(t)\big)^{-1}$, бу (3.108) өзгөртүүсүнүн (С. Искандаров, 2002-ж.) же (9) өзгөртүүсүнүн (М. И. Иманалиев, С. Искандаров, 2009-ж.) аналогу болуп саналат жана бул $y''(s)$ өзгөртүүсүндө (4.13) системасынын экинчи теңдемесинен анын туюнтмасына алмаштырылат; мындан кийин (3.109)-(3.113) өзгөртүүлөрүнүн (С. Искандаров, 2002-ж.) аналогдору же (10)-(12) өзгөртүүлөрүнүн (М. И. Иманалиев, С. Искандаров, 2009-ж.) аналогдору жасалат жана (4.23) теңдештик алынат. (4.14) жана (4.23) теңдештиктеринин кошулушу (4.24) акыркы теңдештикке алып келет, ал Ю. А. Веддин, З. Пахыровдун (1973-ж.) диссертациясынын 2.1-леммасын же макаласындагы интегралдык барабарсыздык жөнүндө 1-леммасын колдонууга мүмкүндүк берет.

4.3-бөлүм төмөнкү түрдөгү бешинчи тартиптеги сызыктуу ВИДТнин ар кандай чечиминин туруктуулугунун жетиштүү шарттарын түзүү жөнүндө 4.3-маселени чечүүгө арналган:

$$x^{(5)}(t) + \sum_{k=0}^{4}[a_k(t)x^{(k)}(t) + \int_{t_0}^{t} Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)d\tau] = f(t),\ t \ge t_0. \qquad (4.27)$$

Бул маселени чечүү үчүн 4.1-маселелерди изилдөө методикасы өркүндөтүлөт. (4.27) ВИДТда 4.1-бөлүм сыяктуу эле төмөнкүдөй стандарттуу эмес алмаштыруулар жүргүзүлөт: $x'(t) = W_1(t)y_1(t)$, (4.28); $y_1'(t) = W_2(t)y_2(t)$, (4.29); $y_2'(t) = W_3(t)y_3(t)$, (4.30); $y_3'(t) = W_4(t)y_4(t)$, (4.31), мында $0 < W_k(t)$ $(k = 1,2,3,4)$ - кээ бир салмактык функциялар, $y_k(t)$ $(k = 1,2,3,4)$ - жаңы белгисиз функциялар. Анда (4.27) бешинчи тартиптеги ВИДТ (4.28)-(4.31) төрт ДТдан жана $y_4(t)$ үчүн бир ВИДТдан турган (4.32) эквиваленттүү системага туура келет.

(4.32) системасына В. Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүү методу, кесүүчү функциялар методу(С. Искандаров, 2002-ж.) өркүндөтүлөт, мында (4.32) системасынын $(x(t), y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))$ өз алдынча белгиленген чечими үчүн анын биринчи теңдемеси $x(t)$ га, экинчиси - $y_1(t)$ га, үчүнчүсү - $y_2(t)$ га, төртүнчүсү - $y_3(t)$ га, бешинчи ИДТ - $y_4(t)$ га көбөйтүлөт, андан соң бул катыштар кошулат, t_0 дөн $t,$ га чейинки чекте интеграциялоо жүргүзүлөт жана 4.1-бөлүмдөгүдөй эле (*K*), (*q*) шарттары, $\psi_i(t)$ кесүүчү функциялар, $R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)$ $(i=1..n)$ функциялары киргизилет, С. Искандаровдун (2003-ж.) диссертациясынын 2.2-леммасы же доктордук диссертациясынын авторефератынан 1.4, 1.5-леммалар жана Ю. А. Веддин, З. Пахыровдун (1973-ж.) диссертациясынын 2.1-леммасы же интегралдык барабарсыздык жөнүндө 1-леммасы колдонулат.

