**Институт математики Национальной академии наук
Кыргызской Республики**

Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына

Диссертационный совет Д 01.22.647

На правах рукописи
УДК 517.968.72

Комарцова Елена Алексеевна

Достаточные условия устойчивости решений линейных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2023

Работа выполнена в лаборатории теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики.

Научный руководитель: Искандаров Самандар, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики.

Официальные оппоненты: Дауылбаев Муратхан Кудайбергенович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби.

Баратлиев Керим Бараталиевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа факультета математики и информатики Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына.

Ведущая организация: кафедра информационных систем и программирования факультета математики и информационных технологий Ошского государственного университета, Кыргызстан, город Ош, улица Ленина, 331.

Защита состоится 10 января 2024 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 01.22.647 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете имени Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374.

Идентификатор защиты – https://vc1.vak.kg/b/012-ltf-b7j-lgy.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики (720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265а), и Кыргызском национальном университете имени Ж. Баласагына, (720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547) и на сайте www.math.kg; www.vak.kg.

Автореферат разослан 9 декабря 2023 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент Шаршембиева Ф. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Как отмечено в монографии С. Искандарова [4, с. 5], в конце XIX - начале XX века во многом благодаря великому итальянскому математику В. Вольтерра появились работы, в которых изучены общие и качественные свойства решений интегро-дифференциальных уравнений, содержащие интегралы с переменными верхними пределами интегрирования. В последствии такие уравнения получили названия: «Интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра» в знак признания заслуг В. Вольтерра. Отметим, что многие исследования В. Вольтерра проведены в связи с изучением биологических и механических процессов с учетом их предыстории (явления последействия). Они отражены в его монографиях [5, 60] и оказали благотворное влияние на формирование современной общей и качественной теории ВИДУ (вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений).

В связи с практическими и теоретическими потребностями усилиями отечественных и зарубежных ученых создана современная общая и качественная теория ВИДУ. В становлении этой теории значительный вклад внесли такие ученые, как: В. Вольтерра (1881-1940 гг.), Я. В. Быков (1951-1957 гг.), М. И. Иманалиев (1956-2015 гг.), Ю. А. Ведь (1960-2006 гг.), А. И. Боташев (1962-1998 гг.), Л. Е. Кривошеин (1962 г.), Е. А. Барбашин (1957-1967 гг.), Н. В. Азбелев (1979-2001 гг.), А. Д. Мышкис (1949-1977, 2003 гг.), Н. Н. Красовский (1956-1959 гг.), А.М. Самойленко (1973-1976 гг.), В. Р. Винокуров (1967 г.), Р. Беллман (1967 г.), К. Р. Кук (1967 г.), J. J. Levin (1963-1968 гг.), J. A. Nohel (1964-1971 гг.), C. Corduneanu (1963-1973 гг.), К. А. Касымов (1968-2004 гг.), К. Алымкулов (1972-1992), К. Какишов (1973-1991 гг.), А. Саадабаев (1982-2009 гг.), М. К. Дауылбаев (1979-2023 гг.), П. С. Панков (1971-1992 гг.), Г. Ражапов (1965-1973 гг.), З. Пахыров (1971-2017 гг.), С. Искандаров (1978-2023 гг.), А. Асанов (1977-2023 гг.), А. Байзаков (2003-2023 гг.), А. Т. Халилов (1994-2023 гг.), З. А. Жапарова (2009-2014, 2022 гг.), В. Лакшмикантам и С. Лила (1969-2007 гг.), А. А. Мартынюк (1985-1991 гг.), В. П. Максимов (1982-1991 гг.), Л. Ф. Рахматуллина (1978-1991 гг.), М. Е. Драхлин (1986 г.), Л. М. Березанский (1982-2012 гг.), А. И. Домошницкий (2012 г.), П. М. Симонов (1991-2001 гг.), В. С. Сергеев (1986-2000 гг.), T. A. Burton (1978-2005 гг.), R. P. Agarwal (1982-2012 гг), G. Gripenberg, S.-O. Londen и O. Staffans (1979-1990 гг.), C. Tunç (2016-2022 гг.), F. Alahmadi (2018 г.) и др. Во многих их работах разработаны новые методы и созданы новые направления научных исследований.

Как известно, изучение устойчивости некоторых процессов с предысторией приводит к необходимости развития теории устойчивости решений ВИДУ. Для развития такой теории разработаны мощные методы исследований различных авторов, которые отражены во введении и в содержании монографии С. Искандарова [С. Искандаров, 2002]. В последнее время в работах С. Искандарова и его учеников появились еще другие методы, такие как: метод получения специфических признаков устойчивости и АУ (асимптотической устойчивости) решений линейных однородных ВИДУ первого, второго и до шестого порядков включительно; метод исследования влияния интегральных возмущений типа Вольтерра на поведение решений линейных ДУ второго, третьего и четвертого порядков с применением леммы об интегральном неравенстве первого рода; нестандартные методы сведения к системе для исследования асимптотических свойств решений ВИДУ высоких порядков с помощью нестандартных замен, содержащие некоторые вспомогательные параметры и весовые функции; применение леммы Люстерника-Соболева.

Анализ результатов, полученных этими методами, показывает, что их дальнейшее развитие и применение в сочетании с другими хорошо известными методами, дает возможность исследовать асимптотические свойства решений новых классов ВИДУ второго, третьего, четвертого и пятого порядков на полуоси, что подтверждает актуальность темы настоящей диссертационной работы.

Связь темы диссертации с крупными научными проектами и основными научно-исследовательскими работами. Работа выполнена в рамках проектов НИР Института математики НАН КР: «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, топологических и аналитических методов в теории устойчивости динамических систем, разрешимости обратных задач, экономических и геофизических процессов» (2015-2017), номер гос. регистрации 0007125; «Развитие асимптотических, топологических и аналитических методов в теории равномерных топологических и кинематических пространств, эволюционных систем, оптимизационных экономических задач, математическом моделировании» (2018-2019), номер гос. регистрации 0007664, и включена в соответствующие отчеты по этим проектам.

Цели и задачи исследования. Развитием и применением качественных методов, разработанных в ИМ НАН КР, изучить влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на поведение решений соответствующих ДУ второго, третьего и четвертого порядков на полуоси; установить достаточные условия устойчивости решений линейных ВИДУ четвертого и пятого порядков на полуоси; асимптотической устойчивости решений линейного однородного ВИДУ четвертого порядка при неположительности коэффициента третьей производной неизвестной функции; асимптотической устойчивости решений линейных ВИДУ пятого порядка на полуоси.

Научная новизна работы. В главе 3 установлены достаточные условия ограниченности на полуоси и стремления к нулю при неограниченном росте аргумента всех решений линейного однородного ВИДУ второго и третьего порядков, в случае, когда соответствующие линейные однородные ДУ могут иметь решения, не обладающие изучаемыми свойствами. Установлены также достаточные условия ограниченности на полуоси всех решений ВИДУ четвертого порядка в случае, когда соответствующие линейные однородные и неоднородные ДУ четвертого порядка могут иметь неограниченные на полуоси решения. Таким образом, изучено влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на поведение решений линейных ДУ второго, третьего и четвертого порядков на полуоси. Отметим, что применение леммы об интегральном неравенстве первого рода показало, что некоторые срезывающие функции играют главную роль для решения поставленных нами задач, т. е. они помогают исследовать влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на поведение решений новых классов ВИДУ на полуоси. Также отметим, что применение правила Лопиталя в форме Штольца помогло установить стремление к нулю при неограниченном росте аргумента всех решений рассматриваемых линейных ВИДУ второго и третьего порядков на полуоси.

В главе 4 развитием первого варианта метода нестандартного сведения к системе установлены достаточные условия устойчивости решений линейных ВИДУ четвертого и пятого порядков в случае, когда коэффициенты и ядра этих ВИДУ могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуоси.

