

11449

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И  
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

9 87-5  
793-X

На правах рукописи

САБИТОВ БАРАТБЕК РАХМАНОВИЧ

УДК 517.958:537.812

НОВАЯ СХЕМА ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ  
ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ГИДРОМЕТЕОРАХ

/01.01.07 - вычислительная математика /

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва - 1987



1500252153

Работа выполнена на кафедре математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор А.С.ИЛЬМИНСКИЙ

Официальные оппоненты— доктор физико-математических наук, профессор А.Г.СВЕШНИКОВ,  
— доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник ИРЭ АН СССР А.Н.СИВОВ

Ведущая организация — Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Автореферат разослан "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 1987 г.

Защита состоится "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 1987 г. в 15 час. 30 мин. на заседании специализированного Совета Д.053.05.37 при Московском государственном университете по адресу: 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ, Факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. \_\_\_\_\_.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета.

Ученый секретарь  
специализированного Совета  
профессор

*Е.И.Моисев* Е.И.Моисеев



1500252153



## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы: Задачи теории дифракции и рассеяния электро-магнитных волн имеют большое прикладное значение в современной науке. В настоящее время в атмосфере происходит освоение миллиметровых и сантиметровых волн для целей спутниковой и наземной связи. При проектировании различных радиосистем необходимо знать рассеивающие свойства гидрометеоров (диэлектрических тел), распределенных в воздушной среде. В случае систем связи это позволяет рассчитывать ослабление и деполаризации волн в осадках, в случае радиолокации — получать информацию о ледяных кристаллах в атмосфере, о распределении частиц по размерам и о расстоянии до области осадков.

Гидрометеоры, как частицы неоднородной атмосферы, рассеивают радио и порождают всевозможные эффекты, влияющие на распространение радиоволн, в связи с чем актуальна и разработка численных методов решения задач взаимодействия с ними электромагнитных волн.

Целью нашей работы является исследование некоторого специального проекционного метода решения осесимметричных задач рассеяния в векторном случае, в резонансной и длинноволновой области частот, способного учитывать объекты сложной конфигурации и основанного на сведениях векторной задачи к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями. Исследование проводится с целью создания эффективного алгоритма численного решения рассеяния электромагнитных волн от гидрометеоров.

Основные результаты диссертации и их научная новизна. Неполный проекционный метод Галеркина в применении к внешним задачам электродинамики, сформулированный в наиболее общем виде в [1], [2], получил в настоящее время широкое распространение при решении конкретных задач рассеяния электромагнитных волн. Все рассмотренные задачи в математическом плане являются краевыми задачами для уравнений или системы уравнений эллиптического типа в неограниченных областях с переменными коэффициентами. На бесконечности решения должны удовлетворять определенным условиям излучения, обеспечивающим единственность соответствующих задач.

В задачах с локальной неоднородностью условия излучения обычно формулируются в виде предельных соотношений типа усло-

1-1028

вия Зоммерфельда. Для неограниченных областей используют принцип предельного поглощения или принцип предельной амплитуды. Однако эти принципы носят асимптотический характер и это в определенной степени затрудняет построение численных методов решения внешних задач.

Для построения прямых численных методов в настоящей работе систематически используются условия излучения. Они формулируются обычно в форме "приближенных парциальных" условий излучения для задач рассеяния от гидрометеоров. С условиями на бесконечности связана еще одна особенность рассматриваемого класса математических задач. Краевые задачи для дифференциальных уравнений (д.у.), соответствующие задачам дифракции, являются несамосопряженными.

Это, в свою очередь, обуславливает определенную специфику численного метода и вопроса обоснования. Обычная схема неполного проекционного метода Галеркина, используемая для построения векторного базиса/сферического базиса/ сферических функций, сводит построение приближенного решения к краевой задаче для системы д.у. с полными матрицами, что требует применения общих методов решения краевых двухточечных задач.

При обосновании сходимости такого метода приходится делать априорные предположения о сходимости рядов Фурье для классического решения задачи по системе используемых базисных функций.