4.4-бөлүмдө төмөнкүдөй түрдөгү бешинчи тартиптеги ВИДТнын чечимдеринин АТсынын жетиштүү шарттарын алуу жөнүндө 4.4-маселе чечилет:
$$x^{(5)}(t) + \sum_{k=0}^{4}[a_k(t)x^{(k)}(t) + \int_{t_0}^{t} Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)d\tau] = f(t),\ t \ge t_0. \tag{4.37}$$

Бул маселени чечүү үчүн С. Искандаров (2014-ж.) тарабынан иштелип чыккан жарым октогу төртүнчү тартиптеги сызыктуу ВИДТнын чечимдеринин АТсын изилдөө методу өркүндөтүлөт, атап айтканда, алгач төмөнкү стандарттуу эмес алмаштыруу жүргүзүлөт:
$$x^{(4)}(t) + p_3x'''(t) + p_2x''(t) + p_1x'(t) + p_0x(t) = W(t)y(t), \tag{4.38}$$
мында p_k - кээ бир жардамчы параметрлер, анда $p_k > 0$ $(k = 0,1,2,3)$; $0 < W(t)$ - кээ бир салмактык функция, $y(t)$ - жаңы белгисиз функция, ал (4.37) бешинчи тартиптеги ВИДТны (4.38) төртүнчү тартиптеги бир ДТдан жана $y(t)$ үчүн биринчи тартиптеги бир ВИДТдан турган (4.39) эквиваленттүү системага алып келет. (4.39) системасынын ар бир теңдемеси үчүн өзүнчө өзгөртүүлөр жүргүзүлөт, б. а. өзүнчө методдор колдонулат, ар бир теңдеме үчүн өзгөртүүлөрдүн жыйынтыктары кошулат жана интегралдык барабарсыздыкка өтүү жүргүзүлүп, ага карата Ю. А. Веддин, З. Пахыровдун (1973-ж.) диссертациясынын 2.1-леммасы же интегралдык барабарсыздык жөнүндө 1-леммасы колдонулат, мында биринчи теңдеме - (4.38) ДТга теңдемелерди квадратка көтөрүү методу (С. Искандаров,1981-ж.), ал эми экинчи теңдеме - $y(t)$ үчүн ВИДТга В. Вольтерранын өзгөртүү методу жана кесүүчү функциялар методу (С. Искандаров, 1980-ж.) өркүндөтүлөт.

4.5-бөлүмдө 4-главадагы изилдөөлөрдүн жыйынтыктарына талдоо жүргүзүлөт.

3 жана 4-главалардын бардык теоремаларына жана кээ бир натыйжаларына алынган шарттардын табигыйлыгын көрсөткөн иллюстрациялык мисалдар келтирилген.

3 жана 4-главалардын теоремалары жана натыйжалары кээ бир жардамчы параметрлерди, салмактык жана кесүүчү функцияларды камтыйт.

Эгерде аларды конкреттүү түрдө тандап алсак, анда каралып жаткан теңдемелердин чечимдеринин асимптоталык касиеттери үчүн коэффициенттик белгилерди алууга болот. Түзүлгөн иллюстрациялык мисалдарда бул жардамчы параметрлерди жана функцияларды тандоо көрсөтүлгөн.

КОРУТУНДУ

Бул диссертациялык иште:

