КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН ИЛИМ ЖАНА БИЛИМ БЕРҮҮ МИНИСТРЛИГИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

Кол жазма укугунун негизинде

УДК: 517.928

АКМАТОВ АБДИЛАЗИЗ АЛИЕВИЧ

Туруктуулук шарты өзгөргөн учурда сингулярдык козголгон теңдеменин чечиминин асимптотикасын баалоо (Туруктуулук шартын аныктоочу өздүк маанилер эселүү болгон учур)

Адистиги 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу

Физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертация

Илимий жетекчиси: физика-математика илимдеринин доктору, профессор Каримов С.

Ош – 2024

МАЗМУНУ

ШАРТТУУ БЕЛГИЛӨӨЛӨР ЖАНА КЫСКАРТЫП ЖАЗУУЛАР

$\forall$ – каалагандай же ар кандай. Жалпылык квантору.

$\exists$ – жашоо квантору, $\exists x - x$ деген элемент жашайт (табылат, бар).

$\in$ – таандык, тиешелүү, $\notin$ – таандык эмес же тиешелүү эмес.

$\subset$ – камтылат (бир көптүк экинчисине).

$\cup$– биригүү. $\cap$- кесилишүү.

$\vee$ – же, $\wedge$ – жана.

Z , R , C - тиешелүү түрдө бүтүн, чыныгы жана комплекстик сандардын көптүгү.

$\|\bullet\|$ - Чебышевдик норма, үзгүлтүксүз функциялар үчүн, функциянын модулунун максимуму.

O, o - тартип символдору(Ландау).

СККДТТ – сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелер теориясы.

ТО – тартылуу областы.

ЧКС – чек аралык катмар сызыгы.

ЧКО – чек аралык катмар областы.

КТ – козголбогон теңдеме.

А - аныктама

Т - теорема.

Н - натыйжа.

Д.- далилдөө.

М- маселе.

КИРИШҮҮ

Диссертациялык теманын актуалдуулугу. Илимдин биология, экология, химия, физика, кванттык механика, суюктуктардын агым теориясы, электромагниттик теория жана башка ушул сыяктуу бөлүмдөрүн изилдөөдө математикалык модел катары “туунду алдында кичине параметрди кармаган кадимки дифференциалдык теңдемелер” алынат.

Сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелерди системалуу изилдөө А. Н. Тихонов [69],[70] тарабынан башталган. Ар түрдүү класстагы сингулярдык козголгон маселелерди изилдөө А. Б. Васильева [34-38], Л. С. Понтрягин [63-66], Е. Ф. Мищенко[56], [57]? С. А. Ломов [55], Н. Н. Боголюбов [32], В. Вазов [33], М. И. Иманалиев [40-49], П. С. Панков[62], К. Алымкулов [8-14],[79], [80], К. Касымов [50], С. Каримов [51],[52], К. С. Алыбаев [4-7], Д. А. Турсунов [71],[72], К. Б. Тампагаров [68] жана башка окумуштуулар тарабынан жүргүзүлгөн.

Диссертациялык жумуш туруктуулук шарты алмашкан учурда, сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелердин чечиминин асимптотикалык ажыралмасын тургузууга багытталган. Жумушта кичине козголуунун туруктуулуктун узартылыш кубулушуна тийгизген таасири изилденет.

Диссертациянын темасынын приоритеттүү илимий багыттар, ири илимий программалар (долбоорлор), билим берүү жана илимий мекемелер тарабынан жүргүзүлүүчү негизги илимий-изилдөө иштери менен болгон байланышы:

Диссертациялык иш ОшМУнун математикалык анализ кафедрасынын “Инженердик-техникалык жана физикалык маселелерди чечүүдө сингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелерди колдонуу” (илимий жетекчиси – физика-математика илимдеринин доктору, профессор С. Каримов) илимий-изилдөө темасынын алкагында аткарылган (2020-2021-ж., мамлекеттик каттоосу №0007520, 01.01.2018).

Изилдөөнүн максаты жана маселеси: Жумуштун максаты болуп, сингулярдык козголгон маселенин чечиминин асимптотикалык ажыралмасын тургузуу саналат.

Изилдөөнүн маселеси:

1). Кичине козголуу жок болгон учурда, сингулярдык козголгон маселенин чечиминин асимптотикалык ажыралмасын тургузуу;

2). Кичине козголуу бар болгон учурда, сингулярдык козголгон маселенин чечиминин асимптотикалык ажыралмасын тургузуу.

Алынган натыйжалардын илимий жаңылыгы:

1). Өздүк маанилер эселүү нөлдөргө ээ болбогон учурда, кичине козголуунун туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушуна тийгизген таасири аныкталды, сингулярдык козголгон маселенин чечиминин асимптотикалык ажыралмасы тургузулду;

2). Өздүк маанилердин эселүү нөлдөрү тегиздикте жаткан учурда, кичине козголуунун таасири аныкталып, сингулярдык козголгон маселенин чечиминин асимптотикалык ажыралмасы тургузулду;

3). Өздүк маанилердин эселүү нөлдөрү сан огунда жаткан учурда кичине козголуунун туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушуна тийгизген таасири аныкталды.

Алынган натыйжалардын практикалык маанилүүлүгү.

Диссертация теориялык мүнөзгө ээ болуп, алынган жыйынтыктарды козголууларда, термелүүлөрдө, оптикада, электротехникада, радиотехникада, гидродинамикадагы түрдүү абалдагы процесстерди изилдөөдө колдонууга болот. Изилдөөнүн жыйынтыктары ошондой эле сингулярдык козголуулар теориясы боюнча магистрлерди жана бакалаврларды даярдоонун атайын курстарында лекцияларды окууда колдонуу сунушталат.

Диссертациянын коргоого алып чыгылуучу негизги жоболору:

-Өздүк маанилердин эселүү нөлдөрү жок болгон учурдагы кичине козголуунун туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушуна тийгизген таасири;

- Өздүк маанилердин эселүү нөлдөрү тегиздикте жаткан учурдагы кичине козголуунун туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушуна тийгизген таасири;

-Өздүк маанилердин эселүү нөлдөрү сан огунда жаткан учурда кичине козголуунун туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушуна тийгизген таасири.

Изденүүчүнүн жеке салымы. Диссертациядагы бардык илимий жыйынтыктар, авторго таандык. Биргелешкен [10], [11] жана [17] эмгектерде маселени коюу илимий жетекчи С. Каримовго, аны чечүү жыйынтыктарды алуу, теоремаларды далилдөө изденүүчүгө, ал эми жыйынтыктарды талкуулоо жана тариздөө жумуштары А. М. Токторбаев, К.К. Шакиров, Замирбек кызы Наргизага таандык. [5-7], [14], [15] эмгектер кыргыз тилинде жарык көргөн.

Изилдөө натыйжаларын апробациялоо. Жумуштун жыйынтыктары төмөнкү эл аралык жана ата мекендик конференцияларда баяндалган жана талкууланган:

1). Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институтунун түзүлгөндүгүнүн 35 жылдыгына арналган “III Бөрүбаевдик окуулар” эл аралык илимий конференциясында (Бишкек ш., КР УИАнын Математика институту, 24-май, 2019-жыл);

2). Академик А.А. Бөрүбаевдин 70 жылдыгына арналган “Азыркы математиканын маселелери” эл аралык илимий конференциясында (Бишкек ш., КР УИАнын Математика институту, 5-10-июнь, 2021-ж);

3). Профессор А. К. Керимбековдун 75-жылдык юбилейине арналган IV эл аралык “Оптималдуу башкаруу, динамикалык системалар жана оператордук теңдемелердин актуалдуу маселелери” аттуу коференция (Бишкек ш., КРСУ, 23-25-июнь, 2022-ж);

4). «Математиканын актуалдуу проблемалары жана алардын колдонуштары» аталыштагы К. Алымкулов атындагы регионалдык семинарында (Ош ш., 2020 - 2023-жж);

5). Профессор К. С. Алыбаевдин 70-жылдык юбилейине арналган “Илим жана билим гармониясы – коомду өнүктүрүүчү күчтөрдүн негизи” аталышындагы илимий практикалык конференциясы (Жалал-Абад ш., Б. Осмонов атындагы Жалал-Абад мамлекеттик университети, 29-30-апрель, 2023-ж);

6). Профессор К. Алымкуловдун 80-жылдык юбилейине арналган “Математиканын жана билим берүүнүн актуалдуу маселелери” аттуу эл аралык илимий конференция (Ош ш.,ОшМУ, 12-13-май, 2023-ж);

7). Академик М. С. Салахитдиновдун 90 – жылдык юбилейине арналган “ Дифференциалдык теңдемелер жана алардын колдонулушунун заманбап маселелери” аттуу эл аралык илимий конференция (Ташкен шаары, Мирзо Улугбек атындагы Өзбек мамлекеттик уриверситети, 23-25 – ноябрь, 2023 – жыл).

Диссертациянын натыйжаларынын басылып чыгарылышы.

Диссертациянын темасы боюнча 16 макала, 1 тезис [16]-[31], [77] басмадан чыгарылган. Анын ичинен 15 макала РИНЦ, бир макала Scopus базасында катталган журналдарга жарыяланган. Жалпы 284 балл топтолгон.

Диссертациянын түзүлүшү жана көлөмү. Диссертациялык иш шарттуу белгилөөлөр тизмесинен, киришүүдөн, 10 параграфка бөлүнгөн 4 баптан, корутундудан жана 80 аталыштагы адабияттар тизмесинен турат. Жумуш 102 барак компьютердик тексте баяндалган.

Ар бир баптын ичинде үчтүк номерлөө кабыл алынган. Мисалы, (3.1.1) формула 3 - баптын биринчи параграфынын биринчи формуласы, Т.3.1.1 – теоремасы 3 – баптын биринчи параграфынын биринчи теоремасы. Авторефератта диссертацияда кабыл алынган номерлөө системасы колдонулган жана сакталган.

Параграфтарды номерлөө – экилик, биринчиси баптын номерин, экинчиси параграфтын катар номерин көрсөтөт.

1 БАП. АЛГАЧКЫ ИЗИЛДӨӨЛӨРГӨ СЕРЕП

§1.1. Сингулярдык козголуулар теориясында алынган жыйынтыктарга жалпы сереп

Сингулярдык козголуулар теориясында кездешүүчү кубулуштарга токтололу.

Пределдик өтүүлөр

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = f(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), \varepsilon),\ y'(t,\varepsilon) = g(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), t), \tag{1.1.1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0,\ y(t_0,\varepsilon) = y^0. \tag{1.1.2}$$

Мында

$$x(t,\varepsilon) = (x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon),..., x_n(t,\varepsilon)),\ y(t,\varepsilon) = (y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon),..., y_n(t,\varepsilon)),\ t \in [t_0, T].$$

(1.1.1) теңдемесинен $\varepsilon = 0$ деп алсак:

$$f(u(t), \vartheta(t), t) = 0,\ \vartheta'(t) = g(u(t), \vartheta(t), t). \tag{1.1.3}$$

(1.1.3) системасы (1.1.1) системасына карата козголбогон маселе. (1.1.3) системанын чечимдери $u(t)$, $\vartheta(t)$ (1.1.2) шартын канааттандырбайт.