Отмечается, что полученные результаты являются новыми и для соответствующих линейных ДУ четвертого и пятого порядков с малыми свободными членами.

Найдены достаточные условия АУ решений линейного однородного ВИДУ четвертого порядка при неположительности коэффициента третьей производной неизвестной функции, т. е. в случае, когда любое ненулевое решение соответствующего линейного однородного ДУ четвертого порядка не является АУ, что подтверждается формулой Остроградского - Лиувилля. Эти результаты удалось достигнуть, главным образом, развитием нестандартного метода сведения к системе, метода возведения уравнений в квадрат и метода частичного срезывания.

Развитием нестандартного метода сведения к системе, метода возведения уравнений в квадрат, метода частичного срезывания установлены достаточные условия АУ решений ВИДУ пятого порядка. Замечено, что полученные результаты являются новыми и для соответствующего линейного ДУ пятого порядка с малым свободным членом.

Практическая значимость полученных результатов. Настоящая работа носит теоретический характер и ее результаты могут найти применение в асимптотической теории ВИДУ высоких порядков на полуоси; при исследовании устойчивости некоторых процессов, происходящих в сплошных средах с памятью, например, в аэро и космодинамике; при разработке спецкурсов для магистрантов и докторантов – математиков и механиков.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

Установление достаточных условий:

– ограниченности на полуоси и стремления к нулю при неограниченном росте аргумента всех решений линейного однородного ВИДУ второго и третьего порядков в случае, когда соответствующие линейные однородные ДУ могут иметь решения, не обладающие изучаемыми свойствами;
– ограниченности на полуоси всех решений ВИДУ четвертого порядка в случае, когда соответствующие линейные однородные и неоднородные ДУ четвертого порядка могут иметь неограниченные на полуоси решения;
– устойчивости решений линейных ВИДУ четвертого и пятого порядков в случае, когда коэффициенты и ядра этих ВИДУ могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуоси, развитием первого варианта метода нестандартного сведения к системе;
– АУ решений линейного однородного ВИДУ четвертого порядка в случае, когда любое ненулевое решение соответствующего линейного однородного ДУ четвертого порядка не является асимптотически устойчивым, развитием метода частичного срезывания;
– АУ решений ВИДУ пятого порядка, развитием нестандартного метода сведения к системе с введением некоторых четырех вспомогательных параметров и одной весовой функции, метода возведения уравнений в квадрат, метода частичного срезывания.

Личный вклад соискателя. Цели и задачи исследования диссертационной работы поставлены научным руководителем С. Искандаровым. В диссертацию включены материалы, которые принадлежат автору.

Апробация результатов исследований. Результаты настоящей работы были доложены и обсуждены на:

– Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики и информатики», посв. 80-летию со дня рождения академика НАН РК Касымова К. А. (г. Алматы, КазНУ им. аль-Фараби, 21-23 дек., 2015 г.);
– II Борубаевских чтениях (КНУ им. Ж. Баласагына, ИМ НАН КР, 1 марта, 2018 г.);

– Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы теоретической и прикладной математики», посв. 100-летию со дня рождения крупнейшего ученого и педагога, профессора Кривошеина Леонида Евгеньевича (г. Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына, 18 окт. 2019 г.);
– Весеннем семестре семинара по качественной теории дифференциальных уравнений (г. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 19 апр., 2019 г);
– Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посв. 35-летию со дня образования Института математики НАН КР (г. Бишкек, ИМ НАН КР, 24 мая 2019 г);
– Научном семинаре кафедры «Высшая математика» КРСУ им. Б. Н. Ельцина (науч. рук. – к.ф.-м.н., Л. Г. Лелевкина) (г. Бишкек, КРСУ, 26 апр., 2021 г., 12 апр., 2023 г.);
– Международной научно-практической конференции «Инновации в науке и технике», посв. памяти первого декана ЕТФ профессора Юрикова В.А. (г. Бишкек, КРСУ, 20-21 апр., 2022 г.);
– Научном семинаре Института математики НАН КР (науч. рук. – акад. Борубаев А. А.) (г. Бишкек, ИМ НАН КР, 27 июня, 2023 г.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основное содержание диссертации опубликовано в статьях [1, 3-10] и в аннотации доклада в МГУ им. М. В. Ломоносова [2]. В совместных работах [2, 4-7, 9, 10] постановка задач и обсуждение результатов принадлежит научному руководителю С. Искандарову, доказательство теорем, следствий и построение иллюстративных примеров – автору.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, четырех глав, содержащих 14 разделов, заключения, практических рекомендаций и списка использованных источников из 75 наименований, 98 стр. компьютерного текста.

В автореферате использована и сохранена система нумерации, принятая в диссертации: двойная сквозная нумерация внутри каждой главы. Например, формула (4.2) – это вторая формула главы 4, теорема 3.5 – это пятая теорема главы 3, пример 3.4 – это четвертый пример главы 3.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ» приводится краткий обзор научной литературы, близкой по содержанию, к решаемым задачам в данной диссертационной работе.

В главе 2 «МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» определены объект, предмет, задачи для исследований. Проделан краткий обзор некоторых методов решений задач настоящей диссертационной работы. Изложена методика исследований, т. е. изложена суть применяемых и развиваемых конкретных методов, позволяющих решить поставленные нами задачи. Приведены 2 леммы об интегральных неравенствах; леммы о преобразованиях двойных интегралов и преобразованиях, связывающих интегральные члены со свободными членами рассматриваемых ВИДУ на полуоси; также приведены лемма о правиле Лопиталя в форме Штольца и лемма Люстерника-Соболева.

Переходим к изложению краткого содержания собственных результатов автора, которые получены в главах 3, 4.

В данной диссертационной работе рассматриваются линейные интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра вида:

$$x^{(n)}(t)+\sum_{k=0}^{m}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+\int_{t_0}^{t}Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)d\tau\right]=f(t),\quad t\ge t_0, \tag{2.1}$$

а именно: второго порядка ($n=2,\ m=1,\ f(t)\equiv 0$); третьего порядка ($n=3$, $m=2,\ f(t)\equiv 0$); четвертого порядка ($n=4,\ m=3,\ f(t)\neq 0$ тождественно и $f(t)\equiv 0$); пятого порядка ($n=5,\ m=4$), где $a_k(t),\ Q_k(t,\tau)$ $(k=0,1,2,3,4)$, $f(t)$ являются непрерывными при $t\ge t_0,\ t\ge\tau\ge t_0$. Речь будет идти о решениях ВИДУ (2.1) $x(t)\in C^n(J,R)$ $(n=2,3,4,5)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k=0,1,...,n-1;n=2,3,4,5)$. Каждое такое решение существует и единственно.

Глава 3, состоящая из 4 разделов, посвящена исследованию влияния интегральных возмущений типа Вольтерра на поведение решений соответствующих ДУ второго, третьего и четвертого порядков на полуоси.

В разделе 3.1 установлены достаточные условия ограниченности на полуинтервале J и стремления к нулю при $t\to\infty$ всех решений линейного однородного ВИДУ второго порядка:

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)\right]d\tau=0,\ t\ge t_0 \tag{3.1}$$

в случае, когда соответствующее линейное однородное ДУ:

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=0,\qquad t\ge t_0 \tag{3.1$_0$}$$

может иметь решения, не обладающие изучаемыми свойствами, т.е. изучить влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность на J и стремление к нулю при $t\to\infty$ решений ДУ (3.1$_0$).