1. Тиешелүү сызыктуу бир тектүү ДТларда изилденип жаткан касиеттерге ээ болбогон чечимдер болушу мүмкүн болгон учурда экинчи жана үчүнчү тартиптеги сызыктуу бир тектүү ВИДТнин бардык чечимдеринин аргументинин чексиз өсүшүндө жарым окто чектелгендиктин жана нөлгө умтулуунун жетиштүү шарттары белгиленген.
2. Тиешелүү сызыктуу бир тектүү жана бир тектүү эмес төртүнчү тартиптеги ДТларда жарым окто чектелбеген чечимдер болушу мүмкүн болгон учурда төртүнчү тартиптеги ВИДТнин бардык чечимдеринин жарым окто чектелгендигинин жетиштүү шарттары белгиленген.
3. Системага маалыматтардын стандарттуу эмес методунун биринчи вариантын өркүндөтүү менен ушул ВИДТ коэффициенттери жана ядролору жарым октун кээ бир чекиттеринде дифференциалданбашы мүмкүн болгон учурда төртүнчү жана бешинчи тартиптеги сызыктуу ВИДТнын чечимдеринин туруктуулугунун жетиштүү шарттары белгиленген.
4. Белгисиз функциянын үчүнчү туундусунун коэффициенти оң эмес болгон учурда, б. а. төртүнчү тартиптеги тиешелүү сызыктуу бир тектүү ДТнын ар кандай нөлдүк эмес чечими асимптоталык туруктуу эмес болуп саналган учурда төртүнчү тартиптеги сызыктуу бир тектүү ВИДТнын чечимдеринин асимптоталык туруктуулугунун жетиштүү шарттары табылган.
5. Кээ бир төрт жардамчы параметрди жана бир салмактык функцияны, теңдемелерди квадратка көтөрүү методун, жарым-жартылай кесүү методун киргизүү аркылуу системага маалыматтардын стандарттуу эмес методун өркүндөтүү менен бешинчи тартиптеги ВИДТнын чечимдеринин асимптоталык туруктуулугунун жетиштүү шарттары белгиленген.

Белгилей кетсек, биз санап өткөн натыйжалар системага маалыматтардын стандарттуу эмес методунун түрдүү варианттарын, В. Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүү методун, теңдемелерди квадратка көтөрүү методун, кесүүчү функциялар методун, жарым-жартылай кесүү методун өркүндөтүү жана колдонуу, биринчи түрдөгү интегралдык барабарсыздык жөнүндө лемманы, Штольц формасындагы Лопиталь эрежесин, Люстерник-Соболевдин леммасын колдонуу менен алынды. Мындай изилдөө методикасы Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институтунда иштелип чыкканын да белгилейбиз.

ПРАКТИКАЛЫК СУНУШТАМАЛАР

Диссертациялык иш теориялык мүнөзгө ээ жана анын натыйжалары жарым окто жогорку тартиптердеги ВИДТнын асимптоталык теориясында жана эс тутуму бар үзгүлтүксүз чөйрөдө болуучу кээ бир процесстердин туруктуулугун изилдөөдө, мисалы, аэро жана космодинамикада, ошондой эле магистранттар жана докторанттар - математиктер жана механиктер үчүн атайын курстарды иштеп чыгууда колдонулушу мүмкүн.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН ТЕМАСЫ БОЮНЧА ЖАРЫЯЛАНГАН ЭМГЕКТЕРДИН ТИЗМЕСИ

1. Комарцова, Е. А. Достаточные условия устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка на полуоси [Текст] / Е. А. Комарцова // Вестник КРСУ. – 2018. – Т. 18, № 12. – С. 8-4. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36979465
2. Комарцова, Е. А. О методе исследования влияния интегральных возмущений на поведение решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / С. Искандаров, Е. А. Комарцова // Дифференц. уравнения. – М., 2019. – Т. 55, № 6. – С. 902-903. (О семинаре по качественной теории дифференц. уравнений в Московском университете, аннотация доклада 19 апреля 2019 г.).
3. Комарцова, Е. А. Достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка [Текст] / Е. А. Комарцова // Вестник КРСУ. – 2019. – Т. 19, № 12. – С. 11-15. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42347924
4. Комарцова, Е. А. О методе исследования влияния интегральных возмущений на поведение решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / С. Искандаров, Е. А. Комарцова // Вестник КРСУ. – 2020. – Т. 20, № 12. – С. 30-34. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44744332
5. Комарцова, Е. А. О специфической асимптотической устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегродифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / С. Искандаров, Е. А. Комарцова // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, Механика. – 2021. – № 1. – С. 22-28. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45631046
6. Komartsova, E. A. Specific Asymptotic Stability of Solutions to a Linear Homogeneous Volterra Integro-Differential Equation of the Fourth Order [Text] / S. Iskandarov, E. A. Komartsova // Moscow Univ. Math. Bull. – 2021. – Vol. 76, No. 1. – P. 22-28. – Режим доступа: https://doi.org/10.3103/S0027132221010034

