ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Б. ОСМОНОВА

Диссертационный совет Д 05.22.651

На правах рукописи
УДК 517. 968

МУСТАФАЕВА НАГИМА ТАИРОВНА

РЕГУЛЯРИЗАЦИОННО-ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

01.01.02-дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош-2023

Диссертационная работа выполнена на кафедре информационные технологии и программирование Кыргызского Национального университета имени Ж. Баласагына

Научный руководитель:	**Каракеев Таалайбек Тултемирович,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Информационных технологий и программирования Кызгыского национального университета имени Ж.Баласагына
Официальные оппоненты:	**Сопуев Адахимжан**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и программирования Ошского государственного университета
	Халилов Атахан Ташполотович, кандидат физико-математических наук, доцент, с.н.с. лаборатории теории интегро-дифференциальных уравнений ИМ НАН КР
Ведущая организация:	Кафедра математического и компьютерного моделирования Казахского Национального Университета им. Аль-Фараби Адрес: 050040 Казахстан, Алматы, пр. Аль-Фараби, 71.

Защита диссертации состоится 15 марта 2024 года в 14:30 часов на заседании диссертационного совета Д 05.22.651 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университет и Жалал-Абадском государственном университете имени Б. Осмонова (723500, г. Ош, ул. Ленина, 331, ауд.203).

Код онлайн трансляции защиты диссертации: https://vc.vak.kg/b/052-pvt-luj-9ih

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Ошского государственного университета, Жалал-Абадского государственного университета имени Б. Осмонова и на сайте диссертационного совета: www.oshsu.kg, а также на сайте Национальной аттестационной комиссии при Президенте Кыргызской Республики https://vak.kg/wp-admin/post.php?post=108174&action=edit

Автореферат разослан 15 февраля 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент Бекешов Т.О

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Математическим описанием широкого класса задач теории упругости, теплофизики, математической биологии служат обратные и нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. Отдельный интерес представляют собой класс нелокальных краевых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, которые приводят к исследованию интегральных уравнений Вольтерра первого рода.

Теория интегральных уравнений Вольтерра первого рода, их численное решение как с гладкими ядрами, так и с ядрами, содержащими различные особенности, к настоящему времени достаточно полно развита в случаях, когда ядро $K(x,t)$ на диагонали не обращается в ноль ни в одной точке заданного отрезка или ядро на диагонали тождественный ноль, а производная по x на диагонали не обращается в ноль ни в одной точке заданного отрезка. При нарушении данных условий одним из эффективных методов являются методы регуляризации.

Развитие теории регуляриации некорректных задач были начаты А.Н. Тихоновым (1963, 1986), В.К. Ивановым (1983), М.М. Лаврентьевым (1932) и получили дальнейшее развитие в работах В.А. Морозова (1982), В.П. Танана (1978, 1982), А.Г. Ягола (1983, 1990), А.В. Бакушинского (1968) и других ученых. Большой вклад в теорию регуляриации интегральных уравнений Вольтерра первого рода внесли М.М. Лаврентьев (1932), М.И. Иманалиев (1978- 2018), В.О. Сергеев (1971), А.М. Денисов (1975, 1980, 1999), (1972, 1978), А.Л. Бухгейм (1972, 1978), А. Асанов (1979- 2015), Я. Янно (1987), Н.А. Магницкий (1979), Т.Д. Омуров (1998, 2003, 2006) и другие математики.

В.О. Сергеев (1971) разработал метод регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого рода с ядром $K(x,t)$, которое обращается в нуль на диагонали вместе со своими производными по x до порядка $n-1$ включительно, а производное порядка n на диагонали равно единице. А.М. Денисов (1994) исследовал задачи приближенного решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода методом регуляризации в случае неточно заданной правой части. Н.А. Магницкий (1975) рассматривал случай, когда ядро линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на диагонали имеет нули конечного порядка в концах заданного интервала. Янно Я. (1987) изучил класс интегральных уравнений Вольтерра первого рода, возникающих в теории обратных задач для наследственной среды, предложен сохраняющий вольтерровость метод регуляризации. А.Асанов (1979- 2015) исследовал интегральные уравнения Вольтерра первого рода с суммируемым по t ядром $K(x,t)$, которое на диагонали может обращаться в нуль в заданном интервале конечное или счетное число раз. Построено регуляризованное решение в пространстве непрерывных функций и в пространстве суммируемых функций. Вопросы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого рода с правой частью, отличной от нуля в начальной точке отрезка интегрирования, т.е. при нарушении необходимого условия существования непрерывного решения изучены М.И. Иманалиевым (1978-2010), Т.Д. Омуровым (1999).

Численные методы решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода исследованы в работах А.С. Апарцина (1976), М.В.Булатова (2002), С.М. Белоцерковского (1978) и И.К. Лифанова (1995), Тен Мен Ян, (1975-1992) H.Brunner (1977-1996), P. Linz (1969-1971) и др.

Вместе с тем, еще не исследованы вопросы регуляризации, единственности решения в пространстве непрерывных функций и численные методы решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода с непрерывным ядром, имеющим нули на диагонали. При этом их многочисленное прикладное значение показывает актуальность исследования данных проблем.

Цель и задачи исследования. Исследование вопросов регуляризации и условий единственности решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода, системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода, разработка и обоснование методов численного решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода.

Методы исследования. Основными методами являются метод регуляризации, метод последовательных приближений, метод квадратурных формул, элементы функционального и математического анализа.

Научная новизна работы.

- разработан и обоснован метод регуляризации и установлены условия единственности решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода;
- обоснован метод регуляризации системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода;
- разработан и обоснован метод численного решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода на основе регуляризованных уравнений;
- построен регуляризирующий оператор для интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными, доказана равномерная сходимость регуляризованного решения к точному решению.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят в основном теоретический характер и могут быть применены для решения нелокальных краевых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, для численного решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода, возникающих в теории упругости, гидрофизике, механике.

Личный вклад соискателя. В совместных работах постановка задач принадлежат научному руководителю, разработка и обоснование методов, доказательство теорем и научные выводы принадлежат соискателю.

Апробация результатов исследований. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научных конференциях:

− XLIV Международной научно-практической конференции «Естественные и математические науки в современном мире», Новосибирск, 2016;
− III Международная научно-практическая конференция «European Restarch», Пенза, 2016;
− IV Международной научно-практической конференции. «World and science: problems And innovations», Пенза, 2016;
− International scientific-practical conference «Integration of the scientific community to the global challenges of our time», Sharm el-Sheikh, Arab Republic of Egypt, 2017;
− II Борубаевские чтения, Бишкек, 2018.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 научных статьях [1]-[11], в том числе в журналах Кыргызской Республики – 5 (Ринц), в зарубежных журналах – 6, (2 Ринц, 1 WoSc) из них. В совместных работах постановка задач принадлежит научному руководителю, полученные основные результаты и оценки – соискателю.

Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Исследование по теме диссертации проводилось в рамках утвержденной тематики «Приближенные методы решения интегральных уравнений» кафедры информационных технологий и программирования КНУ им. Ж. Баласагына.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из списка используемых обозначений, введения, пяти глав, заключения, выводов и списка использованных источников 76 наименований. Объем диссертации составляет 135 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **первой главе** приводится краткий обзор работ по теме диссертации и рассмотрены постановки обратных и нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, при исследовании которых возникают интегральные уравнения Вольтерра первого рода.

Во **второй главе** приведены объекты и предметы исследования, основные методы исследования, используемые в диссертации.

Третья глава посвящена исследованию вопросов регуляризации и условий единственности решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода с гладкими известными данными и ядром, которое вырождается в начальной точке диагонали. Полученные результаты обобщены для интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными.