Негизги маселе болуп (1.1.3) $\wedge$ (1.1.1)-(1.1.2) маселелеринин чечимдеринин асимптотикалык жакындашуусунун көрсөтүү болуп саналат.

Жакындашуунун жетиштүү шарты алгачкы жолу А. Н. Тихонов [69] тарабынан аныкталган. [70] жумуштун негизги жыйынтыгына кыскача токтолобуз.

Шарттардын аткарылуусу божомолдонот:

1). Өзгөрүлмөлөрү (x, y, t) болгон кандайдыр бир ачык E мейкиндигинде $f(x, y, t)$, $g(x, y, t)$ функциялары x жана t өзгөрүлмөлөрү боюнча Липщицтин шартын канааттандырсын.

2). Кандайдыр бир чектелген туюк D аймагында $f(u(t),\vartheta(t),t)=0$ теңдемеси $u(t)$ карата $(\vartheta(t),t)$ өзгөрүлмөлөр мейкиндигине карата $u(t)=\phi(\vartheta(t),t)$ тамырына ээ болуп, кийинки шарттарды канааттандырсын.

2.1). $\phi(\vartheta(t),t)\in C(D)$.

2.2). $(\vartheta(t),t)\in D$, анда $(\phi(\vartheta(t),t),\vartheta(t),t)\in E$.

2.3). D аймагында $u(t)=\phi(\vartheta(t),t)$ тамыры изоляцияланган. Бул деген соз кандайдыр бир $\delta>0$ жашап жана $0<\|u(t)-\phi(\vartheta(t),t)\|<\delta,\ (\vartheta(t),t)\in D$ болгондо $f(u(t),\vartheta(t),t)\neq 0$.

2.4). Козголбогон $\vartheta'(t)=g(u(t),\vartheta(t),t)$ системасы $\vartheta(t_0)=y^0$ баштапкы шартын менен берилип, жалгыз гана $\vartheta(t)$ чечимине $t_0\le t\le T$ кесиндисинде ээ болот. Бул жерде өзгөрүлмөлөр $t\in[t_0,T]$ болгондо $(\vartheta(t),t)\in D_0$. Мында D_0 аймагы D аймагынын ички чекиттеринин көптүгү болушат.

3). Чектелген туюк D аймагында $g((\vartheta(t),t),\vartheta(t),t)$ функциясы $\vartheta(t)$ өзгөрүлмөсү боюнча Липщицтин шартын канааттанысдарат.

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau}=f(\xi(\tau),\vartheta,t),\ (\tau\ge 0), \tag{1.1.4}$$

системасы А. Н. Тихоновдун терминологиясы боюнча бириктирилген система деп аталат. ϑ жана t параметр катары кабылданат.

2.3 шартынын негизинде $\xi(\tau)=\phi(\vartheta,t)$, $(\vartheta,t)\in D$ болгон учурда (1.1.4) системасынын изоляцияланган тыныгуу чекити болуп саналат.

4). (1.1.4) системанын $\xi(\tau)=\phi(\vartheta,t)$ тыныгуу чекити $(\vartheta,t)\in D$ карата Ляпунов боюнча бир калыпта туруктуу болот.

Бул шарттын аткарылуусу менен $\xi(\tau)=\phi(\vartheta,t)$ тамыры D аймагы боюнча туруктуу деп аталат.

$$\vartheta = y^0,\ t = t_0. \tag{1.1.5}$$

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = f\left(\xi(\tau), y^0, t_0\right), \qquad \tau \in R_+ \tag{1.1.6}$$

$$\xi(t_0) = x^0, \tag{1.1.7}$$

менен карайбыз.

Эгерде баштапкы шарт x^0 тыныгуу чекити $\phi(y^0, t_0)$ жакын болбосо, анда $\xi(\tau)$ чечими $\phi(y^0, t_0)$ тыныгуу чектитине $\tau \to \infty$ умтулат.

Шарт канааттандырылуусун талап кылалы.

5). (1.1.6)-(1.1.7) маселелеринин чечими $\xi(\tau)$ төмөнкү шарттарды канааттандырсын

5.1) $\tau \to \infty$ умтулса $\xi(\tau) \to \phi(y^0, t_0)$.

5.2) $\tau \ge 0$ болсо, чекиттер $\left(\xi(\tau), y^0, t_0\right) \in E$.

Теорема 1.1.1 (Тихонов теоремасы) Эгерде 1-5 шарттары аткарылса, анда $\varepsilon_0 > 0$ турактуу саны жашап, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ болгондо (1.1.1)-(1.1.2) маселелеринин $t_0 \le t \le T$ кесиндисинде $x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)$ жалгыз чечимдери жашайт. Ал чечимдер

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t,\varepsilon) = u(t), \quad t_0 < t \le T, \tag{1.1.8}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t,\varepsilon) = \vartheta(t),\ t_0 \le t \le T, \tag{1.1.9}$$

пределдик өтүүнү канаатандырат.

(1.1.8) пределдик өтүүсү $[t_0, T]$ кесиндисинде бир калыпта эмес болот. Теорема 1.1.1 көрүнгөндөй $t_0 < t \le T$ кесиндисинде $\vartheta(t)$ функциясын $y(t,\varepsilon)$ чечиминин бир калыптагы асимптотикалык жакындашуусу катары кароого болот. Эгерде $u(t)$ функциясын карасак, анда $t = t_0$ чекитинде функция $x(t,\varepsilon)$ чечиминен $x^0 - u(t_0)$ чоңдугуна айырмаланат. Демек, $t = t_0$ чекитинин кандайдыр бир чекебелинде $u(t)$ функциясы $x(t,\varepsilon)$ чечиминин жакындашуусу боло албайт. Бул $t=t_0$ чекитинин кичинекей чекебели чек аралык катмардын аралыгы деп аталат.

СККДТТ кийинки алгылыктуу кадам болуп, $[t_0,T]$ кесиндисинде $y(t,\varepsilon)$ чечими, ошондой эле $x(t,\varepsilon)$ чечими үчүн каалаган тактыктагы асимптотикалык жакындашууну алуу болуп саналат.

Ушул жана башка суроолорго жооп А. Б. Васильеванын жана анын окуучулары [34-38] эмгектеринде келтирилген.

Бир калыптагы асимтотикалык жакындашууну $y(t,\varepsilon), x(t,\varepsilon)$ чечимдери үчүн алууда Тихонов теоремасына коюлган 1,4 шарттар күчөтүлүп, ал эми 2,3,5 шарттар өзгөрүүсүз калтырылат.

Ал өзгөрүүлөрдү жазып алалы.

1). Ачык E аймагында $f(x,y,t)$ жана $g(x,y,t)$ функциялары чексиз дифференцирленүүчү болушсун.

$\lambda_j(t)$ - матрица функциянын өздүк мааниси болсун.

$$A(t)\equiv f_x(\phi(\vartheta,t),\vartheta,t)=\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right)_{u=\phi(\vartheta,t)},$$

мында $u(t),\vartheta(t)$, $j\in N$ козголбогон маселенин чечими.

$$0=f(u(t),\vartheta(t),t),\ \frac{d\vartheta(t)}{dt}=g(u(t),\vartheta(t),t),\ \vartheta(t_0)=y^0.$$

4). $\operatorname{Re}\lambda_j(t)<0$ эгерде $t_0\le t\le T$, $j\in N$ (1.1.10)

(1.1.10) туруктуулук шарты деп аталат. (1.1.1)-(1.1.2) нин асимототикалык ажыралмасы

$$x(t,\varepsilon)=\bar{x}(t,\varepsilon)+\Pi x(t,\varepsilon),\ y(t,\varepsilon)=\bar{y}(t,\varepsilon)+\Pi y(t,\varepsilon),\ \tau=\frac{t-t_0}{\varepsilon}.$$

$\bar{x}(t,\varepsilon), \bar{y}(t,\varepsilon), \Pi x(t,\varepsilon), \Pi y(t,\varepsilon)$ функциясы тиешелүү болгон алгоритмдин негизинде аныкталат. $\Pi x(t,\varepsilon)$, $\Pi y(t,\varepsilon)$ функциялары чек аралык катмар функцилары болуп, t_0 чекитинин кичинекей чекебелинде гана мааниге ээ. Чекебелден алыстагандан кийин экспонента боюнча кемип кетет.

Теорема 1.1.2 (Васильева теоремасы) 1-5 шарттары аткарылсын. Анда $\varepsilon_0 > 0$ жана $C_n > 0$ турактуулары табылып, (1.1.1),(1.1.2) маселелеринин $x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)$ чечимдери $t_0 \le t \le T$ кесиндисинде жашап жана жалгыз болуп, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ болгондо төмөнкү барабарсыздыктарды канааттандырат

$$\|x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)\| \le C_n \varepsilon^{n+1},$$

$$\|y(t,\varepsilon) - Y_n(t,\varepsilon)\| \le C_n \varepsilon^{n+1},$$

баалоосу $t_0 \le t \le T$ аралыгында орун алат.

$$X_n(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \left[\bar{x}_k(\tau) + \Pi_k(\tau)\right], \; Y_n(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \left[\bar{y}_k(t) + \Pi_k(\tau)\right],$$

болот.

Сингулярдык козголууга ээ болгон интегро-дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык ажыралмалары М. И. Иманалиевдин эмгектеринде [40-49] кенири каралып изилденген.

Чечимдердин асимптотикалык ажыралмаларын табуу үчүн формалдуу болбогон ыңгайлуу алгоритмди колдонгон. Ал алгоритм азыркы мезгилде сингулярдуу козголууга ээ болгон кадимки дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык ажыралмаларын тургузууда кенири колдонулууда. Бул багыттагы аткарылган жумуштар [67],[75], [76] жумуштарда баяндалган.

Тез кыймылга келүүчү системаны

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = f(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)). \tag{1.1.11}$$

Бул системанын чечимдеринин өзгөрүүсүн Л. С. Понтрягин караган. Чечимдерди изилдөө идеясы ага таандык.

$$x = \phi(y), \tag{1.1.12}$$

системанын кандайдыр бир тең салмактуулук абалы болсун.

(1.1.12) барабардыгын (1.1.3) системасына коюу менен

$$y'(t) = g(\phi(y(t), y(t)), \tag{1.1.13}$$

(1.1.13) чечими

$$y = \psi(t). \tag{1.1.14}$$

$-\alpha \le t < 0$ аралыгында (1.1.14) аныкталып, системанын тең салмактуулук абалы экспоненталык туруктуу болот, ал эми $t = 0$ болгондо тен салмактуулук жоюлат.