7. Komartsova, E. A. On the influence of integral perturbations to the boundedness of solutions of a fourth-order differential equations on the half-axis [Text] / S. Iskandarov, E. A. Komartsova // Вестник Института математики НАН КР. – 2021. – № 1. – С. 38-46. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49330033
8. Komartsova, E. A. Sufficient conditions for the stability of solutions of fourth order linear Volterra integro-differential equation [Text] / E. A. Komartsova // Вестник Института математики НАН КР. – 2021. – № 1. – С. 47-54. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49330034
9. Комарцова, Е. А. Об исследовании влияния интегральных возмущений на поведение решений линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / С. Искандаров, Е. А. Комарцова // Вестник КРСУ. – 2021. – Т. 21, № 4. – С. 10-16. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45932545
10. Komartsova, E. A. On the influence of integral perturbations on the boundedness of solutions of a fourth-order linear differential equation [Text]/ S. Iskandarov, E. Komartsova // TWMS J. Pure Appl. Math. – 2022. – Vol. 13, N_o 1. – P. 3-9. – Режим доступа: http://www.twmsj.az/Current.aspx

Комарцова Елена Алексеевнанын 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн «Жогорку тартиптеги сызыктуу Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын турумдуулугунун жетиштүү шарттары» темасында жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунтуу сөздөр: Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеме (ВТИДТ), интегралдык мүчөлөрдүн таасири, чектелгендик, нөлгө умтулуу, турумдуулук, асимптотикалык турумдуулук, спецификалык белги.

Изилдөөнүн объектиси: Вольтерра тибиндеги экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи тартиптеги сызыктуу ИДТлер.

Изилдөөнүн предмети: 2-, 3- жана 4- тартиптеги сызыктуу ВТИДТлердин бардык чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендиги жана нөлгө умтулуусу; 4- жана 5- тартиптеги сызыктуу ВТИДТлердин чыгарылыштарынын жарым октогу турумдуулугу жана АТ-гу.

Изилдөөнүн максаты: 2-, 3- жана 4- тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин (ДТ) чыгарылыштарынын абалына интегралдык мүчөлөрдүн таасирин изилдөө; 4- жана 5-тартиптеги ВТИДТлердин чыгарылыштарынын жарым октогу турумдуулугун жана АТ-гунун жетиштүү шарттарын табуу.

Изилдөөнүн методдору: Теңдемелерди системага стандарттык эмес келтирүү методу, В. Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүп түзүү методу, теңдемелерди квадратка көтөрүү методу, кесүүчү функциялар методу, жекече кесүү методу, интегралдык барабарсыздыктар методу, Штольц формасындагы Лопиталь эрежеси жана Люстерник-Соболевдин леммасы.

Иштин илимий жаңылыгы: 2-, 3- тартиптеги сызыктуу бир тектүү (СБТ) ВТИДТлердин бардык чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендигинин жана нөлгө умтулуусунун жана 4- тартиптеги СБТ ВТИДТ-нин бардык чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендигинин жетиштүү шарттары, бул теңдемелерге тиешелүү ДТлердин чыгарылыштары аталган касиеттерге ээ болбой калуусу мүмкүн учурунда, алынды. Сызыктуу 4- жана 5- тартиптеги ВТИДТлердин чыгарылыштарынын турумдуулугунун жетиштүү шарттары бул теңдемелердин коэффициенттери жана ядролору кээ бир чекиттерде дифференцирленбеши мүмкүн болгон учурда алынды. 4- тартиптеги СБТ ВТИДТнин чыгарылыштарынын АТ-гу бул теңдемеге тиешелүү СБТ ДТнин АТ эмес учурунда табылды. Теңдемелерди системага стандарттык эмес келтирүү методун өнүктүрүү аркылуу 5- тартиптеги сызыктуу ВТИДТнин чыгарылыштарынын АТ-гунун жетиштүү шарттары алынды.