Приведем основные результаты этого раздела. В ВИДУ (3.1), аналогично С. Искандарову (2006 г.), сделаем нестандартную замену

$$x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t), \tag{3.2}$$

где λ - некоторый вспомогательный параметр, $0<W(t)$ - некоторая весовая функция, $y=y(t)$ - новая неизвестная функция. Тогда ВИДУ (3.1) сводится к эквивалентной системе из ДУ (3.2) для $x(t)$ и ВИДУ первого порядка для $y(t)$:

$$y'(t)+b_1(t)y(t)+b_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\left[P(t,\tau)x(\tau)+K(t,\tau)y(\tau)\right]d\tau=0,\quad t\ge t_0,$$

где $b_1(t)\equiv a_1(t)-\lambda^2+W'(t)\left(W(t)\right)^{-1}$, $b_0(t)\equiv\left[a_0(t)-\lambda^2 a_1(t)+\lambda^4\right]\left(W(t)\right)^{-1}$, $P(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\left[Q_0(t,\tau)-\lambda^2 Q_1(t,\tau)\right]$, $K(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}Q_1(t,\tau)W(\tau)$.

В диссертации такая система обозначена через (3.3). Далее, аналогично монографии С. Искандарова (2002 г.), вводятся условия и обозначения: $K(t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau)$, (*K*); $\psi_i(t)$ $\left(i=1..n\right)$ - некоторые срезывающие функции, обозначим $R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1}$ $\left(i=1..n\right)$, и к системе (3.3) развиваются метод преобразования уравнений В. Вольтерра, применяется преобразование (1.13) леммы 1.4 из автореферата докторской диссертации С. Искандарова (2003 г.), затем применяется лемма 2.1 диссертации или лемма 1 об интегральном неравенстве Ю. А. Ведь, З. Пахырова (1973 г.) и в результате доказывается

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть 1) $\lambda=0$; 2) $R_i(t,t_0)\ge 0$, $R'_{i\tau}(t,\tau)\ge 0$, существуют функции $R_i^*(t)\ge 0$, $R_i^{**}(t)\ge 0$ такие, что $R'_{it}(t,t_0)\le R_i^*(t)R_i(t,t_0)$, $R''_{it\tau}(t,\tau)\le R_i^{**}(t)R'_{i\tau}(t,\tau)$ $\left(i=1..n\right)$. Тогда для любого решения $\left(x(t),y(t)\right)$ системы (3.3) справедлива оценка:

$$\left(x(t)\right)^2+2\lambda^2\int_{t_0}^{t}\left(x(s)\right)^2ds+\left(y(t)\right)^2+\sum_{i=1}^{n}R_i(t,t_0)\left(Y_i(t,t_0)\right)^2\le c_*M_1(t),\qquad (3.5)$$

где $M_1(t)\equiv\exp\left(\int_{t_0}^{t}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[R_i^*(s)+R_i^{**}(s)\right]+\left|a_1(s)+W'(s)\left(W(s)\right)^{-1}\right|+\right.\right.$

$$\left.\left.+\left|a_0(s)\right|\left(W(s)\right)^{-1}+\int_{t_0}^{s}\left[\left(W(s)\right)^{-1}\left|Q_0(s,\tau)\right|+\left|K_0(s,\tau)\right|\right]d\tau\right\}ds\right).$$

Пусть, кроме того, 3) $R_j(t,t_0)>0$, $\psi_j(t)>0$, $\psi'_j(t)\ge 0$, $q_j(t,c_*)\ge 0$, $q'_j(t,c_*)\ge 0$, $q'_j(t,c_*)\left(\psi_j(t)\right)^{-1}\in L^1(J,R_+)$ $(1\le j\le n)$; 4) $W'(t)\in L^1(J,R)$, где $q_j(t,c_*)\equiv\sqrt{c_*}\left(R_j(t,t_0)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(M_1(t)\right)^{\frac{1}{2}}$. Тогда $\int_{t_0}^{t}y(s)ds=O(1)$ и любое решение ВИДУ (3.1) $x(t)=O(1)$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть 1) $\lambda\ne 0$; 2) выполняется условие 2) теоремы 3.1. Тогда для любого решения $\left(x(t),y(t)\right)$ системы (3.3) справедлива оценка (3.5), где в правой части вместо функции $M_1(t)$ стоит

$$M_2(t) \equiv \exp\left(\int_{t_0}^{t} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[R_i^*(s) + R_i^{**}(s) \right] + |b_1(s)| + |b_0(s)| + \int_{t_0}^{s} \left[|P(s,\tau)| + |K_0(s,\tau)| \right] d\tau \right\} ds \right).$$

Пусть, кроме того, 3) выполняется условие 3) теоремы 3.1, где в функции $q_j(t,c_*)$ вместо $M_1(t)$ стоит $M_2(t)$; 4) $W^{(k)}(t) \to 0$ при $t \to \infty$ ($k = 0,1$). Тогда $\int_{t_0}^{t} y(s)ds = O(1)$ и любое решение ВИДУ (3.1) $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

В обеих теоремах из соответствующей оценки (3.5) следует оценка:

$$R_j(t,t_0)\left(\int_{t_0}^{t} \psi_j(\eta) y(\eta) d\eta \right)^2 \le c_* M_r(t) \quad (1 \le j \le n;\ r = 1,2),$$

из которой имеем $\left| \int_{t_0}^{t} \psi_j(\eta) y(\eta) d\eta \right| \le \sqrt{c_*} \left(R_j(t,t_0) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(M_r(t) \right)^{\frac{1}{2}}$. (3.6)

К интегральному неравенству первого рода (3.6) применяем следующую лемму С. Искандарова (2002, 2017): пусть $\psi(t) > 0$, $\psi'(t) \ge 0$, $q(t,c) \ge 0$, $q'(t,c) \ge 0$, $0 \le c = const$, $t \ge t_0$. Тогда из интегрального неравенства первого рода $\left| \int_{t_0}^{t} \psi(s) z'(s) ds \right| \le q(t,c)$ вытекает оценка

$$|z(t)| \le |z(t_0)| + \left(\psi(t_0) \right)^{-1} q\left(t_0, c\right) + \int_{t_0}^{t} q'(s,c) \left(\psi(s) \right)^{-1} ds.$$

В результате из (3.6) получаем $\int_{t_0}^{t} y(s)ds = O(1)$. На основании этого из замены (3.2) при $\lambda = 0$ вытекает утверждение теоремы 3.1. Далее для доказательства утверждения теоремы 3.2, т. е. при $\lambda \ne 0$ переходим к известной формуле Коши (Н. М. Матвеев, 1967 г.) для любого начального значения $x(t_0)$ из замены (3.2): $x(t) = e^{-\lambda^2 (t-t_0)} \left[x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda^2 (s-t_0)} W(s) y(s) ds \right]$, и интегрируя по частям, имеем:

$$x(t) = e^{-\lambda^2 (t-t_0)} \left\{ x(t_0) + e^{\lambda^2 (t-t_0)} W(t) \int_{t_0}^{t} y(\eta) d\eta - \int_{t_0}^{t} e^{\lambda^2 (s-t_0)} \left[\lambda^2 W(s) + W'(s) \right] \left(\int_{t_0}^{s} y(\eta) d\eta \right) ds \right\}$$

Далее в этом равенстве с учетом условий теоремы 3.2 переходим к пределу при $t \to \infty$, при этом применяем правило Лопиталя в форме Штольца (Ландау Э., 1948; Демидович Б. П., 1967). Тогда получаем: $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

Приведем простейший

ПРИМЕР 3.1. Для ВИДУ второго порядка

$$x''(t)-7(t+1)^{-1}x'(t)+12(t+1)^{-2}x(t)+\int\limits_0^t \frac{e^{-t+\tau+25(t^2+\tau^2)}(t+\tau+1)}{t+\tau+2}\left[x(\tau)+x'(\tau)\right]d\tau=0,$$

$t\geq 0$ выполняются все условия теорем 3.1, 3.2 при $\lambda=0$ и $\lambda=1$, $W(t)\equiv e^{-t}$ здесь $t_0=0$, $P(t,\tau)\equiv 0$, $n=1$, $\psi_1(t)\equiv e^{25t^2}$, $R_1(t,\tau)\equiv\dfrac{t+\tau+1}{t+\tau+2}$, $R_1^*(t)\equiv\dfrac{1}{(t+1)(t+2)}$, $R_1^{**}(t)\equiv 0$ и поэтому для любого решения этого ИДУ верны утверждения теорем 3.1, 3.2. Однако для соответствующего ДУ Эйлера:

$$x''(t)-7(t+1)^{-1}x'(t)+12(t+1)^{-2}x(t)=0,\qquad t\geq 0$$

утверждения теорем 3.1, 3.2 не справедливы для любых их ненулевых решений, что подтверждается общим решением этого ДУ: $x(t)=\left[c_1+(t+1)^4c_2\right](t+1)^2$ (c_1, c_2 - произвольные постоянные).