(1.1.11) системасы өзүнүн ар бир стационардык чечимдерине тең салмактуулук абалында гана жетишет. $\varepsilon x' = f(x, y_1)$ системасы туруктуу тең салмактуулук абалына ээ болсо, анда x чекити (1.1.11) эрежеси боюнча кыймылга келип, алардын бироосуно жетет.

Тез жана акырын болгон кыймылдардын кезектешүүсүнөн туюк траектория пайда болот. Системанын дал келүүчү мезгилдүү чечими релаксациялык термелүү болуп, [73-76], [53] жумуштарда баяндалган.

§1.2. Каралуучу эмгекке жакын натыйжалар

СККДТТ да кездешүүчү кубулуштарга токтололу:

1). СККДТТ кездешүүчү туруктуулук шартынын жоюлуусунун тартылуу кубулушу. Өткөн кылымдын 70 жылдары Л.С. Понтрягин тарабынан тартылуу кубулушу аныкталган. Аны Л.С. Погтрягиндин жетекчилиги астында М. А. Шишкова [74] тарабынан аткарылган. Жумушта экинчи тартиптеги сингулярдык козголууга ээ болгон кадимки дифференциалдык теңдемелер

$$\varepsilon z_1'(t,\varepsilon) = tz_1(t,\varepsilon) - z_2(t,\varepsilon) + \varepsilon + \gamma z_1(t,\varepsilon)(z_1^2(t,\varepsilon) + z_2^2(t,\varepsilon)),$$

$$\varepsilon z_2'(t,\varepsilon) = z_1(t,\varepsilon) + tz_2(t,\varepsilon) + \gamma z_2(t,\varepsilon)(z_1^2(t,\varepsilon) + z_2^2(t,\varepsilon)), \qquad (1.2.1)$$

каралган. Мында $t \in [-1;1]$, γ-кандайдыр бир туралтуу сан.

(1.2.1) системасынын бириктирилген системасы

$$y_1'(\tau) = ty_1(\tau) - y_2(\tau) + y_1(\tau)(y_1^2(\tau) + y_2^2(\tau)),$$

$$y_2'(\tau) = y_1(\tau) + ty_2(\tau) + y_2(\tau)(y_1^2(\tau) + y_2^2(\tau)). \qquad (1.2.2)$$

(1.2.2) системасы $y_1(\tau) = 0,\ y_2(\tau) = 0$, тынытуу чекитине ээ болот. Тынытуу чекиттери $t < 0$ болсо туруктуу, $t > 0$ болсо туруксуз. Ошондой эле $t = 0$ чекитинен өткөндө системанын тынытуу чекити бузулат.

(1.2.1) системасына

$$z_1(-1,\varepsilon) = O(\varepsilon),\ z_2(-1,\varepsilon) = O(\varepsilon), \qquad (1.2.3)$$

баштапкы шартын коюлат.

(1.2.1) өзгөртүп түзөбүз

$$\varepsilon\vartheta'(t,\varepsilon) = (t+i)\vartheta(t,\varepsilon) + \varepsilon + \gamma\vartheta^2(t,\varepsilon)w(t,\varepsilon),$$

$$\varepsilon w'(t,\varepsilon) = (t-i)w(t,\varepsilon) + \varepsilon + \gamma w^2(t,\varepsilon)\vartheta(t,\varepsilon), \qquad (1.2.4)$$

мында $\vartheta = z_1 + iz_2$, $w = z_1 - iz_2$.

(1.2.3) баштапкы шарты (1.2.4) системасы үчүн

$$|\vartheta(-1,\varepsilon)| = O(\varepsilon),\ |w(-1.\varepsilon)| = O(\varepsilon). \qquad (1.2.5)$$

(1.2.4) системасы (1.2.5) баштапкы шарты менен $(K) \subset C$ квадратында изилденет. Квадраттын чокулары $(-1;0),(0;1);(1;0);(0;-1)$. (K) квадраты чыныгы окто $[-1;1]$ кесиндисин кармайт.

(1.2.4)-(1.2.5) интегралдык теңдеме менен алмаштырып, ага удаалаш жакындашуу усулун колдонуп (1.2.1), (1.2.3) чечимдери үчүн

$$\|z(t,\varepsilon)\| \le Cw_0(\varepsilon)\,. \qquad (1.2.6)$$

мында $w_0(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & -1 \le t \le q \\ \sqrt{\varepsilon}, & 1-q \le t \le 1 \end{cases}$, $1-q$ оң ε көз каранды болбогон жетишээрлик кичине сан, $0 < C_0 - const$, $z(t,\varepsilon) = colon(z_1(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon))$.

[74] жумуш ушул багыттагы жумуштардын өнүгүүсүн шарттаган. С.К. Каримовдун [51] эмгеги ушул багыттагы жумуштун алгачкылары болуп саналат. Анда

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = A(t)z(t,\varepsilon) + \varepsilon\phi(t) + f(t, z(t,\varepsilon))\,, \qquad (1.2.7)$$

$$\|z(t_0,\varepsilon)\| = O(\varepsilon)\,. \qquad (1.2.8)$$

каралган. Мында $z(t,\varepsilon) = colon(z_1(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon))$, $A(t)$-экинчи тартиптеги квадраттык матрица, ал эми $\phi(t),\ f(t,z(t,\varepsilon))$-өзүнүн өзгөрүлмөлөрү боюнча аналитикалык функция. Ошондой эле $\|f(t,z)\| = O(\|z\|^2)$. Жумушта (1.2.7)-(1.28) чечими туруктуулуктун тартылуусу болгон учурда системалуу түрдө изилденген.

Г.М. Анарбаеванын [15] караган жумушунда $A(t)$ матрица-функция $\lambda_{1,2}(t) = (t+ib)^n$, мында $n \in N$, көрүнүшүндөгү өздүк маанилерге ээ болгон учур каралган. Жумуштагы негизги өзгөчөлүк болуп, маселенин чечими каралуучу $[-t_0, t_0] \in R$ кесиндисинде $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t)$ өзүнүн маанисин туруктуудан туруксузга өзгөртүүчү бир канча кесиндилерден турат.

А. И. Нейшдаттын [60],[61] жасаган жумуштары тез жана акырын кыймылга келүүчү өзгөрүлмөлөрдү камтыган автономдуу системаларды изилдөөгө арналган. Системаларды изилдөөдө баштапкы шарттар коюлуп, матрица-функция ар түрдүү өздүк маанилерге ээ болгон учурлар каралган. Ал өздүк маанилердин бирөөсү комплекстик түйүндөш болуп, акырын кыймылга келүүчү өзгөрүлмөлөрдүн мейкиндигиде жорума окту нөлдүк ылдамдык менен кесет. Тактап айтканда бул учурда коплекстик түйүндөш өздүк маанинин чыныгы бөлүгү нөлгө барабар болуп, жорума бөлүгү нөлдөн айырмалуу болот. Ал эми калган өздүк маанилердин чыныгы бөлүктөрү терс болот. Тактап айтканда бул учурда тең салмактуулук абалынан четтеген учурда үзүлүү болору далилденген.

Алыбаев К.С [4] караган учурда бириктирилген система чыныгы октун кандайдыр бир кесиндисинде туруктуулук шартын жоготкон учурда чечимди изилдөөчү усулдарды иштеп чыгууга арналган. Жыйынтыгында сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелердин чечиминин изилдөөдөгү эң бир уникалдуу метод иштелип чыккан. Метод деңгээл сызыктар методу деп аталып, козголууга ээ болгон маселелердин чечимин изилдөөдө аныктоочу критерий болуп саналат.

Д.А. Турсуновдун эмгегинде [72] кандайдыр бир класстагы сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелердин чечимин туруктуулуктун тартылуусу оң жактан чексизге дейре узартылган учурда деңгээл сызыктар методун [3] колдонуу менен изилдеген. Ошону менен бирге [72] эмгекте стационардык фаза методун иштеп чыккан.

М. А. Азимбаевдин [3] жумуштары сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелердин чечимдерин изилдөөдө матрица функциянын өздүк маанилери мезгилдүү функциялар болуп, ал эми өздүк маанилердин чыныгы бөлүгү $[t_0, T]$ кесиндисинде өзүнүн белгисин терстен оңго өзгөртөт. Бул учурда аймак чектелбеген болот. Каралган учурларда туруктуулуктун тартылуусу кубулушу орун алары далилденген.

А. А. Абдилазизованын эмгегинде [1] өздүк маанилер мезгилдүү функциялар болушуп, сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелердин чечимдери изилденген. Бул учурда да аймак чектелбеген болот.

2). Жоюлуучу чек аралык катмар кубулушу. Сызыктуу теңдемелер үчүн жоюлуучу чек аралык катмардын жашашы [59] жумушта каралып далилденген.

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon f(t), \qquad (1.2.9)$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, \qquad (1.2.10)$$

каралган. Мында $a(t) = t + i,\ t_0 = -1,\ x^0 - const,\ t \in H$ -аймагы квадрат. Бул учурда $t \in R$ үчүн $[-1;0)$ аралыгы туруктуу, ал эми $(0,1]$ аралыгы туруксуз болот. (1.2.9)-(1.2.10) маселе каралган [59] жумушта $\{C_0\}$ деңгээл сызыгын бойлото кеткен аймак жоюлуучу чек аралык катмар деп аталган.

3). Жалпыланган чек аралык функция методу жана бисингулярдуу теңдеме. Экспоненталдык асимптотикалык туруктуулук бузулган учурда чек аралык катмар методун колдонуу К. Алымкулов [8-14] тарабынан изилденген.

Жалпыланган чек аралык катмар методу бисингулярдык маселелер үчүн [13] жумушта баяндалган. Жумуштан мисал келтирели.

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = -ty(t,\varepsilon) + f(t),\ t \in R_+, \qquad (1.2.11)$$

$$y(0,\varepsilon) = y^0, \qquad (1.2.12)$$

мында $f(t) \in C^\infty(R_+),\ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k,\ \ f_0 \neq 0,\ \ y^0 - const$.

$t = 0$ болсо, асимптотикалык туруктуулук бузулат.

(1.2.11)-(1.2.12) дал келүүчү козголбогон же пределдик теңдеме

$$-t\bar{y}(t) + f(t) = 0,$$

$$\bar{y}(t) = \frac{f(t)}{t}. \qquad (1.2.13)$$

(1.2.13) чечими $t = 0$ чекитинде өзгөчөлүккө ээ, т. а. чечим аралыктын башталышында жылмакай эмес.

4).Чек аралык катмарлардагы чек аралык ийрилер. Бир тектүү сингулярдык козголууга ээ болгон [68]

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon), \tag{1.2.14}$$

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0, \tag{1.2.15}$$

масале каралган. Мында $t \in R$, z^0 -турактуу сан, $z(t,\varepsilon)$ -изделүүчү функция. (1.2.14)-(1.2.15) чечими

$$z(t_1,t_2,\varepsilon) = z^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t_1+it_2} a(s)ds\right),\ t_1,t_2 \in \Omega. \tag{1.2.16}$$

Регулярдык жана сингулярдык аймактарды аныктоо жана чек аралык ийрилерди эсептөөдө (1.2.16) барабардыгы үчүн асимптотикалык ылдамдык функциясын пайдалануу жетиштүү болору көрсөтүлгөн.