Алынган жыйынтыктардын теориялык жана практикалык маанилүүлүгү. Иштин жыйынтыктары жогорку тартиптеги ВТИДУлердин жана кээ бир эс тутуму бар чөйрөдөгү процесстердин турумдуулук теориясында колдонулушу мүмкүн.

РЕЗЮМЕ

диссертации Комарцовой Елены Алексеевны на тему «Достаточные условия устойчивости решений линейных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра, влияние интегральных возмущений, ограниченность, стремление к нулю, устойчивость, асимптотическая устойчивость, специфический признак.

Объект исследования: Линейные интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра второго, третьего, четвертого и пятого порядков.

Предмет исследования: Изучение ограниченности на полуоси, стремления к нулю всех решений линейных ВИДУ 2-го, 3-го и 4-го порядков; устойчивости и АУ решений линейных ВИДУ 4-го и 5-го порядков на полуоси.

Цель работы. Развитием и применением качественных методов, разработанных в ИМ НАН КР, изучить влияние интегральных возмущений на поведение решений линейных ДУ 2-го, 3-го и 4-го порядков на полуоси; установить достаточные условия устойчивости и АУ решений линейных ВИДУ 4-го и 5-го порядков на полуоси.

Методы исследования. Нестандартный метод сведения к системе, метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод возведения уравнений в квадрат, метод срезывающих функций, метод частичного срезывания, метод интегральных неравенств, правило Лопиталя в форме Штольца и лемма Люстерника - Соболева.

Научная новизна работы: Установлены: достаточные условия ограниченности на полуоси и стремления к нулю всех решений ЛО (линейного однородного) ВИДУ 2-го, 3-го порядков и ограниченности всех решений ВИДУ 4-го порядка в случае, когда соответствующие ЛО ДУ могут иметь решения, не обладающие изучаемыми свойствами. Установлены достаточные условия устойчивости решений линейных ВИДУ 4-го и 5-го порядков в случае, когда коэффициенты и ядра этих ВИДУ могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуоси. Найдены достаточные условия АУ решений ЛО ВИДУ 4-го порядка в случае, когда любое ненулевое решение соответствующего ЛО ДУ 4-го порядка не является АУ. Развитием нестандартного метода сведения к системе установлены достаточные условия АУ решений ВИДУ 5-го порядка.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов: Результаты могут быть использованы в теории устойчивости ВИДУ высоких порядков и некоторых процессов, происходящих в сплошных средах с памятью.

SUMMARY

of the thesis of Elena Alekseevna Komartsova on "Sufficient conditions for the stability of linear Volterra integro-differential equations of high orders solutions", submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: integro-differential equations of Volterra type, influence of integral perturbations, boundedness, tending to zero, stability, asymptotic stability, specific attribute.

Object of investigation: Linear integro-differential equations of the Volterra type of the second, third, fourth and fifth orders.

Subject of investigation: Study of boundedness on the semiaxis, tending to zero of all solutions of linear VIDEs of the 2nd, 3rd and 4th orders; stability and AS solutions of linear VIDEs of the 4th and 5th orders on the semiaxis.

Purpose of the work. To study the influence of integral perturbations on the behavior of the 2nd, 3rd and 4th orders linear DE solutions on the semiaxis by developing and applying qualitative methods developed at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic; establish sufficient conditions for stability and AS of solutions of linear 4th and 5th order VIDEs on the semiaxis.

Investigation methods. Non-standard method of reduction to a system, W. Volterra's equation transformation method, equation squaring method, cutting function method, partial cutting method, integral inequalities method, L'Hopital's rule in the Stolz form and Lyusternik-Sobolev's lemma.