Таким образом, нам удалось найти класс ВИДУ (3.1), для которого задача 3.1 решаема.

Раздел 3.2 посвящен задаче 3.2 установления достаточных условий ограниченности на J и стремления к нулю при $t\to\infty$ всех решений ВИДУ третьего порядка вида:

$$x'''(t)+\sum_{k=0}^{2}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+\int\limits_{t_0}^{t}Q_k\left(t,\tau\right)x^{(k)}\left(\tau\right)d\tau\right]=0,\quad t\geq t_0 \qquad (3.11)$$

в случае, когда соответствующее линейное однородное ДУ третьего порядка

$$x'''(t)+\sum_{k=0}^{2}a_k(t)x^{(k)}(t)=0,\quad t\geq t_0 \qquad (3.11_0)$$

может иметь решения, не обладающие изучаемыми свойствами.

Для решения этой задачи в ВИДУ (3.11), аналогично С. Искандарову (2010 г.), делаются нестандартные замены: $x'(t)+\lambda_1 x(t)=W_1(t)y(t)$, $y'(t)+\lambda_2 y(t)=W_2(t)u(t)$, где λ_1,λ_2 - некоторые вспомогательные параметры, $0<W_1(t),W_2(t)$ - некоторые весовые функции, $y(t),u(t)$ - новые неизвестные функции. Тогда ВИДУ (3.11) сводится к эквивалентной системе (3.14) из двух ДУ первого порядка для $x(t)$, $y(t)$ и одного ВИДУ первого порядка для $u(t)$. Далее методика из раздела 3.1 развивается к системе (3.14), что приводит к решению задачи 3.2, приводится иллюстративный пример.

В разделе 3.3 решена задача установления достаточных условий ограниченности на полуинтервале J всех решений ВИДУ четвертого порядка вида:

$$x^{(4)}(t)+\sum_{k=0}^{3}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+\int_{t_0}^{t}Q_k\left(t,\tau\right)x^{(k)}(\tau)d\tau\right]=f(t),\quad t\ge t_0 \qquad (3.23)$$

в случае, когда соответствующие линейные ДУ четвертого порядка:

$$L(t,x)\equiv x^{(4)}(t)+a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=0,\quad t\ge t_0, \qquad (3.23_0)$$

$L(t,x)=f(t),\quad t\ge t_0,$ (3.23_1) могут иметь неограниченные на J решения.

Как нам известно, такая задача ранее не изучалась.

Для решения задачи 3.3, аналогично С. Искандарову (2006 г.), делается нестандартная замена (3.24): $x''(t)+\lambda^2x(t)=W(t)y(t)$, где $0\ne\lambda$ - некоторый вспомогательный параметр, $\lambda\in R$; $0<W(t)$ - некоторая весовая функция, $y(t)$ - некоторая неизвестная функция. Что сведет ВИДУ четвертого порядка (3.23) к эквивалентной системе (3.25), состоящей из одного ДУ для $x(t)$ и одного ВИДУ для $y(t)$. Далее к системе (3.25) сначала применяется метод преобразования уравнений В. Вольтерра (для любого решения системы $\left(x(t),y(t)\right)$ ее первое уравнение - ДУ умножается на $x'(t)$, второе уравнение - ВИДУ умножается на $y'(t)$), затем применяется метод срезывающих функций, при этом вводятся: условие (K) раздела 3.1, условие (F): $F(t)=\sum_{i=0}^{n}F_i(t)$; $\psi_i(t)$, $(i=1..n)$ – некоторые срезывающие функции, $E_i(t)\equiv F_i(t)\left(\psi_i(t)\right)^{-1}$, $R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1}$, условие ($R$): $R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t)\,(i=1..n)$, $c_i(t)\,(i=1..n)$ – некоторые функции, применяются леммы 1.4, 1.5 из автореферата докторской диссертации С. Искандарова (2003 г.). После применения леммы 2.1 диссертации или леммы 1 об интегральном неравенстве Ю.А. Ведь, З. Пахырова (1973 г.) и леммы об интегральном неравенстве С. Искандарова из раздела 3.1 устанавливается оценка для $\left|y(t)\right|$ системы (3.25). Тогда ограниченность любого решения $x(t)$ заданного ВИДУ четвертого порядка (3.23) вытекает из интегрального представления задачи Коши (Н. М. Матвеев, 1967 г):

$$x(t)=x(t_0)\cos\lambda(t-t_0)+\frac{1}{\lambda}x'(t_0)\sin\lambda(t-t_0)+\frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t}\left[\sin\lambda(t-s)\right]W(s)y(s)ds$$

из нестандартной замены (3.24) для любых начальных значений $x(t_0)$, $x'(t_0)$ на основании условия $W(t)\in L^1\left(J,R_+\setminus\{0\}\right)$. Приводятся 4 иллюстративных примера.

В разделе 3.4. проведен анализ результатов исследований главы 3.

Глава 4 содержит 5 разделов и посвящена установлению достаточных условий устойчивости решений линейных ВИДУ четвертого и пятого порядков на полуоси; специфической асимптотической устойчивости решений линейного однородного ВИДУ четвертого порядка; асимптотической устойчивости решений линейных ВИДУ пятого порядка на полуоси.

Раздел 4.1 посвящен решению задачи 4.1 установления достаточных условий устойчивости решений линейного ВИДУ четвертого порядка вида:

$$x^{(4)}(t)+a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\big[Q_0(t,\tau)x(\tau)+$$
$$+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)\big]d\tau=f(t),\quad t\ge t_0. \tag{4.1}$$

Приведем основной результат этого раздела. Аналогично следуя Искандарову С. (2009 г.), в ВИДУ (4.1) делаются следующие нестандартные замены $x'(t)=W_1(t)y(t),\quad y'(t)=W_2(t)z(t),\quad z'(t)=W_3(t)u(t),$ где $0<W_k(t)$ $(k=1,2,3)$ - некоторые вспомогательные весовые функции, $y(t), z(t), u(t)$ - новые неизвестные функции. Тогда ВИДУ (4.1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$x'(t)=W_1(t)y(t),\quad y'(t)=W_2(t)z(t),\quad z'(t)=W_3(t)u(t),$$
$$u'(t)+b_3(t)u(t)+b_2(t)z(t)+b_1(t)y(t)+b_0(t)x(t)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\big[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)y(\tau)+P_2(t,\tau)z(\tau)+K(t,\tau)u(\tau)\big]d\tau=F(t),\ t\ge t_0, \tag{4.9}$$