В настоящей работе исследуется модифицированный неполный проекционный метод Галеркина для задач рассеяния от неоднородных диэлектрических тел, являющихся телами вращения. При этом неполный проекционный метод позволяет свести исходную задачу для уравнений Максвелла к краевой задаче для системы линейных обыкновенных д.у. с переменными коэффициентами.

Отметим, что эффективность проекционного метода существенно зависит от выбора системы базисных функций. При этом весьма важным требованием, накладываемым на базис, является требование учета геометрии рассеивания. С этой целью в качестве базиса в данной работе используются построенные специальным образом системы базисных функций с конечным малым носителем по углу, квазиортогональные на поверхности единичной сферы. Применение этого базиса упрощает систему д.у. кра-

евой задачи. Для обоснования подобного проекционного метода достаточно, как будет показано, лишь предположения о возможности аппроксимировать с заданной точностью решение исходной задачи набором векторных базисных функций с нужной степенью гладкости.

Исследование неполного проекционного метода включает в себя постановку векторных задач для гидрометеоров, являющихся телами вращения, аппроксимацию векторных полей по двум системам конечных элементов: внутренних (гладкие функции) и внешних (функции Грина краевой задачи для оператора Лапласа на сфере с нулевыми краевыми условиями на концах интервалов) в соответствующих функциональных пространствах, доказательство единственности приближенных решений и их сходимости к точному в норме пространства  $L_2$ , оценки скорости сходимости в обычных нормах (например, в  $L_2$ ).

По исследуемому методу был составлен подробный алгоритм расчета рассеянного поля от дождевых капель, имеющих различные геометрические формы в виде пакета программ, написанных на языке Фортран для ЭВМ БЭСМ-6. Алгоритм метода включает вычисление цилиндрических функций любого вещественного аргумента, положительного вещественного аргумента, положительного вещественного индекса.

Отметим, что среди задач рассеяния от гидрометеоров особое место занимает осесимметричные задачи. Рассеиватели при этом трехмерны и ограничены замкнутой поверхностью. Независимость от азимутального угла приводит задачу формально к двумерным алгоритмам, не содержащим кратных интегралов, которые были бы не удобны с точки зрения вычислений на ЭВМ. Дождевые капли, являющиеся частицами атмосферных образований, обладают подобной осевой симметрией, то есть геометрия в этом случае не является идеализацией. То же самое касается и способов возбуждения рассеивателей.

Простота реализации данного метода, сводящего задачу рассеивания к системе обыкновенных д.у. с переменными коэффициентами, во многом зависит от конкретного вида матриц, входящих в данную систему. Желательно, чтобы она содержала по возможности постоянные неполные матрицы. В данном случае матрица при старшей производной является таковой (треугольная постоянная матрица), то есть ее обращение приводит дан-

ную систему к системе, разрешенной относительно старшей производной.

Причем, в однородной части пространства последняя явно разрешима в цилиндрических функциях дробного индекса, зависящего от разбиения интервала  $X_k$ . К системе обыкновенных д.у., разрешимой относительно старших производных, в области занятой диэлектриком, применимы стандартные алгоритмы интегрирования типа Рунге-Кутты с любой степенью точности или его модификации. Простота получаемой системы уравнений проекционного метода зависит прежде всего от неортогонального преобразования координат, отображающего область, занятую гидрометеором в шар.

В данном случае область, в которой необходимо решать краевую задачу, ограничена двумя концентрическими сферами, что позволяет получить систему д.у. с постоянными матрицами при старших производных.

Трудности, возникающие при реализации проекционного метода, связаны также с выбором базисной системы функций, что сказывается при вычислении матричных элементов, а также на форме парциальных условий излучения. Использование квазиортогональной базисной системы функций, а также свойства внешних и внутренних конечных элементов позволили избежать вычислений по квадратурным формулам матричных элементов системы д.у., что существенно при реализации метода на ЭМ. При вычислении парциальных условий излучения, которые приводят внешнюю задачу к внутренней, в качестве базисных функций на поверхности сферы выбраны обобщенные нормальные волны, построенные с помощью обобщенных решений системы уравнений Максвелла в свободном пространстве, выписываемых явно.