В **§ 3.1** рассматриваются линейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_0^x K(x,t)u(t)dt = g(x), \qquad (1)$$

где для заданных функций $g(x)$ и $K(x,t)$ выполняются условия:
I) $K(x,t) \in C^{1,0}(D)$, $D = \{(x,t)/0 \le t \le x \le b\}$, $g(x) \in C^1\,[0,b]$;
II) $k(x) = K(x,x)|_{x=0} = 0$, $0 < k(x)\ \forall x \in (0,b]$, $k(x) -$ неубывающая функция, $g^{(i)}(0) = 0, i = 0{,}1$;
III) $G(x) \ge d_1 > 0$, $G(x) = L(x,x) + C_1 g(x)$, $L(x,t) = C_2 K(x,t) + K_x(x,t)$, $0 < C_1, C_2, d_1 = const$.

Действуя оператором $C_2 I + D + C_1 T$, где I – тождественный оператор, D – оператор дифференцирования по x, T - оператор Вольтерра вида

$$(Tv)(x) = \int_0^x u(t)v(t)dt,$$

из уравнения (1) получено интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$k(x)u(x) + \int_0^x G(t)u(t)dt = -\int_0^x [L(x,t) - L(t,t)]u(t)dt +$$

$$+C_1 \int_0^x u(t)dt \int_t^x K(s,t)u(s)ds + f(x), \qquad (2)$$

где $f(x) = C_2 g(x) + g'(x)$.

Регуляризация уравнения (2) построено в виде

$$\big(\varepsilon + k(x)\big)u_\varepsilon(x) + \int_0^x G(t)\, u_\varepsilon(t)dt = -\int_0^x [L(x,t) - L(t,t)]\, u_\varepsilon(t)dt \ +$$

$$+C_1 \int_0^x u_\varepsilon(t)dt \int_t^x K(s,t)\, u_\varepsilon(s)ds + \varepsilon u(0) + f(x), \qquad (3)$$

где ε малый параметр из интервала (0,1).

Посредством резольвенты ядра $\left(-\frac{G(t)}{\varepsilon + k(x)}\right)$ уравнение (3) приводится к виду

$$u_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + k(x)} \int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon + k(s)} ds\right) \frac{G(t)}{\varepsilon + k(t)} \int_0^x [L(x,s) -$$

$$-L(s,s)]u_\varepsilon(s)ds - \int_0^t [L(t,s) - L(s,s)]u_\varepsilon(s)ds + f(t) - f(x) + C_1 \times$$

$$\times \int_0^t u_\varepsilon(s)ds \int_s^t K(\nu,s)\, u_\varepsilon(\nu)d - C_1 \int_0^x u_\varepsilon(s)ds \int_s^x K(\nu,s)\, u_\varepsilon(\nu)d\nu \Big\} dt +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+k(x)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\left\{-\int_0^x[L(x,t)-L(t,t)]\,u_\varepsilon(t)dt+\right.$$

$$\left.+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds+\varepsilon u(0)+f(x)\right\}. \qquad (4)$$

Используя обозначения

$q_1=b[L_2+C_2L_1+2C_1Mr](2+e^{-1}){d_1}^{-1}$, $\quad M=\max_D|K(x,t)|$, $|u(x)|\le r$, $L_1=\max_D|K_x(x,t)|$, $0<L_2-$ коэффициент Липшица функции $K_x(x,t)$ по аргументу x, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть выполняются условия *I*) - *III*), $q_1<1$ и уравнение (1) имеет решение $u(x)\in C[0,b]$. Тогда, при $\varepsilon\to 0$, решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1), причем имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x)-u(x)\|_{C[0,b]}\le(1-q_1)^{-1}\left(4(d_1e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x)\|_{C[0,b]}+\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\right),$$

где $\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)=\sup_{|x-t|\le\varepsilon^\beta}|u(x)-u(t)|$, $\quad 0<\beta<1$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия *I*) - *III*), $q_1<1$ и уравнение (1) имеет решение $u(x)\in C^\gamma[0,b]$, $0<\gamma\le 1$. Тогда, при $\varepsilon\to 0$ решение уравнения (4) равномерно сходится к решению уравнения (1), причем, имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x)-u(x)\|_{C[0,b]}\le(1-q_1)^{-1}M_0\varepsilon^\gamma,$$

где $M_0=d_1^{-\gamma}M_1(d_2d_4+d_3), d_2=\int_0^\infty\tau^\gamma\,e^{-\tau}d\tau, d_3=\sup_{\tau\ge 0}(\tau^\gamma e^{-\tau})$,

$d_4=\max_{x\in[0,b]}|G(x)|$.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 решение уравнения (1) единственно в $\Omega(u_0,\,r_0)$.

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 2 решение уравнения (1) единственно в $\Omega^\gamma(u_0,\,r_0), 0<\gamma\le 1$.

Здесь $\Omega(u_0,\,r_0)=\{\,u(x)\in C[0,b]\colon|u(x)-u_0|\le r_0,\ 0<u_0,\,r_0=const\}$,

$\Omega^\gamma(u_0,\,r_0)=\{u(x)\in\Omega[0,b]\colon|u(x)-u(t)|\le M_0|x-t|^\gamma,0<\gamma\le 1\}$.

Замечание 1. Если $G_1(x)=K(x,x)+C_2K_x(x,t)\ge d_1>0$, то утверждения следствий 1 и 2 справедливы, соответственно, для всего пространства $C[0,b]$ и $C^\gamma[0,b]$, $0<\gamma\le 1$.

В **§ 3.2** рассмотрены нелинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_0^x N_0\big(x,t,u(t)\big)dt\ =g(x), \qquad (5)$$

где $N_0\big(x,t,u(t)\big) = K(x,t)u(t) + N\big(x,t,u(t)\big)$. Известные функции $K(x,t)$, $g(x)$ подчиняются условиям *I*)-*III*), для функция $N\big(x,t,u(t)\big)$ выполнятся условие:

IV) $N(x,t,u) \in C^{1,0,1}\,(D \times R^1)$, $M_0(x,t,u) \in C^{0,0,1}\,(D \times R^1)$, $M_0(x,t,u) = = C_2 N(x,t,u) + N_x(x,t,u)$, для $0 < L_N = const$, $x > t, (x,s), (t,s) \in D$, $(x,s,u), (x,s,w), (t,s,w), (t,s,u) \in D \times R^1$ имеет место неравенство

$$|M_0(x,s,u) - M_0(x,s,w) - M_0(t,s,w) + M_0(t,s,u)| \le L_N(x-t)|u-w|.$$

Действуя оператором $C_2 I + D + C_1 T$, из (5) получим интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$k(x)u(x) + \int_0^x G(t)u(t)dt = \int_0^x M\big(x,t,u(t)\big)dt +$$

$$+C_1 \int_0^x u(t)dt \int_t^x K(s,t)u(s)ds + C_1 \int_0^x \int_t^x N\big(s,t,u(t)\big)u(s)ds\,dt + f(x), \quad (6)$$

где $M\big(x,t,u(t)\big) = -M_0\big(x,t,u(t)\big) + \big(L(t,t) - L(x,t)\big)u(t)$,
$f(x) = C_2 g(x) + g'(x)$. Регуляризация уравнения (6) построена в виде

$$\big(\varepsilon + \mathrm{k}(x)\big)u_\varepsilon(x) + \int_0^x G(t)\,u_\varepsilon(t)dt$$

$$= \int_0^x M\big(x,t,u_\varepsilon(t)\big)dt + C_1 \int_0^x u_\varepsilon(t)dt \times \int_t^x K(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds$$

$$+ C_1 \int_0^x \int_t^x N\big(s,t,u_\varepsilon(t)\big)u_\varepsilon(s)ds\,dt + \varepsilon u(0) + f(x), \quad (7)$$

где ε - малый параметр из интервала (0,1).