где $W(t)=W_1(t)W_2(t)W_3(t),$

$$b_3(t)\equiv a_3(t)+\big(W(t)\big)^{-1}\Big\{\Big[W_1'(t)W_2(t)+\big(W_1(t)W_2(t)\big)'\Big]W_3(t)+W'(t)\Big\},$$

$$b_2(t)\equiv\big(W(t)\big)^{-1}\Big\{W_1''(t)W_2(t)+\Big[W_1'(t)W_2(t)+\big(W_1(t)W_2(t)\big)'\Big]'+$$
$$+a_3(t)\Big[W_1'(t)W_2(t)+\big(W_1(t)W_2(t)\big)'\Big]+a_2(t)W_1(t)W_2(t)\Big\},$$

$$b_1(t)\equiv\big(W(t)\big)^{-1}\Big\{W_1'''(t)+a_3(t)W_1''(t)+a_2(t)W_1'(t)+a_1(t)W_1(t)\Big\},$$

$$b_0(t)\equiv\big(W(t)\big)^{-1}a_0(t),\ P_0(t,\tau)\equiv\big(W(t)\big)^{-1}Q_0(t,\tau),$$

$$P_1(t,\tau)\equiv\big(W(t)\big)^{-1}\Big\{Q_1(t,\tau)W_1(\tau)+Q_2(t,\tau)W_1'(\tau)+Q_3(t,\tau)W_1''(\tau)\Big\},$$

$$P_2(t,\tau)\equiv\big(W(t)\big)^{-1}\Big\{Q_2(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)+Q_3(t,\tau)\Big[W_1'(\tau)W_2(\tau)+\big(W_1(\tau)W_2(\tau)\big)'\Big]\Big\},$$

$$K(t,\tau)\equiv\big(W(t)\big)^{-1}Q_3(t,\tau)W(\tau),\ F(t)\equiv\big(W(t)\big)^{-1}f(t).$$

Для исследования системы (4.9) развиваем метод преобразования уравнений В. Вольтерра (для любого решения $\big(x(t),y(t),z(t),u(t)\big)$ умножаем первое ДУ системы (4.9) на $x(t)$, второе ДУ - на $y(t)$, третье ДУ - на $z(t)$, четвертое ВИДУ - на $u(t)$) затем предполагая выполненными условия (K) раздела 3.1, условие (F) раздела 3.3, вводя функции $\psi_i(t)\,(i=1..n)$ - некоторые срезывающие функции, обозначения $R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1}$, $E_i(t)\equiv F_i(t)\left(\psi_i(t)\right)^{-1}$, условие ($R$): $R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t)\,(i=1..n)$; $c_i(t)\,(i=1..n)$ - некоторые функции, используя лемму 2.2 диссертации или леммы 1.4, 1.5 из автореферата докторской диссертации С. Искандарова (2003 г.), и применяя лемму 2.1 диссертации или лемму 1 об интегральном неравенстве Ю.А. Ведь, З. Пахырова (1973 г.) доказывается следующая

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть 1) $W_k(t)>0\;\left(k=1,2,3\right)$; выполняются условия ($K$), ($F$), ($R$); 2) $b_3(t)\ge 0$; 3) $A_i(t)\ge 0$, $B_i(t)\ge 0$, $B_i'(t)\le 0$, $R_{i\tau}'(t,\tau)\ge 0$, существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$, $c_i(t)$, $R_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что $A_i'(t)\le A_i^*(t)A_i(t)$, $\left(E_i^{(k)}(t)\right)^2\le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)\;\left(k=0,1\right)$, $R_{it\tau}''(t,\tau)\le R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)$ $\left(i=1..n;\quad k=0,1\right)$;

4) $\displaystyle W_j(t)+|b_k(t)|+|F_0(t)|+\int_{t_0}^{t}|P_k(t,\tau)|d\tau+\int_{t_0}^{t}|K_0(t,\tau)|d\tau\in L_1\left(J,R_+\setminus\{0\}\right)$ $\;(j=1,2;$ $k=0,1,2)$; 5) функции $W_j(t)\;\left(j=1,2,3\right)$, $W_1'(t)$; $W_1''(t)$; $\left(W_1(t)W_2(t)\right)'$ ограничены на полуинтервале J. Тогда любое решение $x(t)$ ВИДУ (4.1) устойчиво.

Условия 1) - 4) теоремы 4.1 обеспечивают $x(t)=O(1)$, $y(t)=O(1)$, $z(t)=O(1)$. В силу $W_1(t)=O(1)$ из (4.2) имеем $x'(t)=O(1)$. Из соотношения (4.5) на основании $W_1'(t)=O(1)$, $W_2(t)=O(1)$ получаем, что $x''(t)=O(1)$. Так как $W_j(t)=O(1)\;\left(j=1,2,3\right)$, $W_1''(t)=O(1)$, $\left(W_1(t)W_2(t)\right)'=O(1)$, то из соотношения (4.6) следует, что $x'''(t)=O(1)$. (Здесь $x(t)$ - любое решение ВИДУ (4.1)). Следовательно, для любого решения $x(t)$ ВИДУ четвертого порядка (4.1) справедливы: $x^{(k)}(t)=O(1)\;\left(k=0,1,2,3\right)$, что эквивалентно устойчивости $x(t)$ ВИДУ (4.1).

ПРИМЕР 4.1. Для ВИДУ четвертого порядка

$$x^{(4)}(t)+\left[6+e^{\sqrt{t}}\right]x'''(t)+\left[11+3e^{\sqrt{t}}-e^{-2t}\right]x''(t)+\left[6+2e^{\sqrt{t}}-e^{-2t}+\frac{e^{-2t}}{(t+1)^2}\right]x'(t)-$$

$$-\frac{e^{-3t}}{t^2+\sqrt{t}+1}x(t)+\int_0^t\left\{-\frac{e^{-3t}\left(\sin t\right)^{\frac{1}{7}}}{\left(t+\tau+4\right)^5}x(\tau)+\left[2Q_3(t,\tau)-\frac{e^{-3t}}{(t+\tau+1)^2}+\frac{e^{-3t}}{(t+2\tau+3)^4}\right]x'(\tau)+\right.$$

$$\left.+\left[3Q_3(t,\tau)-\frac{e^{-3t}}{(t+\tau+1)^2}\right]x''(\tau)+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)\right\}d\tau=\frac{e^{t^2-3t}\left(\sin 3t\right)^{\frac{1}{5}}}{t-\tau+8}-\frac{e^{-3t}}{(t+2)^2},\quad t\ge 0,$$

где $Q_3(t,\tau)\equiv e^{-3t+3\tau}\left\{\frac{t+\tau+6}{t+\tau+7}+\frac{1}{t-\tau+5}\right\}e^{t^2+\tau^2}\left(\sin 3t\sin 3\tau\right)^{\frac{1}{5}}-\frac{e^{-3t}\left(\cos t\right)^{\frac{1}{3}}}{t^2+\tau+1}$

выполняются все условия теоремы 4.1 при $W_j(t)\equiv e^{-t}$ $\left(j=1,2,3\right)$. Здесь $t_0=0$,

$b_3(t)\equiv e^{\sqrt{t}}$, $\quad b_2(t)\equiv -e^{-t}$, $\quad b_1(t)\equiv\frac{1}{(t+1)^2}$, $\quad b_0(t)\equiv -\frac{1}{t^2+\sqrt{t}+1}$,

$P_0(t,\tau)\equiv -\frac{\left(\sin t\right)^{\frac{1}{7}}}{\left(t+\tau+4\right)^5}$, $\quad P_1(t,\tau)\equiv\frac{e^{-\tau}}{\left(t+2\tau+3\right)^4}$, $\quad P_2(t,\tau)\equiv -\frac{e^{-2\tau}}{\left(t+\tau+1\right)^2}$, $\quad n=1$,

$\psi_i(t)\equiv e^{t^2}\left(\sin 3t\right)^{\frac{1}{5}}$, $\quad R_1(t,\tau)\equiv\frac{t+\tau+6}{t+\tau+7}+\frac{1}{t-\tau+5}$, $\quad A_1(t)\equiv\frac{t+6}{t+7}$, $\quad B_1(t)\equiv\frac{1}{t+5}$,

$A_1^*(t)\equiv\frac{1}{\left(t+6\right)\left(t+7\right)}$, $\quad R_1^*(t)\equiv 0$, $\quad E_1(t)\equiv\frac{1}{t+8}$, $\quad c_1(t)\equiv\frac{1}{t+5}$,

$K_0(t,\tau)\equiv -\frac{e^{-3\tau}(\cos t)^{\frac{1}{3}}}{t^2+\tau+1}$, $F_0(t)\equiv -\frac{1}{\left(t+2\right)^2}$. Следовательно, любое решение приведенного ВИДУ устойчиво при $t\in R_+$.