Scientific novelty of the work: Sufficient conditions for boundedness on the semi-axis and tending to zero for all solutions of LH (linear homogeneous) VIDEs of the 2nd, 3rd orders and boundedness of all solutions for the VIDEs of 4th order in the case when the corresponding LH DE can have solutions, which do not have the studied properties are established. Sufficient conditions for the stability of linear 4th and 5th order VIDEs solutions are established in the case when the coefficients and kernels of these VIDEs can be non-differentiable at some points of the semiaxis. Sufficient conditions for the AS of 4th order LH VIDEs solutions are found in the case when any nonzero solution of the corresponding LH DE of the 4th order is not an AS. Sufficient conditions for the AS of 5th order VIDEs solutions are established by developing a non-standard method of reduction to a system.

Theoretical and practical significance of the results obtained: The results of the work can be used in the theory of stability of high-order VIDEs and some processes occurring in continuums with memory.

БУЛ ИШТЕ КОЛДОНУЛГАН ШАРТТУУ БЕЛГИЛӨӨЛӨР ЖАНА ТҮШҮНҮКТӨР

Белгилерди киргизели: бардык өзгөрмөлөр жана турактуу чоңдуктар анык болуп саналат; «∞» «$+\infty$» дегенди билдирет; «$\in$» символу «таандык» дегенди билдирет; $R=(-\infty,\infty)$ - сан огу; $R_+=[0,\infty)$ - жарым ок; $J=\left[t_0,\infty\right), t_0\in R$ - чексиз жарым интервал; $t\geq t_0$ жазуусу $t\in J$ дегенди билдирет, $C(J,R)$ - R маанилеринде J жарым интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги, б.а. $x(t)\in C(J,R)$ деген $x(t)$ функциясы $t\in J$ да аныкталган жана үзгүлтүксүз жана R ден маанини кабыл алат дегенди билдирет; $C^n(J,R)$ - R ден маанилери менен J жарым интервалында аныкталган жана n жолу үзгүлтүксүз дифференциалдануучу функциялардын мейкиндиги; $L^1(J,R_+)$ - J жарым интервалында интеграцияланууччу тескери эмес функциялардын мейкиндиги, б.а. $x(t)\in L^1(J,R_+)\Leftrightarrow x(t)\geq 0,\ \int\limits_{t_0}^{\infty}x(t)\,dt<\infty$; $L^2(J,R)$ - R маанилеринде J жарым интервалында квадрат менен интеграцияланууччу функциялардын мейкиндиги, б. а. $x(t)\in L^2(J,R)\Leftrightarrow\int\limits_{t_0}^{\infty}x^2(t)\,dt<\infty$; ВИДТ – Вольтерра интегро-дифференциалдык теңдеме, б.а. Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеме; ДТ - дифференциалдык теңдеме; эгерде $\exists\ const\,M>0$ деген $\left|x(t)\right|\leq M$ болсо жана $x(t)=O(1), t\in J$ дегенди билдирсе, $x(t)$ функциясы J чексиз жарым интервалында чектелген деп айтылат; n-чи тартиптеги сызыктуу ВИДТнин чечимдеринин туруктуулугу деп анын $(n-1)$ тартибин кошо алгандагы бардык чечимдеринин жана анын туундуларынын J жарым интервалындагы чектүүлүгү түшүнүлөт; n - чи тартиптеги сызыктуу ВИДТнин чечимдеринин асимптоталык туруктуулугу деп анын $(n-1)$ тартибин кошо алгандагы бардык чечимдеринин жана анын туундуларынын $t\to\infty$ болгондогу нөлгө умтулуусу түшүнүлөт; нөлгө умтулуу деп $t\to\infty$ болгондо нөлгө умтулуу түшүнүлөт; «системага стандарттуу эмес келтируу методдору» деп «системага жогорку тартиптеги ВИДТнин маалыматтарынын стандарттуу эмес методдору» түшүнүлөт; t, (t,τ) башталган бардык пайда болгон функциялар үзгүлтүксүз болуп саналат жана $t\geq t_0$, $t\geq\tau\geq t_0$.болгондо катышка ээ болот.