Доказана равномерная сходимость, при $\varepsilon \to 0$, решения уравнения (7) к решению уравнения (6) с выводами оценки отклонения регуляризованного решения от точного.

Пусть $q = q_1 + q_2$, величина q_1 – определена в § 2.1 (см. теорему 1),
$q_2 = \big[b(L_N + C_1 M_N) + \big(K_N + bC_1(M_N + rK_N)\big)(1 + e^{-1})\big]d_1^{-1}$,
$M_N = \max\limits_{D\times R^1}\big|N\big(x,t,u_\varepsilon(t)\big)\big|$, $K_N = \max\limits_{D\times R^1}\big|M_{0u}\big(x,t,u_\varepsilon(t)\big)\big|$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия *I*)-*IV*), $q < 1$ и уравнение (5) имеет решение $u(x) \in C[0,b]$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (7) равномерно сходится к решению уравнения (5), при этом справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{\mathrm{C}[0,b]} \le (1-q)^{-1}\Big(4(d_1 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x)\|_{\mathrm{C}[0,b]} + \omega_u\big(\varepsilon^\beta\big)\Big),$$

где $\omega_u\big(\varepsilon^\beta\big) = \sup\limits_{|x-t|\le\varepsilon^\beta}|u(x) - u(t)|$, $\quad 0 < \beta < 1$.

Следствие 3. При выполнении условий теоремы 3 решение уравнения (5) единственно в $\Omega(u_0,\, r_0)$.

Теорема 4. Если выполняются условия *I*)-*IV*), $q < 1$ и уравнение (5) имеет решение $u(x) \in C^{\gamma}[0,b]$, $0 < \gamma \le 1$, то при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (7) равномерно сходится к решению уравнения (5), при этом

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{C[0,b]} \le (1-q)^{-1} M_2 \varepsilon^{\gamma}, \qquad 0 < M_2 = const.$$

Следствие 4. При выполнении условий теоремы 4 решение уравнения (5) единственно в $\Omega^{\gamma}(u_0, r_0)$, $0 < \gamma \le 1$.

Замечание 2. Если выполняется условие $G_1(x) \ge d_1 > 0$, где $G_1(x) = K(x,x) + C_2 K_x(x,t)$, $0 < C_2, d_1 = const$ и $M_0(x,x,u) = 0$, $M_0(x,t,0) = 0$, то для (5) и (7) при $C_1 = 0$ имеют место все утверждения теорем 3, 4, а утверждения следствий 3 и 4 справедливы, соответственно, для всего пространства $C[0,b]$ и $C^{\gamma}[0,b]$, $0 < \gamma \le 1$.

В **§ 3.3** вышеполученные результаты обобщены для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными

$$\int_0^x K(x,z,s)u(s,z)ds + \int_0^x \int_0^z Q_0(x,z,s,\tau)u(s,\tau)d\tau ds = g(x,z), \quad (8)$$

где известные функции $K(x,z,s)$, $Q_0(x,z,s,\tau)$, $g(x,z)$ подчиняются условиям:

V) $K(x,z,s) \in C^{1,0,0}(D_0)$, $D_0 = \{(x,z,s)/0 \le s \le x \le b, 0 \le z \le a\}$,
$g(x,z) \in C^{1,0}(D), D = [0,b] \times [0,a], g^{(i)}(0,z) = 0, i = 0.1,$ $\quad k(0,z) = 0$,
$k(x,z) = K(x,z,x)$ – неубывающая функция по x в области D;
$Q_0(x,z,s,\tau) \in C^{1,0,0,0}(D_1), D_1 = \{(x,z,s,\tau)/\ 0 \le s \le x \le b, 0 \le \tau \le z \le a\}$;
$G(x,z) \ge d_1$, $G(x,z) = L(x,z,x) + C_1 g(x,z)$, $0 < C_1, C_2, d_1 = const$,
$L(x,z,s) = C_2 K(x,z,s) + K_x(x,z,s)$.

Как и выше, действуя оператором $C_2 I + D + C_1 T$ на уравнение (8). получено интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$k(x,z)u(x,z) + \int_0^x G(s,z)u(s,z)ds = \int_0^x [L(s,z,s) - L(x,z,s)]u(s,z)ds +$$

$$+ \int_0^x \int_0^z Q(x,z,s,\tau)\, u(s,\tau)d\tau ds + C_1 \int_0^x u(s,z)ds \int_s^x K(\nu,z,s)u(\nu,z)d\nu +$$

$$+ C_1 \int_0^x \int_0^z u(s,\tau)d\tau ds \int_s^x Q_0(\nu,z,s,\tau)u(\nu,z)d\nu + f(x,z), \quad (9)$$

$Q(x,z,s,\tau) = -C_2 Q_0(x,z,s,\tau) - Q_{0x}(x,z,s,\tau)$, $f(x,z) = C_2 g(x,z) + g_x(x,z)$.
Рассматривая уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1)

$$\big(\varepsilon + \mathrm{k}(x,z)\big)u_\varepsilon(x,z) + \int_0^x G(s,z)\, u_\varepsilon(s,z)ds \int_0^x [L(s,z,s) - L(x,z,s)] \times$$

$$\times u_\varepsilon(s,z)ds + \int_0^x \int_0^z Q(x,z,s,\tau) u_\varepsilon(s,\tau) d\tau ds + C_1 \int_0^x u_\varepsilon(s,z) ds \times$$
$$\times \int_s^x K(\nu,z,s)\, u_\varepsilon(\nu,z) d\nu + C_1 \int_0^x \int_0^z u_\varepsilon(s,\tau) d\tau ds \times \int_s^x Q_0(\nu,z,s,\tau) \times$$
$$\times u_\varepsilon(\nu,z)d\nu + \varepsilon u(0,z) + f(x,z). \qquad (10)$$

доказаны теоремы:

Теорема 5. Пусть выполняются условие *V*), $q < 1$ и уравнение (8) имеет решение $u(x,z) \in C(D)$. Тогда, при $\varepsilon \to 0$, решение уравнения (10) равномерно сходится к решению уравнения (8). При этом имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,z) - u(x,z)\|_{C(D)} \le \left(4(d_1 e)^{-1} \varepsilon^{1-\beta} \|u(x,z)\|_{C(D)} + \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\right)/(1-q).$$

где $\quad q = q_1 + b(q_2 + q_3 a),\, q_3 = \left(L_Q + 2M_{Q1} r (1+e^{-1})\right) d_1^{-1}.$

$q_1 = 2C_1 r b\left(a M_Q + M_K\right) d_1^{-1} + a M_{Q1}(1+e^{-1}) d_1^{-1},\ M_Q = \max_{D_1} |Q(x,z,s,\tau)|,$

$q_2 = \left((L_1 + C_2 L_2)(2+e^{-1}) + 2C_1 r M_K (1+e^{-1})\right) d_1^{-1},\ M_K = \max_D |K(x,z,s)|$

$0 < L_2 = Lip(K(x,z,s)|x), \quad 0 < L_1 = Lip(K_x(x,z,s)|x),$

$0 < L_Q = Lip(Q(x,z,s,\tau)|x),\ M_{Q1} = \max_{D_1} |Q_0(x,z,s,\tau)|.$

Теорема 6. Пусть выполняются условия *V*), $q < 1$ и уравнение (8) имеет решение $u(x,z) \in C^\gamma(D)$, $0 < \gamma \le 1$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (10) равномерно сходится к решению уравнения (8), причем

$$\|u_\varepsilon(x,z) - u(x,z)\|_{C(D)} \le (1-q)^{-1} C_3 \varepsilon^\gamma, \qquad 0 < C_3 = const.$$

Следствие 5. При выполнении условий теоремы 5 решение уравнения (8) единственно в $\Omega(u_0,\, r_0)$.