Методика исследования. При оценке скорости сходимости приближенного решения к точному применяется энергетическое соотношение, а также некоторые сведения из теории аппроксимации.

Практическая значимость работы. Практическая реализация данного численного метода дает возможность провести качественный анализ в задачах рассеяния электромагнитных волн от гидрометеоров сложной геометрической формы, метеорологии и при освоении новых диапазонов частот в радиометеорологии.

Апробация работы. Основные результаты диссертации до-

кладывались на научно-исследовательских семинарах академика А.Н.Тихонова, профессора А.Г.Свешникова и опубликованы в 3 статьях.

Структура диссертации. Диссертация изложена на 146 страницах и состоит из введения и трех глав. Список литературы содержит 141 наименование.

#### Содержание работы

Во введении проводится обзор современных численных методов исследования задач дифракции, описаны основные результаты диссертации, обосновывается актуальность темы.

В первой главе диссертации рассмотрена стационарная векторная задача рассеяния от гидрометеоров, являющихся телом вращения, характеризующихся комплексной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(M)$  и постоянной магнитной проницаемостью  $\mu(M)$ . Среду, окружающую тело вращения, будем считать однородной, т.е.  $k^2 = \text{const}$ . В качестве источника возбуждения выбрана плоская электромагнитная волна, падающая из бесконечности. На поверхности рассеивателя касательные составляющие электрического поля и магнитного поля непрерывны (§ 1).

Для обоснования прямых проекционных методов построения приближенных методов решений для векторной задачи рассеивания требуется построить аппроксимант точного решения задачи линейными комбинациями базисных функций. Применяя в качестве базисных финитные функции метода конечных элементов, удастся построить аппроксимант полей с точностью  $O(h^M)$ , где  $M$  - порядок аппроксимации точного решения, внутренними и внешними конечными элементами. При этом предполагается, что поля  $\vec{E}, \vec{H} \in W_2^l(D)$ , здесь  $l = 0, 1, \dots, M$ . Получены оценки остаточного члена в норме пространства (§ 2).

Для аппроксимантов, построенных по внутренней и внешней системам конечных элементов, сформулированы приближенные парциальные условия излучения. Введено также понятие обобщенных нормальных волн, которые построены по решениям так называемых продолженных с.д.у.; рассмотрены некоторые свойства обобщенных нормальных волн (§ 3). Затем для аппроксимантов  $\vec{E}^I, \vec{H}^I$  точного поля  $\vec{E}, \vec{H}$ , построенных по первой, и для аппроксимантов  $\vec{E}^{II}, \vec{H}^{II}$ , построенных по второй системам конечных элементов, получены энергетические равенства и неко-

торые нужны для дальнейших исследований априорные оценки (§ 4).

Формулируется приближенный метод решения задач дифракции от осесимметричных диэлектрических тел вращения модифицированным проекционным методом. Как и в случае аппроксимантов, вводятся понятия продолженных с.д.у., причем последние, в отличие от продолженных с.д.у. для аппроксимантов однородны и парциальные условия излучения, сформулированные для приближенных решений отличаются от парциальных условий, сформулированных для аппроксимантов тем, что во втором случае содержат дополнительные малые слагаемые порядка  $O(h^M)$ , где  $M$  — по-прежнему порядок аппроксимации точного поля. Получены необходимы: априорные оценки для приближенных решений  $\vec{E}^N$ ,  $\vec{H}^N$ ,  $\vec{E}^N$ ,  $\vec{H}^N$ , построенных по первой и второй системам конечных элементов в соответствующих функциональных пространствах (§ 5).

С помощью теорем аппроксимации, а также введя невязки между аппроксимантом и приближенным решением, используя при этом неравенство треугольников для нормированных пространств, приходим к оценке для невязки между точным и приближенным решениями. Причем, приближенные значения коэффициентов представления приближенного решения равномерно сходятся к точным значениям. Также получены оценки скорости сходимости (§ 6).

Во второй главе рассмотрен подробный алгоритм расчета рассеянного поля при учете конкретного вида геометрии рассеивателя (гидрометеора). Построены и изучены некоторые свойства внутренних и внешних конечных элементов, которые используются при построении векторных квазиортогональных базисных функций (§ 1).