А.Б. Мурзабаеванын эмгегинде козголгон теңдеме эки же төрт чечимдерге ээ болгон учурлар изилденген [58]. Негизги көптүк, негизги функция, негизги вектор функция, тартылуу көптүктөрү сыяктуу түшүнүктөрүн киргизген жана аймактарды бөлүштүрүү усулун иштеп чыккан.

5). Изилдөө жүргүзүүнүн кыскача резюмеси. Аткарылган жумуштарды анализдөө менен ушул багыттагы жумушту матрица-функциянын эселүү өздүк маанилеринин өзгөчө чекиттери тегиздикте, чыныгы окто жаткан учурларда кичине козголуунун туруктуулуктун узатылыш кубулушуна тийгизген таасирин изилдөө менен улантуу актуалдуу маселе экендиги көрүнүп турат.

1 - бап боюнча корутунду

Бапта пределдик өтүүлөр боюнча аткарылган жумуштар тизмектелген. Мисалы сингулярдык козголууга ээ болгон дифференциалдык теңдемелерде кездешүүчү кубулуштар, релаксациялык термелүүлөр, кичине параметр боюнча сингулярдык козголууга ээ болгон дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык ажыралмалары.

Тихонов теоремасынын шарттары бузулган учурда тактап айтканда, тез өзгөрүлмө боюнча экспоненталык асимптотикалык туруктуулук шарты бузулган учурда бисингулярдык теңдемелер үчүн чек аралык функция методунун жалпыланышы боюнча маалымат берилген. Гармоникалык функциялардын касиеттери боюнча да маалымат келтирилген.

Чек аралык катмарда чечимдин өзгөрүүсүн изилдөө үчүн чек аралык ийрилер боюнча аткарылган жумуштун жыйынтыктары жана методдору келтирилген.

Натыйжада матрица-функциянын өздүк маанилери эселүү комплекстүү, чыныгы жана комплекстүү түйүндөш болгон учурларда кичине козголуунун туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушуна тийгизген таасирин изилдөө актуалдуу экендиги келип чыгат.

2 БАП. ИЗИЛДӨӨНҮН ОБЬЕКТИЛЕРИ ЖАНА МЕТОДДОРУ

§ 2.1. Изилдөөнүн объектилери жана предмети

Жалпысынан алганда диссертациялык изилдөөнүн объектиси болуп, сингулярдык козголгон маселелер саналат.

Үчүнчү баптын изилдөө объектиси болуп, матрица-функция бир эселүү чыныгы жана комплекстүү өздүк маанилерге ээ болгон учурларда сингулярдык козголгон маселенин чечимин изилдөө болуп саналат.

§3.1 параграфынын изилдөө объектиси

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = \lambda(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\left[h(t) + f(t, x(t,\varepsilon))\right], \qquad (2.1.1)$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon), \ \left|x^0(\varepsilon)\right| = O(\varepsilon). \qquad (2.1.2)$$

Мында $0 < \varepsilon << 1$ - кичине параметр, $\left[-t_0, t_0\right]$ - чыныгы октогу кесинди, $x(t,\varepsilon)$ - изделүүчү белгисиз функция.

§3.2 параграфынын изилдөө объектиси болуп, (2.1.1)-(2.1.2) маселесинин чечимин кичине козголуу жок болгондо, өздүк маани нөлдөргө ээ болбогон, нөлдөрү тегиздикте жана сан огунда жаткан учурларда изилдөө.

§3.3 параграфынын изилдөө объектиси болуп, (2.1.1)-(2.1.2) маселесин кичине козголуу бар болгон учурда, өздүк маанинин нөлдөрү тегиздикте жана сан огунда жаткан учурларда изилдөө.

Төртүнчү баптын изилдөө объектиси болуп, матрица-функция эки эселүү чыныгы жана комплекстүү, комплекстүү түйүндөш өздүк маанилерге ээ болгон учурлардагы сингулярдык козголгон маселе саналат.

§4.1 параграфынын изилдөө объектиси[39]

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = D(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\left[h(t) + f(t, x(t,\varepsilon))\right], \qquad (2.1.3)$$

$$x(-t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon), \ \left\|x^0(\varepsilon)\right\| = O(\varepsilon). \qquad (2.1.4)$$

мында $0 < \varepsilon << 1$ - кичине параметр, $\left[-t_0, t_0\right]$ - чыныгы октогу кесинди, $x(t,\varepsilon)$ - изделүүчү белгисиз функция жана $x(t,\varepsilon) = colon\left(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon)\right)$, $h(t) = colon(h_1(t),$

$h_2(t))$, $x(t_0,\varepsilon)=colon(x_1^0(\varepsilon),x_2^0(\varepsilon))$, $D(t)=\begin{pmatrix}\lambda(t) & 0\\ 0 & \lambda(t)\end{pmatrix}$,

$f(t,x)=colon\big(f_1(t,x_1,x_2),\,f_2(t,x_1,x_2)\big)$.

(2.1.3)-(2.1.4) маселесин эки эселүү өздүк маанинин нөлдөрү тегиздикте жаткан учурда кичине козголуунун туруктуулуктун узартылыш кубулушуна тийгизген таасирин изилдөө.

§4.2 параграфынын изилдөө объектиси болуп, (2.1.3)-(2.1.4) маселесин эки эселүү өздүк маанинин нөлдөрү сан огунда жаткан учурда, кичине козголуунун туруктуулуктун узартылыш кубулушуна тийгизген таасирин изилдөө.

§4.3 параграфынын изилдөө объектиси

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=K(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon[h(t)+f(t,x(t,\varepsilon))],\tag{2.1.5}$$

$$x(-t_0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon),\ \|x^0(\varepsilon)\|=O(\varepsilon).\tag{2.1.6}$$

Мында $0<\varepsilon<<1$ - кичине параметр, $[-t_0,t_0]$ - чыныгы октогу кесинди, $x(t,\varepsilon)$ - изделүүчү белгисиз функция жана $x(t,\varepsilon)=colon(x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon))$, $h(t)=colon(1,\ 1)$, $x(t_0,\varepsilon)=colon(x_1^0(\varepsilon),x_2^0(\varepsilon))$, $f(t,x)=colon\big(f_1(t,x_1,x_2),\,f_2(t,x_1,x_2)\big)$, $K(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t) & 0\\ 0 & \lambda_2(t)\end{pmatrix}$.

Өздүк маанилердин нөлдөрү тегиздикте жаткан учурда, кичине козголуунун туруктуулуктун узартылыш кубулушуна тийгизген таасирин изилдөө.

Изилдөөнүн предмети болуп:

Кичине козголуунун өздүк маанилер эселүү нөлдөргө ээ болбогон учурдагы, туруктуулуктун узартылышкубулушуна тийгизген таасирин аныктоо;

Кичине козголуунун өздүк маанилердин нөлдөрү тегиздикте жаткан учурдагы чечимдин туруктуулугунун узартылыш кубулушуна тийгизген таасирин аныктоо;

Кичине козголуунун өздүк маанилердин нөлдөрү сан огунда жаткан учурда, кичине козголуунун туруктуулуктун узартылыш кубулушуна тийгизген таасирин аныктоо

Сингулярдык козголгон маселенин чечиминин асимптотикалык ажыралмасын тургузуу.

§ 2.2. Изилдөө методдору

Жумушта асимптотикалык, удаалаш жакындашуулар, математикалык индукция, карама каршысынан далилдөө методдору колдонулган.

Изилдөө объектилери болгон маселелер интегралдык теңдеме жана теңдемелер системасына келтирилет.

1). (2.1.1)-(2.1.2) маселесин интегралдык теңдеме менен алмаштырабыз:

$$x(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot\left[h(\tau) + f(\tau, x(\tau,\varepsilon))\right]d\tau .$$

Алынган маселени **удаалаш жакындашуу методу** менен чечебиз:

$$x_0(t,\varepsilon) \equiv 0 ,$$

$$x_1(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot h(\tau)d\tau ,$$

$$x_n(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot f(\tau, x_{n-1}(\tau,\varepsilon))d\tau .$$

мында $n \in N$.

Баалоонун туура экендигин **математикалык индукция методу** менен далилдейбиз:

$$|x_n(t,\varepsilon)| \le C\delta(\varepsilon) + (C\delta(\varepsilon))^2 + (C\delta(\varepsilon))^3 + \ldots + (C\delta(\varepsilon))^n .$$

$n+1$ үчүн туура экендигин далилдейли. Анда

$$x_{n+1}(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot[h(\tau) + f(\tau, x_n(\tau,\varepsilon))]d\tau ,$$

$\vee$

$$|x_{n+1}(t,\varepsilon)| \le C\delta(\varepsilon) + (C\delta(\varepsilon))^2 + (C\delta(\varepsilon))^3 + \ldots + (C\delta(\varepsilon))^{n+1}.$$

Удаалаш жакындашуулар бир калыпта чектелген б.а.

$$\forall n \in N : |x_n(t,\varepsilon)| \le C\delta(\varepsilon) .$$

Чечимдин жалгыздыгы **карама каршысынан далилдөө методу** менен далилденет. Интегралдык теңдеменин $x(t,\varepsilon)$ башка $y(t,\varepsilon)$ чечими жашасын:

$$y(t,\varepsilon) : y(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot[h(\tau) + f(\tau, y(\tau,\varepsilon))]d\tau .$$

$$x_n(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)[f(\tau, x_{n-1}(\tau,\varepsilon) - f(\tau, y(\tau,\varepsilon)]d\tau ,$$

мында $x_n(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)f(\tau, x_{n-1}(\tau,\varepsilon))d\tau .$

Анда

$$|x_1(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot|x_0(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)|d\tau \le C\delta(\varepsilon) ,$$

$$|x_2(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot|x_1(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)|d\tau \le (C\delta(\varepsilon))^2 ,$$

$$|x_n(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot|x_{n-1}(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)|d\tau \le (C\delta(\varepsilon))^{n-1} .$$

Демек, $\forall n \in N \;\; H_0$ областында

$$\lim_{n\to\infty}\left(C\delta(\varepsilon)\right)=0\,.$$

Анда $n\to\infty \Rightarrow \ \left|x(t,\varepsilon)-y(t,\varepsilon)\right|\le 0\,.\ \therefore,\ x(t,\varepsilon)=y(t,\varepsilon)\,.$

2). (2.1.3)-(2.1.4) маселесин интегралдык теңдеме менен алмаштырабыз:

$$x(t,\varepsilon)=x^{0}(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}D(s)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds\right)\cdot\left[h(\tau)+f(\tau,x(\tau,\varepsilon))\right]d\tau\ .$$

3). (2.1.5)-(2.1.6) маселесинин чечимин кичине козголуу жок болгон учурда жазып:

$$x(t,\varepsilon)=x^{0}(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-t_0}^{t}K(s)ds\right)+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K(s)ds\right)\cdot f\left(\tau,x(\tau,\varepsilon)\right)d\tau\ .$$

Биз карап жаткан маселелердин чечимдерин баалоодо деңгээл сызыктар методу колдонулган[73]. Деңгээл сызыктарды алууда [3] эмгектин негизги леммасы (4-лемма) пайдаланылган.