Следствие 6. При выполнении условий теоремы 6 решение уравнения (8) единственно в $\Omega^\gamma(u_0,\, r_0)$, $0 < \gamma \le 1$.

В **§ 3.4** рассмотрены нелинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными, построен регуляризирующий оператор, доказана равномерная сходимость регуляризованного решения к точному решению, установлены условия единственности решения в $\Omega(u_0,\, r_0)$ и $\Omega^\gamma(u_0,\, r_0), 0 < \gamma \le 1$.

$$\int_0^x K_0\big(x,z,s,u(s,z)\big) ds + \int_0^x \int_0^z N\big(x,z,s,\tau,u(s,\tau)\big) d\tau ds = g(x,z), \qquad (11)$$

где $K_0\big(x,z,s,u(s,z)\big) = K(x,z,s)u(s,z) + K_1\big(x,z,s,u(s,z)\big)$ и для заданных функций $K(x,z,s), g(x,z)$ выполняется условие *V*), а функции $N\big(x,z,s,\tau,u(s,\tau)\big), K_1\big(x,z,s,u(s,z)\big)$ подчиняются условию:

VI) $N(x,z,s,\tau,u) \in C^{1,0,0,0,1}(D_2), N_x(x,z,s,\tau,u) \in C^{0,0,0,0,1}(D_2), D_2 = D_1 \times R^1,$

$K_1(x,z,s,u) \in C^{1,0,0,1}(D_2), D_1 = \{(x,z,s,\tau)/\ 0 \le s \le x \le b, 0 \le \tau \le z \le a\}$;

$|K_2(x,z,s,u) - K_2(x,z,s,\omega) - K_2(y,z,s,u) + K_2(y,z,s,\omega)| \le$

$\le L_{K1}(x-y)|u-\omega|, \qquad y \le x, \qquad (x,y) \in [0,b], \qquad 0 < L_{K1} = const,$

$|N_1(x,z,s,\tau,u) - N_1(x,z,s,\tau,\omega) - N_1(y,z,s,\tau,u) + N_1(y,z,s,\tau,\omega)| \leq$
$\leq L_N(x-y)|u-\omega|, \quad y<x, \quad (x,y)\in[0,b], \quad 0<L_N = const,$
$N_1\big(x,z,s,\tau,u(s,\tau)\big) = -C_2N\big(x,z,s,\tau,u(s,\tau)\big) - N_x\big(x,z,s,\tau,u(s,\tau)\big),$
$K_2\big(x,z,s,u(s,z)\big) = -C_2K_1\big(x,z,s,u(s,z)\big) - K_{1x}\big(x,z,s,u(s,z)\big).$

Действуем оператором $C_2I + D + C_1T$ на уравнение (11). Тогда получим следующее уравнение

$$k(x,z)u(x,z) + \int_0^x G(s,z)u(s,z)ds = \int_0^x K_3\big(x,z,s,u(s,z)\big)ds +$$

$$+\int_0^x\int_0^z N_1\big(x,z,s,\tau,u(s,\tau)\big)\,d\tau ds + C_1\int_0^x u(s,z)ds\int_s^x K_0\big(\nu,z,s,u(\nu,z)\big)d\nu +$$

$$+C_1\int_0^x\int_0^z\int_s^x N\big(\nu,z,s,\tau\,,u(s,z)\big)\,u(\nu,\tau)d\nu d\tau ds + f(x,z), \tag{12}$$

где $f(x,z) = C_2g(x,z) + g_x(x,z),$
$K_3\big(x,z,s,u(s,z)\big) = K_2\big(x,z,s,u(s,z)\big) + [L(s,z,s) - L(x,z,s)]u(s,z).$

Рассмотрим систему уравнений с малым параметром $\varepsilon\in(0,1)$ вида

$$\big(\varepsilon + k(x,z)\big)u_\varepsilon(x,z) + \int_0^x G(s,z)\,u_\varepsilon(s,z)ds = \int_0^x K_3\big(x,z,s,u_\varepsilon(s,z)\big)ds +$$

$$+\int_0^x\int_0^z N_1\big(x,z,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)d\tau ds + C_1\int_0^x u_\varepsilon(s,z)ds\int_s^x K_0\big(\nu,z,s,u_\varepsilon(\nu,z)\big)\,d\nu +$$

$$+C_1\int_0^x\int_0^z\int_s^x N\big(\nu,z,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)u_\varepsilon(\nu,z)d\nu d\tau ds + \varepsilon u(0,z) + f(x,z). \tag{13}$$

Пусть $q = q_1 + q_2$, $q_1 = (L_{K1} + aL_N)bd_1^{-1} + C_1ab(M_{N1}r + M_N)(2+e^{-1})d_1^{-1}$,
$q_2 = (ab(C_2M_{N1} + L_{N2}) + 2a(L_1 + C_2L_2) + C_2M_{K1} + M_{K2})(1+e^{-1})d_1^{-1}$,
$M_{N1} = \max_{D_2}|N_u(x,z,s,\tau,u)|$, $L_{N2} = \max_{D_2}|N_{xu}(x,z,s,\tau,u)|$,
$M_{K1} = \max_{D_1}|K_{1u}(x,z,s,u)|, M_{K2} = \max_{D_1}|K_{1xu}(x,z,s,u)|.$

Теорема 7. Пусть выполняются условия *V*)- *VI*), $q<1$ и уравнение (11) имеет решение $u(x,z)\in C(D)$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ решение уравнения (13) равномерно сходится к решению уравнения (12), причем

$$\|u_\varepsilon(x,z) - u(x,z)\|_{C(D)} \leq \Big(4(d_1e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x,z)\|_{C[0,b]} + \omega_u\big(\varepsilon^\beta\big)\Big)/(1-q).$$

Следствие 7. При выполнении условий теоремы 7 решение уравнения (11) единственно в $\Omega(u_0,\, r_0)$.

Теорема 8. Пусть выполняются условия *V*)- *VI*), q<1 и уравнение (11) имеет решение $u(x,z)\in C^\gamma(D)$, $0<\gamma\leq 1$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ решение уравнения (13) равномерно сходится к решению уравнения (12), причем

$$\|u_\varepsilon(x,z) - u(x,z)\|_{C(D)} \leq C_2\varepsilon^\gamma/(1-q).$$

Следствие 8. При выполнении условий теоремы 8 решение уравнения (11) единственно в $\Omega^{\gamma}(u_0, r_0)$, $0 < \gamma \le 1$.

В четвертой главе исследуются системы интегральных уравнений Вольтера первого рода. Полученные результаты распространены на случай системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными.