Способ получения основной системы дифференциальных уравнений проекционного метода для двух случаев: т.е. при использовании обоих типов конечных элементов (внутренних и внешних) для построения приближенных решений, а также их сравнительный анализ подробно изложен в § 2.

Обращение матрицы обычно требует большого объема арифметических операций, выполняемых ЭВМ. Применение обычных, стандартных методов обращения матриц, основанных на решении линейных систем, менее удобно для задачи больших размерностей. Поэтому в этом случае оптимальный способ обращения мат-

риц играет большую роль. В связи с этим предложен способ обращения трехдиагональных матриц, основанный на использовании цепных дробей, который обеспечивает определенные преимущества вычислительной схемы. Метод обращения матрицы при старшей производной в с.д.у. проекционного метода изложен в § 3.

Как уже отмечалось, свойства внутренних и внешних конечных элементов, позволяют нам вычислить матричные элементы, входящие в основную с.д.у., без применения квадратурных формул, что позволяет уменьшить объем вычислений на ЭВМ. Особенно эффективными они оказываются в том случае, когда учитывается конкретный вид геометрии рассеивателя (§ 4). Краевая задача при применении модифицированного метода к векторной задаче, представляет собой с.д.у. первого порядка с переменными коэффициентами, с однородным краевым условием при  $\rho = r$ , и неоднородным краевым условием при  $\rho = R$  (парциальными условиями ограниченности в нуле и парциальными условиями излучения), где  $\rho$  — текущий радиус диэлектрического тела. При этом алгоритм решения этой краевой задачи основан на построении функциональной матрицы рассматриваемой с.д.у. методом матричной экспоненты (§ 5). Более подробно способ получения краевых условий на концах интервала  $[r, R]$  изложен в § 6.

Таким образом, особенностью рассматриваемого модифицированного проекционного метода является простота реализации этого метода на ЭВМ для тел со сложными геометрическими данными. Большинство прямых методов в основном используют базисные функции, не обладающие конечными носителями, малыми по сравнению со всей областью. При этом в краевой задаче возникают полные матрицы, что осложняет рассматриваемую задачу при увеличении размерности. Ниже предложенный метод свободен от этих недостатков. Матрицы, входящие в с.д.у., трехдиагональны и вычисляются без применения квадратур. Так как в качестве базиса используются функции с конечным малым носителем по углу, то при расчете диаграмм рассеяния, а также при вычислении других характеристик рассматриваемой задачи рассеивания, в конечных суммах отличными от нуля будут лишь те слагаемые, где носители конечных элементов имеют нулевое пересечение.

Использование численно-аналитического подхода для решения с.д.у. относительно старшей производной в определен-

ной степени, снимает трудности, связанные с численной реализацией. Отметим также, что при обосновании неполного проекционного метода обычно требовали в разложимости точного решения в ряд Фурье по сферическим гармоникам, в нашем случае достаточно лишь предположения о возможности аппроксимировать с требуемой точностью решение исходной задачи, набором конечных элементов с заданной гладкостью.

В третьей главе дано описание алгоритмов и программ решения задач дифракции электромагнитных волн от дождевых капель. Приведены методические результаты, характеризующие скорость работы метода и его возможности.

#### Основные результаты

В работе рассмотрен модифицированный неполный проекционный метод решения осесимметрических задач рассеяния от неоднородных диэлектрических тел вращений в достаточно общей постановке. При этом рассмотренный алгоритм модифицированного проекционного метода дает возможность получить системы дифференциальных уравнений и краевые условия в наиболее простом виде, удобном для его численной реализации.

Преимущества данного метода в пределах рассматриваемого векторного класса задач рассеяния — это достаточно эффективное использование памяти ЭВМ и времени счета, что в основном достигается за счет сильной разреженности матричных элементов, а также вычислением интегралов, входящих в матрицы с.д.у., без применения квадратурных формул.

В этом направлении получены следующие результаты:

1. Полученная краевая задача для с.д.у. первого порядка модифицированного проекционного метода содержит минимальное число постоянных, разреженных матриц и разрешима относительно старших производных.