Төмөнкү шарттар аткарылсын:

U_1 : Өздүк маани $\lambda(t)\in Q(H_0)$ болсун, мында

$$H_0=\left\{(t_1,t_2):t_0\le t_1\le T,\ -D\le t_2\le D\right\},$$

$Q(H_0)$- H_0 аймагындагы аналитикалык функциялардын мейкиндиги.

$$u(t_1,t_2)=\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds.$$

$U_2: t_0\le t_1\le T_0$ кесиндисинде $\mathrm{Re}\,\lambda(t_1+i0)<0$, ал эми $\mathrm{Re}\,\lambda(T_0+i0)=0;$

$\mathrm{Re}\,\lambda(t_1+i0)>0$ маанисин $t<t_1<t_0$ интервалында кабыл алат.

$\forall t\in H_0: Jm\lambda(t)\ne 0$ (аныктык үчүн $Jm\lambda_1(t)>0$ деп алабыз).

U_3 : $u(\bar{t}_0,0)=u(\bar{T}_0,0)=C_1,\ t_0<\bar{t}_0<t<\bar{T}_0<T_0$ жана $(\bar{t}_0,0),(\bar{T}_0,0)$ чекиттерин туташтыруучу деңгээл сызык (C_1) болсун.

$\left(C_1^*\right)$ сызыгы $\left(C_1\right)$ сызыгына симметриялуу болсун, бул сызыктар менен чектелген аймакты $H \subset H_0$ деп белгилеп алабыз.

$\left(C_1\right)$ сызыгы $\left(\bar{t}_0;0\right),\left(\bar{T}_0;0\right)$ чекиттерин, ал эми $\left(C_2\right)$ сызыгы $\left(t_{10};0\right),\left(T_{10};0\right)$ $\left(\bar{t}_0 < t_{10} < T_0, T_0 < T_{10} < \bar{T}_0\right)$ чекиттерин туташтырган сызыктар болсун .

$\left(T_{10};0\right)$ чекити аркылуу өткөн, t_2 огуна параллель болгон түз сызык жүргүзөбүз. Бул түз сызык $\left(C_1\right)$ деңгээл сызыгы менен жалгыз гана $\left(T_{10};t_{21}\right)$ чекитинде кесилишет ($Jm\lambda_1(t) > 0$ шарты аткарылат) .

П тилкесин карайбыз, $\left(C_1\right)$ жана $\left(C_2\right)$деңгээл сызыктары чыныгы октун $\left[\bar{t}_0;t_{10}\right]$ кесиндисин жана $\left(T_{10};0\right),\left(T_{10};t_{21}\right)$ чекиттеринин кесиндисин туташтырсын.

Тилкеде

$$u\left(t_1,t_2\right) = at_1 + b, \tag{2.1.7}$$

теңдемеси берилсин, мында $a = \dfrac{C_2 - C_1}{T_{10} - \bar{t}_0},\ b = \dfrac{C_1T_{10} - C_2\bar{t}_0}{T_{10} - \bar{t}_0}$.

Лемма. U_1, U_2, U_3 шарттары аткарылсын. Анда:

1. П тилкесинде (2.1.7) теңдемесин канааттандырган $\left\{\left(t_1;t_2\right)\right\}$ чекиттеринин көптүгү жашайт.
2. $\left\{\left(t_1;t_2\right)\right\}$ чекитинде (2.1.7) барабардыгын канааттандырган бир маанилүү үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү $\phi_0\left(t_1\right)$ функциясы аныкталат, анын аныкталуу аймагы $\bar{t}_0 \le t_1 \le T_{10}$ жана $\left(K\right)$ ийриси ал функциянын $\left(\bar{t}_0;0\right),\left(T_{10};0\right)$ чекиттерин туташтырган бөлүгү болсун.
3. $u\left(t_1,\phi_0(t_1)\right)$ функциясы $\bar{t}_0 \le t_1 \le T_{10}$ кесиндисинде кемүүчү болот.

2 - бап боюнча корутунду

Бул бапта изилдөө методдору жана методологиясы каралды. Изилдөө объектилери болгон теңдеме жана теңдемелер системасы интегралдык теңдемеге, интегралдык теңдемелердин системасына келтирилип, удаалаш жакындашуулар, математикалык индукция методу жана карама каршысынан далилдөө методдорунун жардамында чечимдеринин асимптотикалык ажыралышы тургузулат.

Изилдөө объектиси болуп, туруктуулук шарты алмашкан учурда сингулярдык козголгон маселенин чечиминин асимптотикалык ажыралмасын тургузуу саналат.

Изилдөөнүн предмети катары кичине козголуунун өздүк маанилердин нөлдөрү тегиздикте, сан огунда жаткан учурлардагы туруктуулуктун узартылыш кубулушуна тийгизген таасири изилденген.

3 БАП. БИР ЭСЕЛҮҮ ӨЗДҮК МААНИ

§3.1. Маселенин коюлушу

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=\lambda(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon\left[h(t)+f(t,x(t,\varepsilon))\right], \tag{3.1.1}$$

$$x(-t_0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\,,\ \left|x^0(\varepsilon)\right|=O(\varepsilon), \tag{3.1.2}$$

маселесин карайлы. Мында $0<\varepsilon<<1$ - кичине параметр, $-\left[t_0,t_0\right]$ - чыныгы октогу кесинди, $x(t,\varepsilon)$ -изделүүчү белгисиз функция.

Төмөнкү шарттар аткарылсын:

U 3.1.1. $f(t,0)\equiv 0$, $\forall(t,x)\in H$, $H=\{(t,x),t\in D,|x|\le M_0\}$, $0<M_0-const$, $f(t,x)\in\Phi(H)$, $\Phi(H)$ - H областындагы аналитикалык функциялардын мейкиндиги, $f(t,0)\equiv 0$; $\left|f(t,\tilde{x})-f(t,\tilde{\tilde{x}})\right|\le M_1\left|\tilde{x}-\tilde{\tilde{x}}\right|$, $|f(t,x)|\le M_1\cdot|x|$ мында $0<M$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес туруктуу сан.

U3.1.2. $\lambda(t),h(t)\in\Phi(D)$, $D\subset C$, $D=\{t\in C,|t|<r_0\in R\}$, r_0 - жетишээрлик чоң оң сан.

U3.1.3. $\forall t\in D$ $(\lambda(t)\neq 0)$.

U3.1.4. $\exists!$ $T_0\in D$ $\left(\lambda(T_0)=0,...,\lambda^{(m-2)}(T_0)=0,\lambda^{(m-1)}(T_0)\neq 0\right)$.

U3.1.5. $\operatorname{Re}\lambda(t)<0$, $-t_0\le t<0$; $\operatorname{Re}\lambda(0)=0$, $\operatorname{Re}\lambda(t)>0$, $0<t\le t_0$, $(t_2\equiv 0)$.

U3.1.6. $(-t_0,0)$ жана $(t_0,0)$ чекиттерин туташтыруучу $(p_0)=\{t\in D,\operatorname{Re}F(t)=0\}$ деңгээл сызыгы жашасын, мында $F(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau$.

(3.1.1) теңдемесин $\varepsilon=0$ болсо

$$\lambda(t)\tilde{x}(t,0)=0. \tag{3.1.3}$$

А.3.1.1. $(p)=\{t\in D, \operatorname{Re}F(t)=p-const\}$, $(q)=\{t\in D, \operatorname{Im}F(t)=q-const\}$ көптүктөрү тиешелеш түрдө $\operatorname{Re}F(t)$, $\operatorname{Im}F(t)$ функциялардын деңгээ сызыктары деп аталат.

А.3.1.2. $\forall t\in D_0\subset D$ областы жана бул областа аныкталган (3.1.1)-(3.1.2) маселенин $x(t,\varepsilon)$ - чечими жашап жана $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)=0$ аткарылса, анда D_0 областын $x(t,\varepsilon)$ чечимдин $\bar{x}(t)\equiv 0$ чечимге тартылуу областы (ТО) деп атайбыз.

А.3.1.3. $\varepsilon h(t)$ - кичине козголуу деп атайлы.

Негизги маселе. Кичине козголуунун ТО жашашына жана туруктуулуктун жоголушуна таасирин изилдөө.

Жумуш кичине козголуунун туруктуулуктун узартылыш кубулушуна тийгизген таасирин изилдөөгө багытталган.

§3.2. Кичине козголуу жок болгон учурда маселенин чечилиши

I.2.1. $\varepsilon h(t)\equiv 0$ $\wedge$ $U3.1.1$, $U3.1.2$, $U3.1.3$, $U3.1.5$ шарттар орун алсын.

(3.1.1)-(3.1.2) маселесин интегралдык теңдеме менен алмаштырабыз:

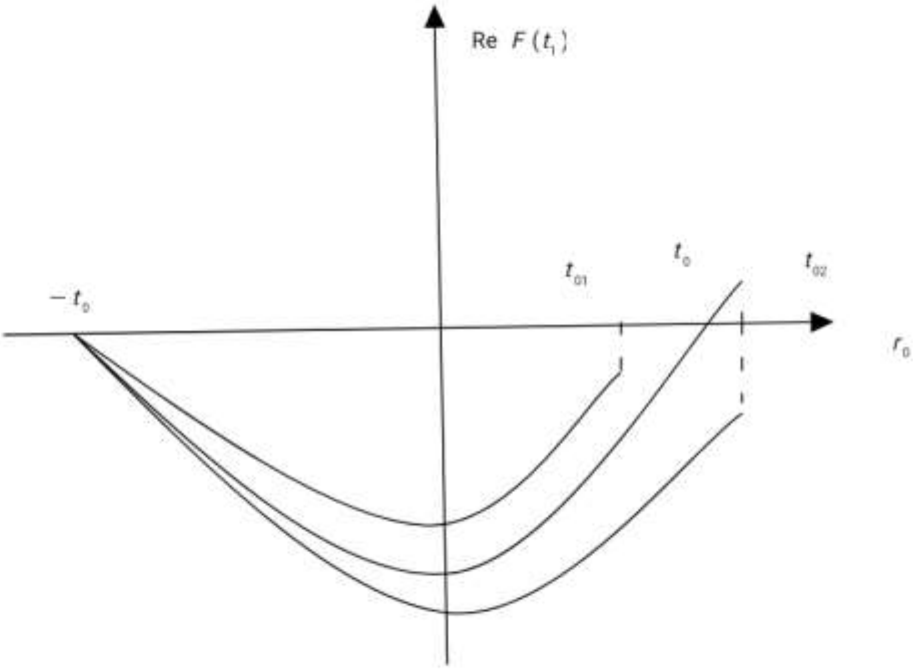
$$x(t,\varepsilon)=x^0\exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right)+\int\limits_{-t_0}^{t}f(\tau,x)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau\,, \tag{3.2.1}$$