В **§ 4.1** рассматривается система линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\int_0^x K(x,t)u(t)dt = g(x). \tag{14}$$

Предполагается, что искомая вектор–функция $u(x) \in C_n[0,b]$, а для заданных вектор–функции $g(x)$ и $n{\times}n$ – матричной функции $K(x,t)$ выполняются условия:

VII) $g(x) \in C_n^1[0,b]$, $g(x) = colon\big(g_1(x), \dots, g_n(x)\big)$, $g^{(i)}(0) = 0, i = 0,1;$
$K_{i,j}(x,t) \in C^{1,0}(D), D = \{(x,t)/\ 0\ \le t \le x \le b\}$, $i,j = \overline{1,n}$;
$detK(0,0) = 0, \|K(x,x)\| \le c_0 k(x)$, $\|\cdot\|$- норма матрицы, $0 < c_0 = const$,
$k(x) = \min\limits_{1\le i\le n} k_i(x)$, $k_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ – собственные значения матрицы
$[K(x,x) + K^*(x,x)]/2$, $K^*(x,x)$–сопряженная матрица к матрице $K(x,x)$,
$k(0) = 0, 0 < k(x)\ \forall x \in (0,b]$, $k(x)$- неубывающая функция;
VIII) $G(x) = L(x,x) + C_1 v(x)$, $L(x,t) = C_2K(x,t) + K_x(x,t)$,
$0 < C_1, C_2 = const$, $v(x) = diag\big(g_1(x), \dots, g_n(x)\big)$, $\|G(x)\| \le C_3\lambda(x)$,
$\lambda(x) = \min\limits_{1\le i\le n} \lambda_i(x)$, $\lambda_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ –собственные значения матрицы
$[G(x) + G^*(x)]/2$, $G^*(x)$–сопряженная матрица к матрице $G(x), \lambda(x) \ge d_1$,
$0 < d_1, C_3 = const$; $h_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ –собственные значения матрицы $[K^*(x,x)G(x) + G^*(x)K(x,x)]/2$, $\min\limits_{1\le i\le n} h_i(x) \ge c_1k(x)\lambda(x)$, $0 < c_1 = const$.

Действуя на систему (11) оператором $C_1T + C_2I + D$, где –единичная диагональная матрица, T – оператор Вольтерра $(Tu)(x) = \int_0^x v(t)u(t)dt$, $v(x) = diag\big(g_1(x), \dots, g_n(x)\big)$, получим систему интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

$$K(x,x)u(x) + \int_0^x G(t)u(t)dt = -\int_0^x [L(x,t) - L(t,t)]u(t)dt +$$

$$+C_1\int_0^x\int_t^x (Bu)(s,t)u(t)dsdt + f(x), \tag{15}$$

где $(Bu)(s,t) = \big(K_{ij}(s,t)u_i(s)\big)$, $i,j = \overline{1,n}$, $f(x) = C_2g(x) + g'(x)$.

Рассмотрим систему уравнений с малым параметром $\varepsilon \in (0,1)$

$$\left(\varepsilon I + K(x,x)\right)u_\varepsilon(x) + \int_0^x G(t)\,u_\varepsilon(t)dt = -\int_0^x [L(x,t) - L(t,t)]\,u_\varepsilon(t)dt\ +$$

$$+C_1\int_0^x\int_t^x (Bu_\varepsilon)(s,t)u_\varepsilon(t)dsdt + \varepsilon u(0) + f(x). \qquad (16)$$

Теорема 9. Пусть выполняются условия *VII*), *VIII*), $q < 1$ и система уравнений (14) имеет решение $u(x) \in C_n[0,b]$. Тогда решение системы (16) при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходится к решению системы (14) и справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{C_n[0,b]} \le (1-q)^{-1} \times$$

$$\times\left((1 + C_3 l^2\theta^{-1})\left[2l^2(d_1\theta)^{-1}e^{\frac{\theta}{l^2}}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x)\|_{C_n[0,b]} + \omega_u(\varepsilon^\beta)\right]\right),$$

$\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup\limits_{|x-t|\le\varepsilon^\beta}\|u(x) - u(t)\|$, $0 < \beta < 1, \theta = min(1,c_1)\ l = max(1,c_0)$,

$q = b\dfrac{l^2}{d_1\theta}[C_2L_1 + L_2 + 2C_1Mr]\left(e^{-1} + \dfrac{2C_3l^2}{\theta}\right).$

Следствие 9. Если выполняются условия теоремы 9, то решение системы уравнений (14) единственно в $\Omega_n(u_0,\ r_0)$.

Теорема 10. Пусть выполняются условия *VII*), *VIII*), $q < 1$ и система уравнений (14) имеет решение $u(x) \in C_n^\gamma[0,b], 0 < \gamma \le 1$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение системы (16) равномерно сходится к решению системы (14), причем

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{C_n[0,b]} \le (1-q)^{-1}N_1\varepsilon^\gamma, \qquad 0 <\ N_1 = const.$$

Следствие 10. При выполнении условий теоремы 10 решение системы уравнений (14) единственно в $\Omega_n^\gamma(u_0,\ r_0)$, $\quad 0 < \gamma \le 1$.

В **§ 4.2** исследована система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\int_0^x N_0\left(x,t,u(t)\right)dt = g(x), \qquad (17)$$

где $N_0\left(x,t,u(t)\right) = K(x,t)u(t) + N\left(x,t,u(t)\right)$, искомая вектор-функция $u(x) \in C_n[0,b]$, для известных вектор-функций $g(x)$, и $n\times n$ – матричной функции $K(x,t)$ имеют место условия *VII*), *VIII*), для вектор-функций $N\left(x,t,u(t)\right)$ выполняются условие:

IX) $N(x,t,u) \in C_n^{1,0,1}(D\times R^1), M_0(x,t,u) \in C_n^{0,0,1}(D\times R^1), M_0(x,x,u) = 0$, $M_0\left(x,t,u(t)\right) = C_2N\left(x,t,u(t)\right) + N_x\left(x,t,u(t)\right)$, , для $t < x, (x,s),(t,s) \in D$, $(x,s,u),(x,s,w),(t,s,w),(t,s,u) \in D\times R^1$, $0 < L_N = const$ имеет место

$$\|M_0(x,s,u) - M_0(x,s,w) - M_0(t,s,w) + M_0(t,s,u)\| \le L_N(x-t)\|u-w\|.$$

В данной постановке для (17) построен регуляризирующий оператор, доказана равномерная сходимость регуляризованного решения к точному решению, установлена единственность решения системы (17) в $\Omega_n(u_0,\ r_0)$ и $\Omega_n^{\gamma}(u_0,\ r_0),\ 0<\gamma\le 1$.

В **§ 4.3** изучается система линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными

$$\int_0^x K(x,z,s)u(s,z)ds+\int_0^x\int_0^z Q_0(x,z,s,\tau)u(s,\tau)d\tau ds=g(x,z), \quad (18)$$

где известные $n\times n$ – матричные функции $K(x,z,s),\ Q_0(x,z,s,\tau)$ и вектор-функция $g(x,z)$ удовлетворяют условиям:

X) $g(x,\tau)=colon\big(g_1(x,\tau),\dots,g_n(x,\tau)\big), g(x,z)\in \mathrm{C}_n^{1,0}(D), D=[0,b]\times[0,a]$, $g^{(i)}(0,z)=0, i=0.1;\ K_{ij}(x,z,s)\in \mathrm{C}^{1,0,0}(D_0), i,j=\overline{1,n}$, $D_0=\{(x,z,s)/0\le s\le x\le b, 0\le z\le a\}$, $detK(0,z,0)=0, k(x,z)=min_{1\le i\le n} k_i(x,z)$, $k_i(x,z)\ (i=\overline{1,n})-$ собственные значения матрицы $[K(x,z,x)+K^*(x,z,x)]/2$, $K^*(x,z,x)$ – сопряженная матрица к матрице $\mathrm{K}(x,z,x)$, $k(0,z)=0$, $k(x,z)$ – неубывающая по x функция в области D;

XI)$Q_{0ij}(x,z,s,\tau)\in \mathrm{C}^{1,0,0,0}(D_1), D_1=\{(x,z,s,\tau)/\ 0\le s\le x\le b, 0\le\tau\le z\le a\}$
$G(x,z)=L(x,z,x)+C_1v(x,z),\ L(x,z,s)=C_2K(x,z,s)+K_x(x,z,s)$;
$v(x,z)=diag\big(g_1(x,z),\dots,g_n(x,z)\big),\ \lambda(x,z)=min_{1\le i\le n}\lambda_i(x,z)$,
$\lambda_i(x,z)(i=\overline{1,n})$ –собственные значения матрицы $[G(x,z)+G^*(x,z)]/2$,
$G^*(x,z)$– сопряженная матрица к матрице $G(x,z),\ \ \lambda(x,z)\ge d_1>0$,
$\|G(x,z)\|\le C_3\lambda(x,z),\ \|K(x,z,x)\|\le \mathrm{c}_0k(x,z),\ \|\cdot\|-$ норма матрицы,
$0<d_1, \mathrm{c}_0=const,\ \ 0<C_i=const,\ \ \ \ i=1,2,3$;
$min_{1\le i\le n} h_i(x,z)\ge c_1k(x,z)\lambda(x,z),\ h_i(x,z)\ \ (i=\overline{1,n})-$ собственные значения матрицы $[K^*(x,z,x)G(x,z)+G^*(x,z)\,K(x,z,x)]/2$, $0<c_1=const$.