Отметим, что, как показывает иллюстративный пример, коэффициенты и ядра ВИДУ четвертого порядка вида (4.1) могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуинтервала J.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из теоремы 4.1 при $Q_k(t,\tau)\equiv 0$ $(k=0,1,2,3)$, $f(t)\equiv f_0(t)$ вытекают достаточные условия асимптотической устойчивости решений соответствующего линейного неоднородного ДУ четвертого порядка, насколько нам известно, эти результаты для такого ДУ будут новыми и не охватываются результатами из монографий Л. Чезари (1964 г.), И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия (1990 г.).

В разделе 4.2 решена задача 4.2 об установлении достаточных условий асимптотической устойчивости решений линейного однородного ВИДУ четвертого порядка вида:

$$x^{(4)}(t)-a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^t\left[Q_0(t,\tau)x(\tau)+\right.$$

$$\left.+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)\right]d\tau=0,\quad t\ge t_0,\qquad (4.11)$$

при условии

$$a_3(t) \geq 0\,, \qquad (a_3)$$

т. е. в случае, когда любое ненулевое решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$x^{(4)}(t) - a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0, \quad t \geq t_0 \qquad (4.11_0)$$

не является асимптотически устойчивым, что подтверждается формулой Остроградского – Лиувилля. Для решения этой задачи, аналогично С. Искандарову (2007 г.), в ВИДУ (4.11) делается нестандартная замена:

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = W(t)y(t), \qquad (4.12)$$

где $p,\, q$ - некоторые вспомогательные параметры, причем $p > 0,\, q > 0$; $0 < W(t)$ - некоторая весовая функция; $y(t)$ - новая неизвестная функция и ВИДУ четвертого порядка (4.11) сводится к эквивалентной системе (4.13), состоящей из ДУ второго порядка для $x(t)$ и из ВИДУ второго порядка для $y(t)$. Дальнейшие преобразования делаются сначала отдельно для каждого уравнения системы (4.13), аналогично С. Искандарову (2012 г.), затем они складываются. А именно, для произвольно фиксированного решения $\left(x(t), y(t)\right)$ первое уравнение, т. е. ДУ (4.12), системы (4.13) возводится в квадрат (Искандаров С., 1981 г.), интегрируется в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, и получается тождество (4.14); второе уравнение, т. е. ВИДУ для $y(t)$, исследуется развитием метода преобразования уравнений В. Вольтерра, методом частичного срезывания (Искандаров С., Шабданов Д. Н., 2004 г.), что приведет к тождеству (4.16); в силу условия (a_3) и условия $W'(t) \leq 0$ в тождестве (4.16) присутствует неположительный интегральный член

$$I(t) \equiv -2\int_{t_0}^{t} b_3(s)\left(y'(s)\right)^2 ds\,, \qquad (4.17)$$

который не позволяет применить лемму 2.1 диссертации или лемму 1 об интегральном неравенстве из статьи Ю. А. Ведь, З. Пахырова (1973 г.). Этот интеграл преобразуется введением некоторой срезывающей функции $\psi(t)$ и интегрированием по частям, аналогично преобразованиям (Искандаров С., 2002 г.) или преобразованиям (Иманалиев М. И., Искандаров С., 2009 г.), при этом функция $\psi(t)$ вводится следующим образом:

$$I(t) = -2\int_{t_0}^{t} b_3(s)\left(\psi(s)\right)^{-1} y'(s)\psi(s)y'(s)ds = -2\int_{t_0}^{t} \alpha(s)y'(s)d_sY(s,t_0) =$$

$$= -2\alpha(t)y'(t)Y(t,t_0) + 2\int_{t_0}^{t}\left[\alpha'(s)y'(s) + \alpha(s)y''(s)\right]Y(s,t_0)ds, \qquad (4.18)$$

где $\alpha(t) \equiv b_3(t)\left(\psi(t)\right)^{-1}$, что является аналогом преобразования (3.108) (Искандаров С., 2002 г.) или преобразования (9) (Иманалиев М. И., Искандаров С., 2009 г.), и в этом преобразовании $y''(s)$ заменяется на ее выражение из второго уравнения системы (4.13); после этого делаются аналоги преобразований (3.109)-(3.113) (Искандаров С., 2002 г.) или аналоги преобразований (10)-(12) (Иманалиев М. И., Искандаров С., 2009 г.) и получается тождество (4.23). Сложение тождеств (4.14) и (4.23) приведет к окончательному тождеству (4.24), которое позволяет перейти к интегральному неравенству для применения леммы 2.1 диссертации или леммы 1 об интегральном неравенстве из статьи Ю. А. Ведь, З. Пахырова (1973 г.).

Раздел 4.3 посвящен решению задачи 4.3 об установлении достаточных условий устойчивости любого решения линейного ВИДУ пятого порядка вида:

$$x^{(5)}(t)+\sum_{k=0}^{4}[a_k(t)x^{(k)}(t)+\int_{t_0}^{t}Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)d\tau]=f(t),\ t\ge t_0. \qquad (4.27)$$

Для решения этой задачи развивается методика исследования задачи 4.1. В ВИДУ (4.27), аналогично разделу 4.1, делаются следующие нестандартные замены: $x'(t)=W_1(t)y_1(t),$ (4.28); $y_1'(t)=W_2(t)y_2(t),$ (4.29); $y_2'(t)=W_3(t)y_3(t),$ (4.30); $y_3'(t)=W_4(t)y_4(t),$ (4.31), где $0<W_k(t)$ $(k=1,2,3,4)$ - некоторые весовые функции, $y_k(t)$ $(k=1,2,3,4)$ - новые неизвестные функции. Тогда ВИДУ пятого порядка (4.27) сводится к эквивалентной системе (4.32), состоящей из четырех ДУ (4.28)-(4.31) и одного ВИДУ для $y_4(t)$.

К системе (4.32) развивается метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод срезывающих функций (С. Искандаров, 2002 г.), при этом для произвольно фиксированного решения $(x(t),y_1(t),\,y_2(t),y_3(t),\,y_4(t))$ системы (4.32) ее первое уравнение умножается на $x(t)$, второе - на $y_1(t)$, третье - на $y_2(t)$, четвертое - на $y_3(t)$, пятое ИДУ - на $y_4(t)$, затем эти соотношения складываются, проводится интегрирование в пределах от t_0 до t, и аналогично разделу 4.1 вводятся условия (K), (q), срезывающие функции $\psi_i(t)$, функции $R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)$ $(i=1..n)$, применяются лемма 2.2 диссертации или леммы 1.4, 1.5 из автореферата докторской диссертации С. Искандарова (2003 г.), и используется лемма 2.1 диссертации или лемма 1 об интегральном неравенстве Ю. А. Ведь, З. Пахырова (1973 г.).

В разделе 4.4 решается задача 4.4 о получении достаточных условий АУ решений ВИДУ пятого порядка следующего вида:

$$x^{(5)}(t)+\sum_{k=0}^{4}[a_k(t)x^{(k)}(t)+\int_{t_0}^{t}Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)d\tau]=f(t),\ t\ge t_0. \qquad (4.37)$$

Для решения этой задачи развивается метод исследования АУ решений линейного ВИДУ четвертого порядка на полуоси, разработанный С. Искандаровым (2014 г.), а именно, сначала делается следующая нестандартная замена:

$$x^{(4)}(t)+p_3x'''(t)+p_2x''(t)+p_1x'(t)+p_0x(t)=W(t)y(t), \tag{4.38}$$

где p_k - некоторые вспомогательные параметры, причем $p_k>0$ $(k=0,1,2,3)$; $0<W(t)$ - некоторая весовая функция, $y(t)$ - новая неизвестная функция, которая приведет ВИДУ пятого порядка (4.37) к эквивалентной системе (4.39), состоящей из одного ДУ четвертого порядка (4.38) и одного ВИДУ первого порядка для $y(t)$. Для каждого уравнения системы (4.39) делаются отдельные преобразования, т. е. применяются отдельные методы, результаты преобразований для каждого уравнения сложатся, и осуществляется переход к интегральному неравенству, к которому применяется лемма 2.1 диссертации или лемма 1 об интегральном неравенстве Ю. А. Ведь, З. Пахырова (1973 г.), при этом к первому уравнению - к ДУ (4.38) применяется метод возведения уравнений в квадрат (С. Искандаров, 1981 г.), а ко второму уравнению - к ВИДУ для $y(t)$ - развиваются метод преобразования В. Вольтерра и метод срезывающих функций (С. Искандаров, 1980 г.).