мында $F(t)=\int\limits_{-t_0}^{t}\lambda(s)ds$, $F(-t_0)=0$ болсун.

t нын чыныгы маанилеринде $\operatorname{Re}F(t)$ функциясын изилдейли. $\operatorname{Re}F(t)\to\operatorname{Re}F(t_1)$ функциясын алалы: $(t=t_1+it_2, t_2\equiv 0)$: **U3.1.4** ылайык $(\operatorname{Re}F(t_1))'=\lambda(t_1)\Rightarrow$ $\operatorname{Re}F(t_1)$ - кемийт, $(-t_0\le t_1<0)$; $\operatorname{Re}F(t_1)$ - өсөт;

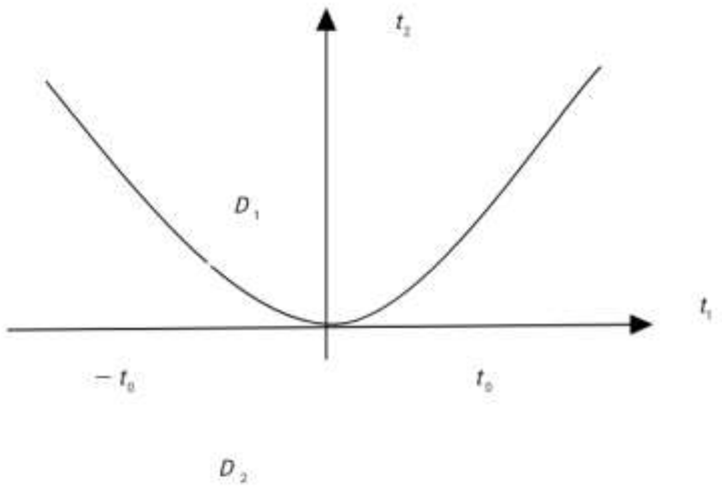
$(0<t_1\le t_0)$; $t_1=0$ $(\min)$.

$\operatorname{Re}F(t_1)$ функциясынын графигинин t_1 огун оң жактан кесип өтүүсүнүн айрым учурлары (3.2.1) сүрөттө келтирилди.



Сүрөт 3.2.1. Re $F(t_1)$ функциясынын графиги.

$(p_0) = \{t \in D, \operatorname{Re} F(t_0) = 0\}$ карайлы. (p_0) сызыгы D ны экиге бөлөт $D_1 \wedge D_2$ (Сүрөт 3.2.2).



Сүрөт 3.2.2. (p_0) деңгээл сызыгы жана D_1, D_2 областары

Жалпылыкты бузбастан $\operatorname{Re} F(-t_0) = \operatorname{Re} F(t_0)$ деп эсептейли. $\forall t \in [-t_0, t_0]$ $(\operatorname{Re} F(t) \le 0)$ (барабардык аралыктын учунда гана орун алат) $\Rightarrow$ $\forall t \in D_1$ $(\operatorname{Re} F(t) \le 0)$. Барабардык белги (p_0) сызыгында гана аткарылат.

(3.2.1) теңдемени D_1 областында карайбыз. Областа $\operatorname{Re} F(t) \le 0$ болгондуктан, (3.1.5) теңдеменин чечиминин чектелген болушунун зарыл шарты аткарылат.

(3.1.5) теңдемеге удаалаш жакындашуу методун колдонобуз. Аларды төмөнкүдөй аныктайбыз

$$x_n(t,\varepsilon) = x^0 \exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau,\varepsilon)) \exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right) d\tau, \tag{3.2.2}$$

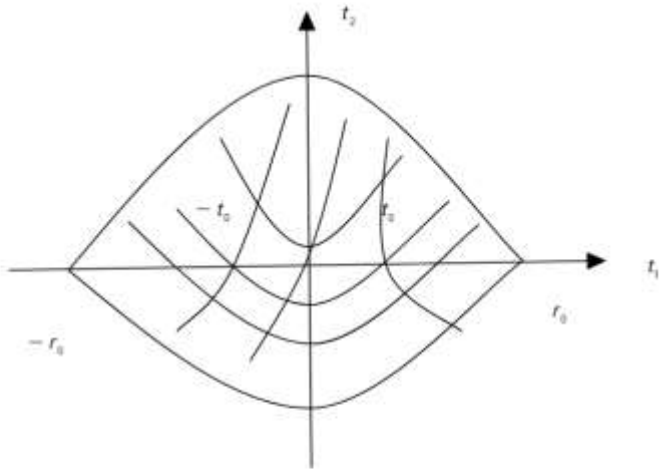
$x_0(t,\varepsilon) \equiv 0$, $n = 1,2,\ldots$.

Удаалаш жакындашууларды баалоо маселесин коелу. Бул маселени чечүү үчүн интегралдоо жолдорун тандайлы

$$F(t) \in I(D) \Rightarrow \operatorname{Re} F(t) \in \Gamma(D) \ \wedge \ \operatorname{Im} F(t) \in \Gamma(D),$$

$\Gamma(D)$ - D областындагы гармоникалык болгон функциялардын мейкиндиги.

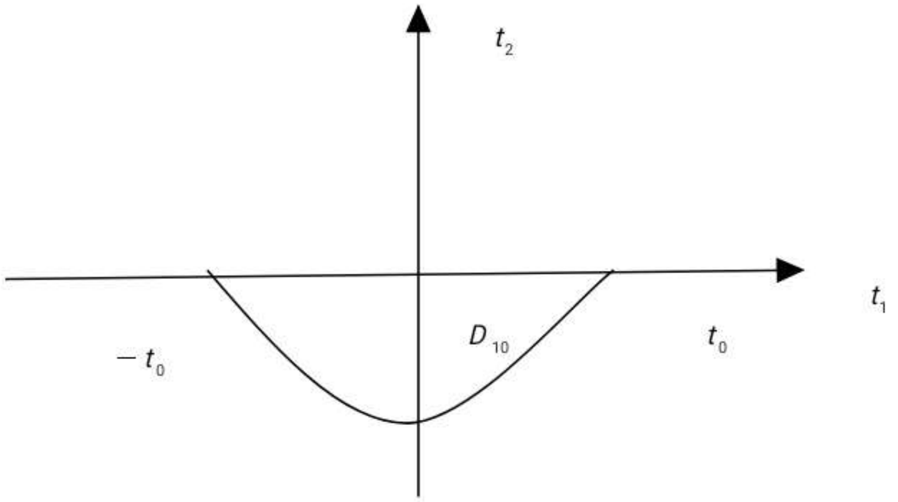
Шарт боюнча $\forall t \in D$ $(\lambda(t) \ne 0)$ болгондуктан, $F(t)$ функциясы D областында эселүү нөлдөргө ээ болбойт. Мындай болгондо $\operatorname{Re} F(t)$ жана $\operatorname{Im} F(t)$ функциялар бутактануучу деңгээл сызыктар болбойт б. а. D областынын каалаган чекити аркылуу $\operatorname{Re} F(t)$, $\operatorname{Im} F(t)$ функциялардын бирден гана деңгээл сызыктары өтөт. Бул деңгээл сызыктар кесилиш чекиттеринде ортогоналдуу болушат [44]. Демек D областы өз ара ортогоналдуу деңгээл сызыктардын торчосу менен капталат (Сүрөт 3.2.3).



Сүрөт 3.2.3. D областындагы өз ара ортогоналдуу деңгээл сызыктардын

торчосу.

Биздин максат (3.2.1) теңдеменин чечиминин $[-t_0, t_0]$ аралыгындагы асимптотикалык жүрүмүн изилдөө болгондуктан, D_1 областынын $[-t_0, t_0]$ кесиндиси жана (p_0) сызыктын $(-t_0, 0)$, $(t_0, 0)$ чекиттерин туташтырган бөлүгү менен чектелген бөлүгүн карайлы. Бул бөлүктү D_{10} деп белгилейли (Сүрөт 3.2.4).



Сүрөт 3.2.4. D_{10} областы.

Интегралдоо жолун төмөндөгүдөй тандайлы: жол (p_0) $[(-t_0,0),\tilde{t}\,]$ жана (q) $[\tilde{t}\,,t]$ турат. (p_0), (q) аналитикалык ийрилер болгондуктан [59], бул ийрилердин теңдемелерин параметрдик түрдө төмөндөгүдөй туюнтууга болот:

$$t_1 = t_1(s),\; t_2 = t_2(s),$$

мында s (p_0) ийринин $(-t_0.0)$, $\tilde{t}$ чекиттерин туташтыруучу бөлүгүнүн узундугу;

$$t_1 = t_1(\sigma),\; t_2 = t_2(\sigma),$$

мында σ, (q) ийринин $\tilde{t}$, t чекиттерин туташтыруучу (q) ийринин узундугу.

D_{10} чектелген облас болгондуктан $\max\{s\} = s_0$, $\max\{\sigma\} = \sigma_0$ жашайт.

$s_0 + \sigma_0 = l$ деп белгилейли. Алгач $t \in (p_0)$ болгон учурду карайлы. Тандалган жолдорго ылайык (3.2.2) баалайлы.

Биринчи жакындашуу ($f(\tau,0) \equiv 0$) үчүн

$$|x_1(t,\varepsilon)| \le |x^0| \exp\left(\frac{\operatorname{Re} F(t)}{\varepsilon}\right), \tag{3.2.3}$$

туура болот.