На систему (18) действуя оператором C_1T+C_2I+D, где –единичная матрица, D – оператор дифференцирования по x,

$$(Tv)(x,z)=\int_0^x (Vu)(s,z)v(s,z)ds, (Vu)(x,z)=diag\big(u_1(x,z),\dots,u_n(x,z)\big),$$

получена система интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

$$K(x,z,x)u(x,z)+\int_0^x G(s,z)u(s,z)ds=\int_0^x[L(s,z,s)-L(x,z,s)]u(s,z)ds+$$
$$+\int_0^x\int_0^z Q(x,z,s,\tau)\,u(s,\tau)d\tau ds+\int_0^x ds\int_s^x(Bu)(\nu,z,s)u(s,z)d\nu+$$
$$+\int_0^x\int_0^z d\tau ds\int_s^x(B_0u)(\nu,z,s,\tau)u(s,z)d\nu+f(x,z), \quad (19)$$

$f(x,z)=\ C_2g(x,z)+g_x(x,z), Q(x,z,s,\tau)=-C_2Q_0(x,z,s,\tau)-Q_{0x}(x,z,s,\tau)$,

$(Bu)(\nu,z,s) = C_1\left(K_{i,j}(\nu,z,s)u_i(\nu,z)\right),\quad i,j=\overline{1,n},$

$(B_0u)(\nu,z,s,\tau) = C_1\left(Q_{0i,j}(\nu,z,s,\tau)u_i(\nu,\tau)\right),\qquad i,j=\overline{1,n}.$

Для решения системы уравнений с малым параметром ε из интервала (0,1)

$$(\varepsilon I + K(x,z,x))u_\varepsilon(x,z) + \int_0^x G(s,z)u_\varepsilon(s,z)ds = \int_0^x [L(s,z,s) - L(x,z,s)] \times$$

$$u_\varepsilon(s,z)ds + \int_0^x\int_0^z Q(x,z,s,\tau)\,u_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds + \int_0^x ds\int_s^x (Bu_\varepsilon)(\nu,z,s)u_\varepsilon(s,z)d\nu +$$

$$+\int_0^x\int_0^z d\tau ds\int_s^x (B_0u_\varepsilon)(\nu,z,s,\tau)u_\varepsilon(s,z)d\nu + \varepsilon u(0,z) + f(x,z) \qquad (20)$$

доказаны:

Теорема 11. Если выполняются условия *X*), *XI*), $q<1$ и система (18) имеет решение $u(x,\tau)\in \mathrm{C}_n(D_0)$, то при $\varepsilon\to 0$ решение системы (20) равномерно сходится к решению системы (18), причем имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,z) - u(x,z)\|_{\mathrm{C}_n(D_0)} \le$$

$$\le (1-q)^{-1}\left((1+C_3C_4)\left[2C_4e^{\frac{\theta}{l^2}}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x,z)\|_{C_n(D_0)} + \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\right]\right),$$

$$\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right) = \sup_{\substack{|x-y|\le\varepsilon^\beta\\ z\epsilon[0,a]}} \|u(x,z)-u(y,z)\| \;,\; 0<\beta<1,\; C_4 = \frac{l^2}{d_1\theta},$$

$$q = C_4b\left\{\left[2r(T_{K2}+T_{Q1}a) + C_2T_K + T_{K1} + T_Qa\right]\left(\frac{2C_3l^2}{\theta} + e^{-1}\right) + \frac{l^2}{\theta}aL_QC_3\right\},$$

$$T_{Q1} = \max_{D_1}\|Q_0(x,z,s,\tau)\|, T_Q = \max_{D_1}\|Q(x,z,s,\tau)\|,\; T_{K2} = \max_{D_0}\|K(x,z,s)\|,$$

$$L_Q = Lip(Q(x,z,s,\tau)|x),\; T_K = \max_{D_0}\|K_x(x,z,s)\|, T_{K1} = Lip(K_x(x,z,s)|x).$$

Следствие 11. При выполнении условий теоремы 11 решение системы (18) единственно в $\Omega_n(u_0,\, r_0)$.

Теорема 12. Пусть выполняются условия *X*), *XI*), $q<1$ и система (18) имеет решение $u(x,\tau)\in \mathrm{C}_n^\gamma(D_0)$, $0<\gamma\le 1$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ решение системы (20) равномерно сходится к решению системы (18), причем

$$\|u_\varepsilon(x,\tau)-u(x,\tau)\|_{\mathrm{C}_n(D_0)} \le (1-q)^{-1}N_1\varepsilon^\gamma,\quad 0<N_1=const.$$

Следствие 12. Если выполняются условия теоремы 12, то решение системы (18) единственно в $\Omega_n^\gamma(u_0,\, r_0)$, $\;0<\gamma\le 1$.

В пятой главе рассматриваются вопросы численного решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода.

В **§ 5.1** обоснован метод численного решения линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода (1) при выполнений условий *II*), *III*) и

XII) $K(x,t)\in C^{2,1}(D), D=\{(x,t)/0\le t\le x\le b\},\; g(x)\in C^2\,[0,b].$

Для построения численного решения уравнения (1), полагая $x = x_i,\ i = 1..n$ в уравнении (4) и аппроксимируя интегралы в узлах равномерной сетки с шагом $h > 0\quad \omega_h = \{x_i = ih,\quad i = 0..n,\quad b = nh\}$ квадратурной формулой правых прямоугольников получена система алгебраических уравнений

$$u_{\varepsilon,i} = -\frac{h}{\varepsilon + k_i}\sum_{j=1}^{i-1} exp\left(-h\sum_{s=j+1}^{i}\frac{G_s}{\varepsilon + k_s}\right)\frac{G_j}{\varepsilon + k_j}\left\{h\sum_{s=1}^{j-1}[L_{i,s} - L_{j,s}]u_{\varepsilon,s} + \right.$$

$$+h\sum_{s=j+1}^{i-1}[L_{i,s} - L_{s,s}]u_{\varepsilon,s} - C_1 h\sum_{s=1}^{j} u_{\varepsilon,s}\, h\sum_{m=j+1}^{i} K_{m,s}u_{\varepsilon,m} - C_1 h\sum_{s=j+1}^{i-1} u_{\varepsilon,s}\times$$

$$\left.\times h\sum_{m=s+1}^{i} K_{m,s}u_{\varepsilon,m} + f_j - f_i\right\} + \frac{1}{\varepsilon + k_i} exp\left(-h\sum_{s=1}^{i}\frac{G_s}{\varepsilon + k_s}\right)\left\{-h\sum_{j=1}^{i-1}[L_{i,j} - \right.$$

$$\left. -L_{j,j}]u_{\varepsilon,j} + C_1 h\sum_{j=1}^{i-1} u_{\varepsilon,j}\, h\sum_{s=j+1}^{i} K_{s,j}u_{\varepsilon,s} + \varepsilon u_{0h} + f_i\right\},\quad i = 1..n,\qquad (21)$$