В разделе 4.5 сделан анализ результатов исследований главы 4.

На все теоремы и на некоторые следствия глав 3, 4 приведены иллюстративные примеры, показывающие естественность полученных условий.

Теоремы и следствия глав 3, 4 содержат некоторые вспомогательные параметры, весовые и срезывающие функции. Если их будем выбирать конкретно, то можно получить коэффициентные признаки для асимптотических свойств решений рассматриваемых уравнений. В построенных иллюстративных примерах показан выбор этих вспомогательных параметров и функций.

ВЫВОДЫ

В данной диссертационной работе:

1. Установлены достаточные условия ограниченности на полуоси и стремления к нулю при неограниченном росте аргумента всех решений линейного однородного ВИДУ второго и третьего порядков в случае, когда соответствующие линейные однородные ДУ могут иметь решения, не обладающие изучаемыми свойствами.
2. Установлены также достаточные условия ограниченности на полуоси всех решений ВИДУ четвертого порядка в случае, когда соответствующие линейные однородные и неоднородные ДУ четвертого порядка могут иметь неограниченные на полуоси решения.
3. Развитием первого варианта метода нестандартного сведения к системе установлены достаточные условия устойчивости решений линейных ВИДУ четвертого и пятого порядков в случае, когда коэффициенты и ядра этих ВИДУ могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуоси.
4. Найдены достаточные условия асимптотической устойчивости

решений линейного однородного ВИДУ четвертого порядка в случае неположительности коэффициента третьей производной неизвестной функции, т. е. в случае, когда любое ненулевое решение соответствующего линейного однородного ДУ четвертого порядка не является асимптотически устойчивым.

5. Развитием нестандартного метода сведения к системе с введением некоторых четырех вспомогательных параметров и одной весовой функции, метода возведения уравнений в квадрат, метода частичного срезывания установлены достаточные условия асимптотической устойчивости решений ВИДУ пятого порядка.

Отметим, что перечисленные нами результаты были получены развитием и применением различных вариантов нестандартного метода сведения к системе, метода преобразования уравнений В. Вольтерра, метода возведения уравнений в квадрат, метода срезывающих функций, метода частичного срезывания, применением леммы об интегральном неравенстве первого рода, правила Лопиталя в форме Штольца, леммы Люстерника-Соболева. Также отметим, что такая методика исследований была разработана в Институте математики НАН Кыргызской Республики.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Диссертационная работа носит теоретический характер и ее результаты могут найти применение в асимптотической теории ВИДУ высоких порядков на полуоси и при исследовании устойчивости некоторых процессов, происходящих в сплошных средах с памятью, например, в аэро и космодинамике, а также при разработке спецкурсов для магистрантов и докторантов - математиков и механиков.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Комарцова, Е. А. Достаточные условия устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка на полуоси [Текст] / Е. А. Комарцова // Вестник КРСУ. – 2018. – Т. 18, № 12. – С. 8-4. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36979465
2. Комарцова, Е. А. О методе исследования влияния интегральных возмущений на поведение решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / С. Искандаров, Е. А. Комарцова // Дифференц. уравнения. – М., 2019. – Т. 55, № 6. – С. 902-903. (О семинаре по качественной теории дифференц. уравнений в Московском университете, аннотация доклада 19 апреля 2019 г.).
3. Комарцова, Е. А. Достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка [Текст] / Е. А. Комарцова // Вестник КРСУ. – 2019. – Т. 19, № 12. – С. 11-15. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42347924

4. Комарцова, Е. А. О методе исследования влияния интегральных возмущений на поведение решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / С. Искандаров, Е. А. Комарцова // Вестник КРСУ. – 2020. – Т. 20, № 12. – С. 30-34. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44744332
5. Комарцова, Е. А. О специфической асимптотической устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегродифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / С. Искандаров, Е. А. Комарцова // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, Механика. – 2021. – № 1. – С. 22-28. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45631046
6. Komartsova, E. A. Specific Asymptotic Stability of Solutions to a Linear Homogeneous Volterra Integro-Differential Equation of the Fourth Order [Text] / S. Iskandarov, E.A. Komartsova // Moscow Univ. Math. Bull. – 2021. – Vol. 76, No. 1. –P. 22-28. – Режим доступа: https://doi.org/10.3103/S0027132221010034
7. Komartsova, E. A. On the influence of integral perturbations to the boundedness of solutions of a fourth-order differential equations on the half-axis [Text] / S. Iskandarov, E. A. Komartsova // Вестник Института математики НАН КР. – 2021. – № 1. – С. 38-46. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49330033
8. Komartsova, E. A. Sufficient conditions for the stability of solutions of fourth order linear Volterra integro-differential equation [Text] / E. A. Komartsova // Вестник Института математики НАН КР. – 2021. – № 1. – С. 47-54. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49330034
9. Комарцова, Е. А. Об исследовании влияния интегральных возмущений на поведение решений линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / С. Искандаров, Е. А. Комарцова // Вестник КРСУ. – 2021. – Т. 21, № 4. – С. 10-16. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45932545
10. Komartsova, E. A. On the influence of integral perturbations on the boundedness of solutions of a fourth-order linear differential equation [Text]/ S. Iskandarov, E. Komartsova // TWMS J. Pure Appl. Math. – 2022. – Vol. 13, No 1. – P. 3-9. – Режим доступа: http://www.twmsj.az/Current.aspx

Комарцова Елена Алексеевнанын 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн «Жогорку тартиптеги сызыктуу Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын турумдуулугунун жетиштүү шарттары» темасында жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунтуу сөздөр: Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеме (ВТИДТ), интегралдык мүчөлөрдүн таасири, чектелгендик, нөлгө умтулуу, турумдуулук, асимптотикалык турумдуулук, спецификалык белги.

Изилдөөнүн объектиси: Вольтерра тибиндеги экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи тартиптеги сызыктуу ИДТлер.

Изилдөөнүн предмети: 2-, 3- жана 4- тартиптеги сызыктуу ВТИДТлердин бардык чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендиги жана нөлгө умтулуусу; 4- жана 5- тартиптеги сызыктуу ВТИДТлердин чыгарылыштарынын жарым октогу турумдуулугу жана АТ-гу.

Изилдөөнүн максаты: 2-, 3- жана 4- тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин (ДТ) чыгарылыштарынын абалына интегралдык мүчөлөрдүн таасирин изилдөө; 4- жана 5-тартиптеги ВТИДТлердин чыгарылыштарынын жарым октогу турумдуулугун жана АТ-гунун жетиштүү шарттарын табуу.

Изилдөөнүн методдору: Теңдемелерди системага стандарттык эмес келтирүү методу, В. Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүп түзүү методу, теңдемелерди квадратка көтөрүү методу, кесүүчү функциялар методу, жекече кесүү методу, интегралдык барабарсыздыктар методу, Штольц формасындагы Лопиталь эрежеси жана Люстерник-Соболевдин леммасы.