Экинчи жакындашууну карайлы.

$$\left|x_2(t,\varepsilon)\right| \le \left|x_1(t,\varepsilon)\right| + \int_0^{\tilde{s}} \left|f(\tau,x_1)\right| \cdot \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(\tilde{s}) - \operatorname{Re}F(s)}{\varepsilon}\right) \cdot \left|\tau_1'(s) + i\tau_2'(s)\right| ds,$$

$$\left|\tau_1'(s) + i\tau_2'(s)\right| \le M_{10},$$

$$\forall t \in (p_0):\ \operatorname{Re}F(t) = 0,\ \operatorname{Re}F(\tau) = 0\ \wedge\ \left|f(\tau,x_1)\right| \le M_1 \cdot \left|x_1\right|\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|x_2(t,\varepsilon)\right| \le \left|x_1(t,\varepsilon)\right| + M_{10}\int_0^{\tilde{s}} M_1\left|x^0\right| \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t(\tilde{s})) - \operatorname{Re}F(\tau(s)) + \operatorname{Re}F(\tau(s))}{\varepsilon}\right) \le$$

$$\le \left|x_1(t,\varepsilon)\right| + \left|x^0\right| M_2 \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t(\tilde{s}))}{\varepsilon}\right) \cdot \tilde{s} = \left|x^0\right| \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t(\tilde{s}))}{\varepsilon}\right) \cdot \left(1 + M_2\tilde{s}\right),$$

$$M_2 = M_{10} \cdot M_1,$$

$$\left|x_2(t,\varepsilon)\right| \le \left|x^0\right| \cdot \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t(\tilde{s})}{\varepsilon}\right) \cdot \left(1 + M_2\tilde{s}\right).$$

$$\left|x_3(t,\varepsilon)\right| \le \left|x_1(t,\varepsilon)\right| + \left|x^0\right| \cdot \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t(\tilde{s}))}{\varepsilon}\right) \cdot \left(M_2\tilde{s} + \frac{(M_2\tilde{s})^2}{2!}\right) \le$$

$$\le \left|x^0\right| \cdot \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t(\tilde{s}))}{\varepsilon}\right) \cdot \left(1 + M_2\tilde{s} + \frac{(M_2\tilde{s})^2}{2!}\right).$$

$$\left|x_n(t,\varepsilon)\right| \le \left|x^0\right| \cdot \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t(\tilde{s}))}{\varepsilon}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(M_2\tilde{s})^k}{k!},\ n = 1, 2, \ldots . \tag{3.2.4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M_2\tilde{s})^k}{k!} = \exp\left(M_2\tilde{s}\right)\ \max\{\tilde{s}\} = s_0\ \Rightarrow$$

$$\left|x_n(t,\varepsilon)\right| \le \left|x^0\right| \cdot \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t(\tilde{s}))}{\varepsilon}\right) \cdot \exp s_0 = M_3 \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t(\tilde{s}))}{\varepsilon}\right). \tag{3.2.5}$$

$\forall n \in N\ \left(\left|x_n(t,\varepsilon)\right| \le M_0\right)$ болууга тийиш.

$$\exp\left(\frac{\operatorname{Re} F(t(\tilde{s}))}{\varepsilon}\right)=1 \;\Rightarrow\; \left|x^0\right|\cdot\exp\left(M_2\tilde{s}\right)\le M_0 \;\Rightarrow\; M_2\tilde{s}\le \ln\frac{M_0}{\left|x^0\right|} \;\Rightarrow$$

$$\tilde{s}\le \frac{1}{M_2}\cdot\ln\frac{M_0}{\left|x^0\right|}. \tag{3.2.6}$$

Бул шарттын аткарылышын $[-t_0, t_0]$ аралыгын кыскартуунун (ε дон көз каранды болбогон) натыйжада жетишүүгө болот. (3.2.6) шарт аткарылганда жогоруда жүргүзүлгөн баалоолор мыйзамдуу болот. Натыйжада (3.2.2) жакындашуулар үчүн (3.2.5) баалоо алынды.

Удаалаш жакындашуулардын бир калыпта жыйналуучулугун далилдейли. Ал үчүн $\left|x_n(t,\varepsilon)-x_{n-1}(t,\varepsilon)\right|$ туюнтманы баалайлы.

$$\left|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\right|\le M_{10}M_1\int_0^{\tilde{s}}\left|x_1(s,\varepsilon)\right|ds\le M_{10}M_1\cdot\left|x^0\right|\cdot\tilde{s},$$

$$\left|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\right|\le M_2\tilde{s}\left|x^0\right|,$$

$$\dots\;\dots\;\dots,$$

$$\left|x_n(t,\varepsilon)-x_{n-1}(t,\varepsilon)\right|\le\left|x^0\right|\cdot\frac{\left(M_2\tilde{s}\right)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

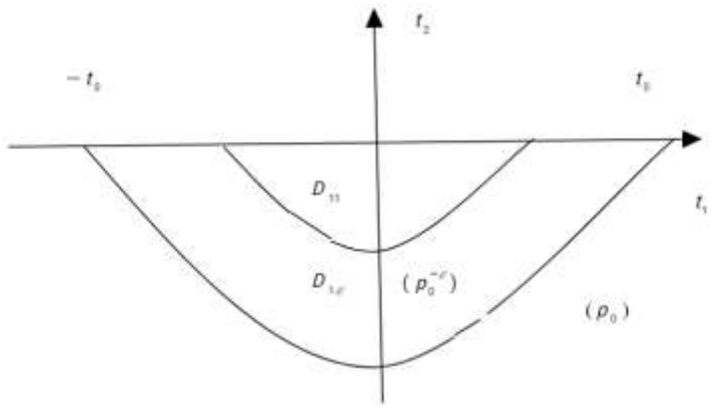
Алынган баалоолордун негизинде $\sum_{k=0}^{\infty}\left(x_k(t,\varepsilon)-x_{k-1}(t,\varepsilon)\right)$ катар $\forall t\in(p_0)$ үчүн бир калыпта кандайдыр бир $x(t,\varepsilon)$ функцияга жыйналат. Бул функция (3.2.1) теңдеменин (p_0) ийридеги чечими болот. (3.2.4) эске алсак, бул чечим үчүн

$$\left|x(t,\varepsilon)\right|\le M_3\exp\left(\frac{\operatorname{Re} F(t)}{\varepsilon}\right),\; \forall t\in(p_0), \tag{3.2.7}$$

туура болот.

$\left(p_0^{-\varepsilon}\right)=\{t\in D_{10}, \operatorname{Re} F(t)=\varepsilon\ln\varepsilon\}$ деңгээл сызыгын аныктайлы.

(p_0) $\wedge$ $\left(p_0^{-\varepsilon}\right)$ деңгээл сызыктары менен чектелген аймакты $D_{1\varepsilon}$ деп белгилейли. $D_{10} \setminus D_{1\varepsilon} = D_{11}$ болсун жана $\left(p_0^{-\varepsilon}\right) \in D_{11}$ деп эсептейли (Сүрөт 3.2.5).



Сүрөт 3.2.5. $D_{1\varepsilon}$ - чек аралык аймагы.

(3.2.1) теңдемени $t \in D_{1\varepsilon}$ жана $t \in D_{11}$ учурлар үчүн карайлы. (3.2.1) теңдемени жогоруда тандалган интегралдоо жолдорун эске алуу менен төмөндөгүдөй өзгөртөлү.

$$x(t,\varepsilon) = x^0 \exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right) + \int_{-t_0(p_0)}^{\tilde{t}} f(\tau,x)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau +$$

$$+\int_{\tilde{t}(q)}^{t} f(\tau,x)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau = \exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde{t})}{\varepsilon}\right)\cdot\left[x^0 \exp\left(\frac{F(\tilde{t})}{\varepsilon}\right)+\right.$$

$$\left.+\int_{-t_0}^{\tilde{t}} f(\tau,x)\exp\left(\frac{F(\tilde{t})-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau\right] + \int_{\tilde{t}}^{t} f(\tau,x)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau\,. \qquad (3.2.8)$$

Алынган туюнтмадагы $[...]$ кашаанын ичи (3.2.1) теңдеменин $t = \tilde{t} \in (p_0)$ болгон учурдагы чечимин берет. Муну эске алсак, (3.2.8) ден төмөндөгүгө ээ болобуз.

$$x(t,\varepsilon) = x(\tilde{t},\varepsilon)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde{t})}{\varepsilon}\right) + \int_{\tilde{t}} f(\tau,x)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right). \qquad (3.2.9)$$

Мурунку учурдагыдай эле (3.2.9) ге удаалаш жакындашуу методун колдонобуз, алар (3.2.2) дегидей эле аныкталат. Удалаалаш жакындашууларды баалоо жана алардын жыйналуучулугун далилдөө мурунку учурду кайталайт.

Баалоолорду жүргүзүүдө

$$\left|x(\tilde{t},\varepsilon)\right| \le M_3 \exp\left(\frac{F(\tilde{t})}{\varepsilon}\right)$$

жана

$$\left|\int_{\tilde{t}}^{t} \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t) - \operatorname{Re}F(\tau)}{\varepsilon}\right)\cdot\left|d\tau\right|\right| \le M_4\varepsilon$$

болорун эске алуу керек.

Натыйжада (3.2.1) теңдеменин чечими үчүн

$$\left|x(t,\varepsilon)\right| \le M_5 \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t)}{\varepsilon}\right),\ t \in D_{1\varepsilon} \cup D_{11}, \tag{3.2.10}$$

баалоого ээ болобуз.

(3.2.7) жана (3.2.10) баалоолорду бириктирсек

$$\left|x(t,\varepsilon)\right| \le M_5 \exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t)}{\varepsilon}\right),\ t \in \left(p_0\right) \cup D_{1\varepsilon} \cup D_{11}. \tag{3.2.11}$$

Төмөндөгүдөй теорема далилденди.

Т.3.1.1. (3.1.1)-(3.1.2) маселе каралсын жана U3.1.1-U3.1.3, U3.1.5 шарттар аткарылсын, анда D_1 областы жана бул областа аныкталган (3.1.1)-(3.1.2) маселенин $x(t,\varepsilon)$ чечими жашап, чечим үчүн (3.2.11) баалоо туура болот.

(3.2.11) баалоодон $\left(p_0\right)$ - (ЧКС), $D_{1\varepsilon}$ - (ЧКО) жана D_{11} - (ТО) болору келип чыгат. Теореманын негизинде төмөндөгүдөй натыйжалар алынат:

Н.3.1.1. Эгерде $\left(-t_0,0\right)$ чекитин сол жакка жылдырууда $\left(p_0\right)$ жашаса, анда $\left(t_0,0\right)$ оң жакка жылат.

Н.3.1.2. (3.1.1)-(3.1.2) маселенин чечимин, $\left[-t_0,t_0\right]$ - чыныгы октун кесиндисинде карасак, туруктуулук шарт өзгөргөндө, туруктуулуктун жоголушунун узартылышы кубулушу орун алат;

$\left[-t_0, -t_0 + \alpha_1(\varepsilon), \alpha_1(\varepsilon) > 0 \wedge \alpha_1(\varepsilon) \to 0,\ (\varepsilon \to 0)\right)$ жана

$\left[t_0, t_0 - \alpha_2(\varepsilon), \alpha_2(\varepsilon) > 0 \wedge \alpha_2(\varepsilon) \to 0,\ (\varepsilon \to 0)\right)$ аралыктарында $|x(t,\varepsilon)| \le M_5$; ал эми

$\left[-t_0 + \alpha_1(\varepsilon), t_0 - \alpha_2(\varepsilon)\right]$ аралыгында $|x(t,\varepsilon)| \le M_5 \varepsilon^n$, $n \in N$ болот.