где $\quad u_{0h} = \dfrac{f_1}{hG_1 + k_1}$, $\qquad$ причем $|u_{0h} - u_0| \le d_0 h,\ \ 0 < d_0 = const.$

Теорема 13. Если выполняются условия *II*), *III*), *XII*), $q = q_1 b + q_2 < 1$ и $\varepsilon = O(h^\alpha)$ для всех $0 < \alpha < 1/2$, то решение системы (21) при $h \to 0$ равномерно сходится к u_i - точному решению уравнения (1), причем

$$\|u_{\varepsilon,i} - u_i\| \le N_1 h^\alpha + N_2 h^{1-\alpha} + N_3 h,\ \ 0 < N_m = const,\qquad m = 1,2,3,$$

$$q_1 = (L_2 + C_2 L_1)(2d_2 h^{1-\alpha} + e^{-1})d_1^{-1},\ \ q_2 = 2C_1 Mr(T_0 d_2 b h^{1-\alpha} + e^{-1})d_1^{-1},$$

$L_1 = max_D|K_x(x,t)|,\ L_2 = max_D|K_{xx}(x,t)|,\ \ M = max_D|K(x,t)|, |u(x)| \le r,$ $T_0 = max_{x\in[0,b]}|G(x)|,\quad d_2 = sup\left(\sum_{j=1}^{i-1} exp\left(-h\sum_{s=j+1}^{i}\frac{G_s}{\varepsilon+k_s}\right)\left(h\sum_{s=j+1}^{i}\frac{G_s}{\varepsilon+k_s}\right)\right).$

Приведены примеры, проведены численные расчеты на компьютере, которые подтверждают теоретические выкладки.

В **§ 5.2** исследуется метод численного решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода (5), где известные функции $K(x,t),\ \ N(x,t,u(t)), g(x)$ подчиняются условиям *II*)-*IV*), *XII*) причем,

XIII) $\quad N(x,t,u) \in C^{2,0,1}\ (D \times R^1), D = \{(x,t)/0 \le t \le x \le b\}.$

Пусть $x_i \in \omega_h, i = 0..n$. В (7) полагая $x = x_i, i = 1..n$, с помощью квадратурной формулы правых прямоугольников из уравнения (7) получим систему нелинейных алгебраических уравнений вида

$$u_{\varepsilon,i} = -\frac{1}{\varepsilon + k_i}h\sum_{j=1}^{i-1} exp\left(-h\sum_{s=j+1}^{i}\frac{G_s}{\varepsilon + k_s}\right)\frac{G_j}{\varepsilon + k_j}\times$$

$$\times\left\{h\sum_{s=1}^{j}[M_{j,s}(u_{\varepsilon,s}) - M_{i,s}(u_{\varepsilon,s})] - h\sum_{s=j+1}^{i-1} M_{i,s}(u_{\varepsilon,s}) - C_1 h\sum_{s=1}^{j-1} u_{\varepsilon,s}\ \times\right.$$

$$\times h\sum_{m=j+1}^{i}K_{m,s}u_{\varepsilon,m}-C_1h\sum_{s=j+1}^{i-1}u_{\varepsilon,s}\,h\sum_{m=s+1}^{i}K_{m,s}u_{\varepsilon,m}-C_1h\sum_{s=1}^{j-1}h\times$$

$$\left.\times\sum_{m=j+1}^{i}N_{m,s}(u_{\varepsilon,s})\,u_{\varepsilon,m}-C_1h\sum_{s=j}^{i-1}h\sum_{m=s+1}^{i}N_{m,s}(u_{\varepsilon,s})u_{\varepsilon,m}+f_j-f_i\right\}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+k_i}exp\left(-h\sum_{s=1}^{i}\frac{G_s}{\varepsilon+k_s}\right)\left\{h\sum_{j=1}^{i-1}M_{i,j}(u_{\varepsilon,j})+C_1h\sum_{j=1}^{i-1}u_{\varepsilon,j}\,h\sum_{s=j+1}^{i}K_{s,j}u_{\varepsilon,s}+\right.$$

$$\left.+C_1h\sum_{j=1}^{i-1}h\sum_{s=j+1}^{i}N_{s,j}(u_{\varepsilon,j})\,u_{\varepsilon,s}+\varepsilon u_{0,h}+f_i\right\},\qquad i=1..n, \tag{22}$$

где $M_{i,j}(u_{\varepsilon,j})=M(x_i,x_j,u(x_j)),\ \ f_i=f(x_i),\ x_j=jh,\ \ j=1..i,\ \ i=1..n.$
Введем обозначение

$$q=\frac{d_2bT_0}{d_1}(L_2+C_2L_1+L_N)\left(2\frac{h}{\varepsilon}+e^{-1}\right)+\frac{2C_1T_0Mbrd_2h}{d_1\varepsilon}+$$

$+C_1b\left(\frac{2T_0d_2h}{d_1\varepsilon}+\frac{1}{ed_1}\right)(M_N+K_Nr)$, $M_N=\max\limits_{D\times R^1}|N(x,t,u)|$, $K_N=\max\limits_{D\times R^1}|N_u(x,t,u)|$, $M, L_1, L_2, T_0, d_2, r -$ определяются также как в **§ 4.1.**

Теорема 14. При выполнении условий *II*)-*IV*), *XII*), *XIII*) $q<1$ и пусть $\varepsilon=O(h^\alpha)$ для всех $0<\alpha<1/2$. Тогда решение системы уравнений (22) при $h\to 0$ равномерно сходится к u_i - точному решению уравнения (5), при этом имеет место оценка

$$\|u_{\varepsilon,i}-u_i\|\le N_1h^\alpha+N_2h^{1-\alpha}+N_3h,\ \ 0<N_m=const, m=1,2,3.$$

ВЫВОДЫ

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с непрерывно дифференцируемыми ядрами и правой части, сведены к эквивалентным, в смысле разрешимости, интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода. Установлены условия на известные функции, которые обеспечивают возможность регуляризовать методом лаврентьевского типа изучаемый класс интегральных уравнений Вольтерра первого рода, доказать сходимость по равномерной метрике решения регуляризованного уравнения к точному решению исходного интегрального уравнения Вольтерра первого рода, установить единственность решения в шаре. Показано, что утверждения доказанной теоремы и следствия справедливы и в случае, когда решение принадлежит пространству $C^\gamma[0,b], 0<\gamma\le 1$.

На основе квадратурной формулы правых прямоугольников произведена дискредитация регуляризованного интегрального уравнения. Доказана сходимость решения полученной системы алгебраических уравнений к точному решению интегральных уравнений Вольтерра первого рода по сеточной метрике. При доказательстве данных фактов существенным является согласование малого параметра и шага дискредитации в форме

$\varepsilon = O(h^{\alpha}), 0 < \alpha < 1/2$. Хотя, путем дискредитации регуляризованного интегрального уравнения получена система нелинейных алгебраических уравнений, она при $h < h_0 = const$, представляет собой рекурсивную формулу, которая существенно упрощает процесс вычисления. Рассмотренные примеры и полученные численные вычисления по указанной рекурсивной формуле с помощью, разработанной на языке Delphi, программы подтверждают теоретические результаты.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Научные результаты диссертации рекомендуем использовать при регуляризации и построении численного решения обратных и нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, которые имеют широкое практическое приложение в математической биологии, теории упругости, теплофизике и др.

Предлагаем использовать результаты диссертации при чтении лекций по теории интегральных уравнений, при разработке специальных курсов для бакалавриата, магистратуры и для аспирантов, PhD докторов наук по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика».