2. Построены аппроксиманты векторного электромагнитного поля с помощью векторных, квазиортогональных на сфере функций, использующих в качестве координатных конечные элементы с малым носителем по углу. Получены оценки остаточного члена аппроксиманта в соответствующих функциональных пространствах. При этом точное электромагнитное поле  $\{\vec{E}, \vec{H}\}$  должно быть элементом пространства  $W_2^{\ell}(D)$ ,  $\ell = 1, \dots, M$ .

3. С помощью введенных в работе продолженных проекционных соотношений построены обобщенные нормальные волны, являющиеся частными решениями уравнений Максвелла в обобщенном смысле для свободного пространства. Для аппроксимантов, построенных с помощью внутренних и внешних конечных элементов, сформулированы "приближенные парциальные" условия излучения. Получены энергетические соотношения и априорные оценки в функциональном пространстве  $L_2$ .

4. Проведено полное обоснование данного модифицированного проекционного метода, включающее доказательство сходимости приближенных решений к точным, единственность приближенных решений, и оценки скорости сходимости в случае возможности построения аппроксимантов классических решений по внутренним и внешним координатным функциям.

5. Оценка скорости сходимости гарантирует сходимости приближенного решения  $\vec{E}^N, \vec{H}^N$ , построенного по первой системе функций к точному в  $L_2$ , если точное решение принадлежит  $W_2^{\ell}$ ,  $\ell = 1, \dots, M$ , здесь  $M$  — допустимый порядок аппроксимации. Аналогичное утверждение справедливо и для приближенного решения  $\vec{E}^N, \vec{H}^N$ , построенного по второй системе функций. При этом сходимость приближенных решений к точному зависит от допустимого порядка аппроксимации  $M$ . Т.е. скорость сходимости приближенных решений к точным быстрее для больших значений " $M$ ".

6. Аппроксимант плоской электромагнитной волны по внутренней системе конечных элементов содержит сферические компоненты коэффициентов Фурье разложения тангенциальных составляющих поля плоской волны по системе " $e^{im\varphi}$ ", которая представима в виде быстросходящего ряда по гармоникам " $n$ ".

7. Для осесимметричных неоднородных прозрачных тел вращений, представляющих собой гидрометеоры типа дождевых капель, разработан подробный алгоритм расчета характеристик рассеяния, а также полного внутреннего поля в объеме рассеивателя, в виде пакета прикладных программ для ЭВМ БЭСМ-6 на языке ФОРТРАН.

В заключении автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю А.С.Ильинскому за постоянное внимание в работе, а также В.Ф.Апельцину за многочисленные и плодотворные обсуждения результатов диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 3-5 .

### Литература

1. Свешников А.Г. Неполный метод Галеркина. - Докл. АН СССР, 1977, т.236, № 5, с.1076-1079.
2. Свешников А.Г., Ильинский А.С. Прямой метод для задач дифракции на локальном неоднородном теле. - Ж. вычисл. матем. физ., 1971, т. 11, № 4, с.960-968.
3. Апелцин В.Ф., Ильинский А.С., Сабитов Б.Р. Алгоритм расчета рассеянного поля от гидрометеоров. - Вестн.Моск. ун-та. Сер. вычисл.матем. и киберн., 1985, № 3, с.47-54.
4. Апелцин В.Ф., Ильинский А.С., Сабитов Б.Р. Об аппроксимации векторных полей. - Журн. вычисл. матем, и матем. физ., 1986, т.26, № 9, с.1412-1415.
5. Апелцин В.Ф., Ильинский А.С., Сабитов Б.Р. Обоснование модифицированного неполного проекционного метода для задач рассеяния от гидрометеоров. - Журн. вычисл.матем. и матем. физ., 1986, т.26, № 10, с.1535-1551.

Подписано к печати 26.12.86.

Л- 44934 Формат 60x90/16.

Усл. печ. л. 9,45 Уч.-изд. л. 9,45

Тираж 100 экз. Заказ № 1028.

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета.  
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.  
Типография ордена "Знак Почета" издательства МГУ.  
119899, Москва, Ленинские горы.