Иштин илимий жаңылыгы: 2-, 3- тартиптеги сызыктуу бир тектүү (СБТ) ВТИДТлердин бардык чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендигинин жана нөлгө умтулуусунун жана 4- тартиптеги СБТ ВТИДТ-нин бардык чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендигинин жетиштүү шарттары, бул теңдемелерге тиешелүү ДТлердин чыгарылыштары аталган касиеттерге ээ болбой калуусу мүмкүн учурунда, алынды. Сызыктуу 4- жана 5- тартиптеги ВТИДТлердин чыгарылыштарынын турумдуулугунун жетиштүү шарттары бул теңдемелердин коэффициенттери жана ядролору кээ бир чекиттерде дифференцирленбеши мүмкүн болгон учурда алынды. 4- тартиптеги СБТ ВТИДТнин чыгарылыштарынын АТ-гу бул теңдемеге тиешелүү СБТ ДТнин АТ эмес учурунда табылды. Теңдемелерди системага стандарттык эмес келтирүү методун өнүктүрүү аркылуу 5- тартиптеги сызыктуу ВТИДТнин чыгарылыштарынын АТ-гунун жетиштүү шарттары алынды.

Алынган жыйынтыктардын теориялык жана практикалык маанилүүлүгү. Иштин жыйынтыктары жогорку тартиптеги ВТИДУлердин жана кээ бир эс тутуму бар чөйрөдөгү процесстердин турумдуулук теориясында колдонулушу мүмкүн.

РЕЗЮМЕ

диссертации Комарцовой Елены Алексеевны на тему «Достаточные условия устойчивости решений линейных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра, влияние интегральных возмущений, ограниченность, стремление к нулю, устойчивость, асимптотическая устойчивость, специфический признак.

Объект исследования: Линейные интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра второго, третьего, четвертого и пятого порядков.

Предмет исследования: Изучение ограниченности на полуоси, стремления к нулю всех решений линейных ВИДУ 2-го, 3-го и 4-го порядков; устойчивости и АУ решений линейных ВИДУ 4-го и 5-го порядков на полуоси.

Цель работы. Развитием и применением качественных методов, разработанных в ИМ НАН КР, изучить влияние интегральных возмущений на поведение решений линейных ДУ 2-го, 3-го и 4-го порядков на полуоси; установить достаточные условия устойчивости и АУ решений линейных ВИДУ 4-го и 5-го порядков на полуоси.

Методы исследования и аппаратура. Нестандартный метод сведения к системе, метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод возведения уравнений в квадрат, метод срезывающих функций, метод частичного срезывания, метод интегральных неравенств, правило Лопиталя в форме Штольца и лемма Люстерника - Соболева.

Полученные результаты и их новизна: Установлены: достаточные условия ограниченности на полуоси и стремления к нулю всех решений ЛО (линейного однородного) ВИДУ 2-го, 3-го порядков и ограниченности всех решений ВИДУ 4-го порядка в случае, когда соответствующие ЛО ДУ могут иметь решения, не обладающие изучаемыми свойствами. Установлены достаточные условия устойчивости решений линейных ВИДУ 4-го и 5-го порядков в случае, когда коэффициенты и ядра этих ВИДУ могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуоси. Найдены достаточные условия АУ решений ЛО ВИДУ 4-го порядка в случае, когда любое ненулевое решение соответствующего ЛО ДУ 4-го порядка не является АУ. Развитием нестандартного метода сведения к системе установлены достаточные условия АУ решений ВИДУ 5-го порядка.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов: Результаты могут быть использованы в теории устойчивости ВИДУ высоких порядков и некоторых процессов, происходящих в сплошных средах с памятью.

SUMMARY

of the thesis of Elena Alekseevna Komartsova on "Sufficient conditions for the stability of linear Volterra integro-differential equations of high orders solutions", submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: integro-differential equations of Volterra type, influence of integral perturbations, boundedness, tending to zero, stability, asymptotic stability, specific attribute.

Object of investigation: Linear integro-differential equations of the Volterra type of the second, third, fourth and fifth orders.

Subject of investigation: Study of boundedness on the semiaxis, tending to zero of all solutions of linear VIDEs of the 2nd, 3rd and 4th orders; stability and AS solutions of linear VIDEs of the 4th and 5th orders on the semiaxis.

Purpose of the work. To study the influence of integral perturbations on the behavior of the 2nd, 3rd and 4th orders linear DE solutions on the semiaxis by developing and applying qualitative methods developed at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic; establish sufficient conditions for stability and AS of solutions of linear 4th and 5th order VIDEs on the semiaxis.

Investigation methods. Non-standard method of reduction to a system, W. Volterra's equation transformation method, equation squaring method, cutting function method, partial cutting method, integral inequalities method, L'Hopital's rule in the Stolz form and Lyusternik-Sobolev's lemma.

Scientific novelty of the work: Sufficient conditions for boundedness on the semi-axis and tending to zero for all solutions of LH (linear homogeneous) VIDEs of the 2nd, 3rd orders and boundedness of all solutions for the VIDEs of 4th order in the case when the corresponding LH DE can have solutions, which do not have the studied properties are established. Sufficient conditions for the stability of linear 4th and 5th order VIDEs solutions are established in the case when the coefficients and kernels of these VIDEs can be non-differentiable at some points of the semiaxis. Sufficient conditions for the AS of 4th order LH VIDEs solutions are found in the case when any nonzero solution of the corresponding LH DE of the 4th order is not an AS. Sufficient conditions for the AS of 5th order VIDEs solutions are established by developing a non-standard method of reduction to a system.

Theoretical and practical significance of the results obtained: The results of the work can be used in the theory of stability of high-order VIDEs and some processes occurring in continuums with memory.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ, ЕДИНИЦ, ТНРМИНОВ, СОКРАЩЕНИЙ

Введем обозначения: все переменные и постоянные величины являются действительными; «∞» означает «$+\infty$»; символ «$\in$» означает «принадлежит»; $R=(-\infty,\infty)$ - числовая ось; $R_+=[0,\infty)$ - полуось; $J=\left[t_0,\infty\right), t_0\in R$ - бесконечный полуинтервал; запись $t\geq t_0$ означает $t\in J$, $C(J,R)$ - пространство функций, определенных и непрерывных на полуинтервале J со значениями в R, т. е. $x(t)\in C(J,R)$ означает, что функция $x(t)$ определена и непрерывна при $t\in J$ и принимает значения из R ; $C^n(J,R)$ - пространство функций, определенных и n раз непрерывно дифференцируемых на полуинтервале J со значениями из R; $L^1(J,R_+)$ - пространство неотрицательных функций, интегрируемых на полуинтервале J , т. е. $x(t)\in L^1(J,R_+)\Leftrightarrow x(t)\geq 0, \ \int_{t_0}^{\infty} x(t)\,dt<\infty$; $L^2(J,R)$ - пространство функций, интегрируемых с квадратом на полуинтервале J со значением в R, т. е. $x(t)\in L^2(J,R)\Leftrightarrow \int_{t_0}^{\infty} x^2(t)\,dt<\infty$; ВИДУ - вольтеррово интегро-дифференциальное уравнение, т. е. интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра; ДУ - дифференциальное уравнение; говорят, что функция $x(t)$ ограничена на бесконечном полуинтервале J, если $\exists$ $const\, M>0$ такая, что $|x(t)|\leq M$ и обозначают $x(t)=O(1), t\in J$; под устойчивостью решений линейного ВИДУ n-го порядка понимается ограниченность на полуинтервале J всех его решений и их производных до $(n-1)$-го порядка включительно; под асимптотической устойчивостью решений линейного ВИДУ n-го порядка понимается стремление к нулю при $t\to\infty$ всех его решений и их производных до $(n-1)$-го порядка включительно; под стремлением к нулю понимается стремление к нулю при $t\to\infty$; под «нестандартные методы сведения к системе» понимается «нестандартные методы сведения ВИДУ высоких порядков к системе»; все фигурирующие функции от t, (t,τ) являются непрерывными и соотношения имеют место при $t\geq t_0$, $t\geq\tau\geq t_0$.