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Мустафаева, Н. Т.** Регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [текст] // Т. Т. Каракеев, Н. Т. Мустафаева // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкеке, 2014. – Выпуск 5. – С. 38-44. http://lib.knu.kg/files/2014/vestnik_5_2014.pdf

2. **Мустафаева, Н. Т.** Регуляризация нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [текст] // Т. Т. Каракеев, Н. Т. Мустафаева //Вестник науки и образования. – Иваново, 2016. – №6(18). – С. 14-18. https://elibrary.ru/item.asp?id=26210584

3. **Мустафаева, Н. Т.** Регуляризация линейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Н.Т. Мустафаева // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. – Бишкек, 2016. – Т. 16, № 1. – С. 19-22. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25979329

4. **Мустафаева, Н. Т.** Метод регуляризации для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимым переменными [Текст] / Н. Т. Мустафаева // World and science: problems And innovations. – Сборник статьей IV Международной НПК. – Пенза, 2016. – С. 12-21. https://naukaip.ru/wp-content/uploads/2016/07/MK-40.pdf

5. **Мустафаева, Н. Т.** Регуляризация нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / Н. Т. Мустафаева // Вестник Павлодарского государственного университета: Физико-математическая серия. – Павлодар, 2017. – №4. – С.31-38.

https://vestnik-pm.tou.edu.kz/storage/journals/fizmat_4_2017.pdf

6. **Мустафаева, Н. Т.** Регуляризация системы линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Н.Т. Мустафаева // Journal of Advanced Research in Technical Science. – North Charleston, USA: SRC MS, CreateSpace. – 2017. – Issue 7-2. – P. 5-11. https://elibrary.ru/item.asp?id=30778065

7. **Мустафаева, Н. Т.** Регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимым переменными [Текст] / Т. Т. Каракеев, Н. Т. Мустафаева // Известия вузов Кыргызстана. – Бишкек, 2017. – №9. – С. 10-16. https://elibrary.ru/item.asp?id=32367498

8. **Мустафаева, Н.Т.** Регуляризация нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимым переменными [Текст] / Т. Т. Каракеев, Н. Т. Мустафаева // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2017. – №4(92). – С. 17-25.

9. **Мустафаева Н.Т.** Численное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Н. Т. Мустафаева // Journal of Advanced Research in Technical Science. – North Charleston, USA: SRC MS, CreateSpace. – 2018. – Issue 8. – P. 56-62. https://elibrary.ru/item.asp?id=32360810

10. **Мустафаева Н.Т.** The method of numerical solution of nonlinear Volterra integral equations of the first kind [Текст] / Т. Т. Каракеев, Н. Т. Мустафаева // Известия НАН РК: Серия физ.-матем. – Алматы, 2018. – № 5(321). – С. 10-18. http://physics-mathematics.kz/images/pdf/m20185/02_10-18.pdf

11. **Мустафаева Н.Т.** Регуляризация системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Н. Т. Мустафаева // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2018. – №4(96). – С. 28-33. https://elibrary.ru/item.asp?id=37752910

Мустафаева Нагима Таировнанын 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган «Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелерин чыгаруунун регуляризациялык-сандык ыкмалары» аттуу диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: Вольтерранын интегралдык теңдемеси, бир калыпта жыйналуучулук, регуляризация, кичи параметр, аппроксимация, квадратуралык формула.

Изилдөөнүн объектиси: Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелери, Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин системалары.

Изилдөөнүн максаты: Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелерин регулярдаштыруу жана алардын сандык чыгарылышын түзүү маселелерин изилдөө.

Изилдөөнүн ыкмасы: регулярдаштыруу ыкмасы, чектүү суммалар ыкмасы, удаалаш жакындоо ыкмасы, квадратуралык формулалар ыкмасы.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы:

– Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелерин регулярдаштыруу ыкмасы иштелип чыкты жана бул теңдемелердин чыгарылышынын жалгыздыгын камсыздаган шарттар аныкталды;

– Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин системасын регулярдаштыруу ыкмасы негизделди;

– Регулярдаштырылган теңдеменин негизинде Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелерин сандык чыгаруу ыкмасы иштелип чыкты жана негизделди;

– Эки көз карандысыз өзгөрүлмөлүү Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелери үчүн регулярдаштыруу оператору түзүлдү жана регулярдаштырылган чыгарылыштын так чыгрылышка бир калыпта жыйналуусу далилденди.

Колдонуу даражасы же колдонуу боюнча сунуштар: Диссертациянын натыйжалары негизинен теориялык мүнөзгө ээ жана жарым-жартылай дифференциалдык теңдемелер үчүн локалдык эмес чектик жана тескери маселелерди чечүү үчүн, Вольтерра интегралдык теңдемелеринин биринчи түрдөгү сандык чечими үчүн колдонулушу мүмкүн. ийкемдүүлүк теориясы, гидрофизика жана механика.

Колдонуу жааты: Бул сыяктуу маселелер дифференциалдык теңдемелердин сапаттык теориясы менен байланышкан математиканын, физиканын, техниканын ж.б. илимдин кээ бир тармактарында, теориялык маселелерди чыгарууда кездешет.

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы на тему «Регуляризационно-численные методы решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление Мустафаевой Нагимы Таировной

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра, равномерная сходимость, регуляризация, малый параметр, аппроксимация, квадратурная формула.

Объект исследования: интегральные уравнения Вольтерра первого рода, системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода.

Цель работы: исследование вопросов регуляризации и численного решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода.

Методы исследования: основными методами являются метод регуляризации, метод конечных сумм, метод последовательных приближений, метод квадратурных формул.

Научная новизна:

– разработан и обоснован метод регуляризации и установлены условия единственности решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода;

– обоснован метод регуляризации системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода;

– разработан и обоснован метод численного решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода на основе регуляризованных уравнений;

– построен регуляризирующий оператор для интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными, доказана равномерная сходимость регуляризованного решения к точному решению.

Степень использование или рекомендации по использованию: Результаты диссертации носят в основном теоретический характер и могут быть применены для решения нелокальных краевых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, для численного решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода, возникающих в теории упругости, гидрофизике, механике.

Область применения: Подобные задачи встречаются в математике, физике, технике и некоторых других областях науки при постановке теоретических задач связаных с качественной теорией уравнений.

SUMMARY

The summary of dissertation work, the theme of the work is "Regularized-numerical methods to solve Volterra integral equations of the first kind", which was provided to competition of academic degree of Mustafayeva Nagima Tairovna, who is candidate of physical and mathematical science by specialization 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control.

Key words: Volterra integral equations, uniform convergence, regulation, small parameter, approximation, quadrature formula.

Object of research: Volterra integral equations of the first kind, the systems of Volterra integral equations of the first kind.

Purpose of research: to make a research of the issues of regularization and numerical methods of Volterra integral equations of the first kind.

Methods of research: The main method is regularization method, finite sum method, successive approximation method, quadrature method.

Scientific novelty:

- Developed and justified the regularization method and set conditions of uniqueness of the solution Volterra integral equations of the first kind.

- Justified the regularization method of the systems of Volterra integral equations of the first kind.

- Developed and justified numerical solution method of Volterra integral equations of the first kind on the base of regularization method.

- Built regularization operator for Volterra interal equations of the first kind with two independent variables, also uniform convergence of a regularized solution to an exact solution is proved.

Degree of use or recommendations for use: The results of the thesis are mainly theoretical in nature and can be applied to solve nonlocal boundary value and inverse problems for partial differential equations, for the numerical solution of Volterra integral equations of the first kind arising in the theory of elasticity, hydrophysics, and mechanics.

Scope: Such problems are encountered in some fields of science, solving theoretical problems related to the qualitative theory of differential equations in mathematics, physics, engineering, etc.