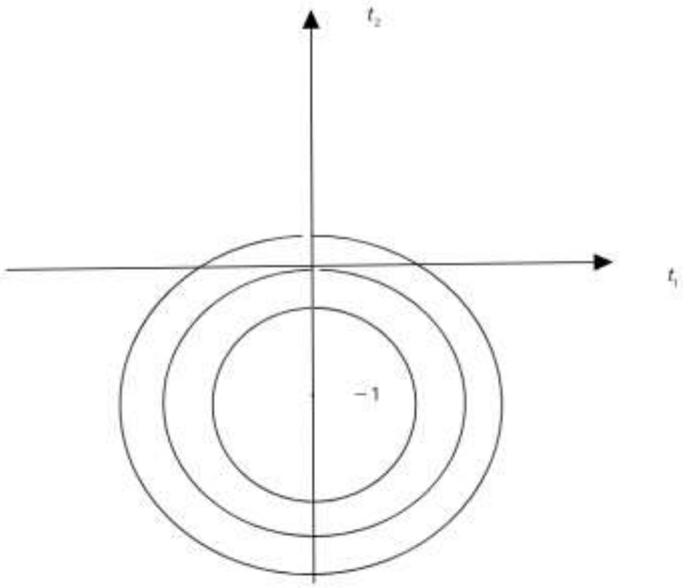
Мисалдар. 1). $\lambda(t) = \dfrac{1}{t+i}$, $t \in C \setminus \{-i\} = D$ берилсин. $\lambda(t) \in Q(D)$ $\wedge$ $\operatorname{Re}\lambda(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ (чыныгы t үчүн). $-\infty < t < 0$: $\operatorname{Re}\lambda(t) < 0$; $\operatorname{Re}\lambda(0) = 0$; $0 < t < +\infty$: $\operatorname{Re}\lambda(t) > 0$. U3.1.1-U3.1.3 шарттар аткарылат.

$$F(t) = \int_{-t_0}^{t} \frac{d\tau}{t+i} = \ln(t+i) - \ln(-t_0+i);\ \operatorname{Re}F(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{t_1^2 + \left(t_2^2+1\right)^2}{t_0^2+1}.$$

$\operatorname{Re}F(t)$ функциясынын деңгээл сызыктары, борбору $(0,-1)$ чекитинде болгон, айланар болушат (Сүрөт 3.2.6). $(-t_0;0)$, $(t_0;0)$ чекиттери аркылуу өтүүчү (p_0) деңгээл сызыкты аныктайлы $p_0 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t_0^2+1}{t_0^2+1}\right) = 0$, демек,

$$(p_0) = \left\{t \in D, t_1^2 + (t_2+1)^2 = t_0^2 + 1\right\}.$$

Бул деңгээл сызык борбору $(0;-1)$ радиусу $r_0 = \sqrt{t_0^2+1}$ болгон айлана болот (Сүрөт 3.2.6).

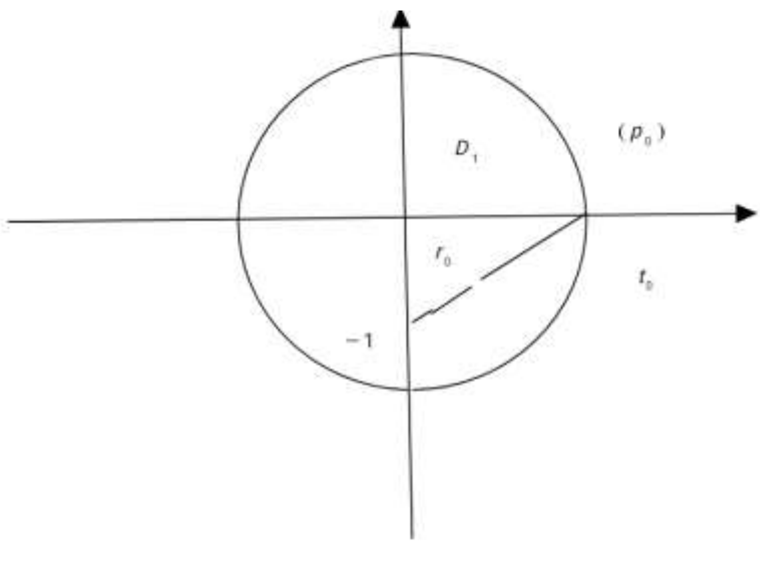


Сүрөт 3.2.6. Борбору $(0;-1)$ радиусу $r_0=\sqrt{t_0^2+1}$ болгон айлана.

$[-t_0;t_0]$ жана (p_0) деңгээл сызыгынын жогорку бөлүгү менен чектелген область D_1 болот (Сүрөт 3.2.7).

$(p_0^{-\varepsilon})$ ду аныктайлы. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t_1^2+(t_2+1)^2}{t_0^2+1}\right)=\varepsilon\ln\varepsilon \;\Rightarrow\; t_1^2+(t_2+1)^2=(t_0^2+1)e^{2\varepsilon\ln\varepsilon}$,

$(p_0^{-\varepsilon})=\{t\in D, t_1^2+(t_2+1)^2=(t_0^2+1)e^{2\varepsilon\ln\varepsilon}\}$.



Сүрөт 3.2.7. D_1 обласы.

2). $\lambda(t) = ie^{it}$, $t \in C$. $\lambda(t) \in Q(C)$, $\operatorname{Re}\lambda(t) = -\sin t$ (чыныгы t үчүн):

$$\operatorname{Re}\lambda(t) < 0,\ 2k\pi < t < (2k+1)\pi,$$

$$\operatorname{Re}\lambda(t) > 0,\ (2k+1)\pi < t < 2(k+1)\pi,$$

$$\operatorname{Re}\lambda(k\pi) = 0,\ k = 0,1,2,\dots.$$

$[0,2\pi]$ аралыкты гана карайлы. Бул аралыкты кароо жалпылыкты чектебейт.

$t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ деп алалы.

$$F(t) = i\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{i\tau}d\tau = e^{it} - e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{it} - i,\ F(t) = e^{it} - i.$$

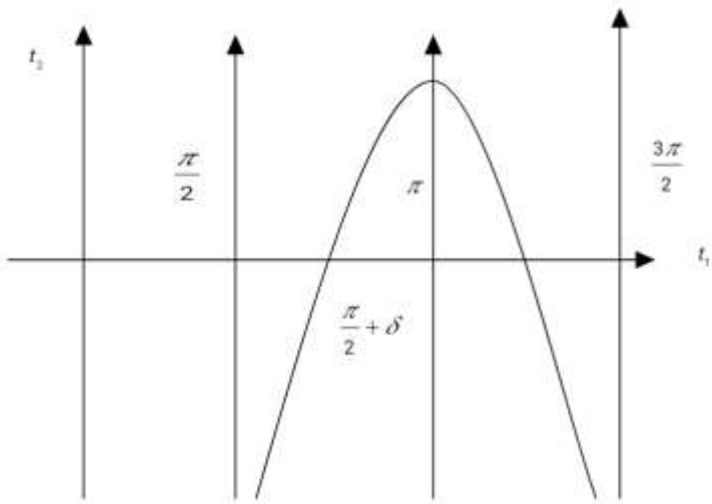
$$\operatorname{Re}F(t) = \operatorname{Re}e^{i(t_1+it_2)} = e^{-t_2}\cos t_1.$$

(p_0) деңгээл сызыгын аныктайлы $(p_0) = \{t \in C, \operatorname{Re}F(t) = 0\}$.

Демек, $e^{-t_2}\cos t_1 = 0 \;\Rightarrow\; \cos t_1 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = \dfrac{\pi}{2},\ t_1 = \dfrac{3\pi}{2}$.

(p_0) деңгээл сызыгы өз ара кесилишпөөчү эки түз сызыктан турат. Эгерде C тегиздигинде бул деңгээл сызыкты карай турган болсок, анда анын бутактары $(\pi,-\infty)$ чекитинде кесилишет.

$(p) = \{t \in C, e^{-t_2}\cos t_1 = p\}$ деңгээл сызыктарынын бардыгы $(\pi;-\infty)$ чекитинде кесилишкендиктен (t_2 огунун багыты боюнча) бул чекит чексиз тартиптеги ашуу чекити болуп эсептелет [73]. Бул учурдун өзгөчөлүгү каралып жаткан облас чексиз тилке болот (Сүрөт 3.2.8). t_0 ду $\dfrac{\pi}{2} + \delta$ ($0 < \delta$ - жетишээрлик кичине сан) деп алсак, чектүү обласка ээ болобуз (Сүрөт 3.2.8).



Сүрөт 3.2.8. Чексиз тилке обласы.

Эскертүү. Эгерде $\lambda(t)$ өздүк мааниси, D областынын T_0 чекитинде $(m-1)$ -эселүү нөлгө ээ болсо жана бул чекит чыныгы окто жатпаса, анда бул учур каралган учурдагыдай эле изилденет.

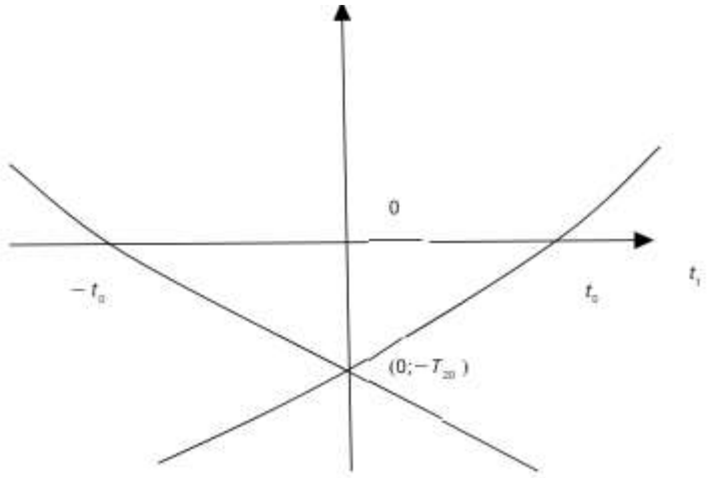
Мисалы. T_0 чекити $\lambda(t)$ функциясынын жөнөкөй нөлү болсун б.а. $\lambda(T_0)=0 \wedge \lambda'(T_0)\neq 0$, $D=\{t\in C, |t|<r_0\}$ деп алалы. $T_0=T_{10}-iT_{20}$ ($T_{20}>0$) деп эсептейли.

$F(t)=\int_{-t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau$ жана $F_0(t)=\int_{T_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau$ функцияларын аныктайлы.

$F(t)=F_0(t)-F(-t_0)$ барабардыгы туура болот. Бул барабардык $\int_{-t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau$ интегралга Кошинин теоремасын колдонуудан келип чыгат. $F_0(t)$ функциясы T_0 чекитинде эки эселүү нөлгө ээ болот жана

$$(p_0)=\{t\in D, \operatorname{Re}F_0(t)=0\}$$

деңгээл сызыгы бул чекитте бутактанат. Бутактар чыныгы окту $(-t_0;0)$, $(t_0;0)$ чекиттерде кесип өтөт десек, каралып өткөн учурга келебиз (Сүрөт 3.2.9).

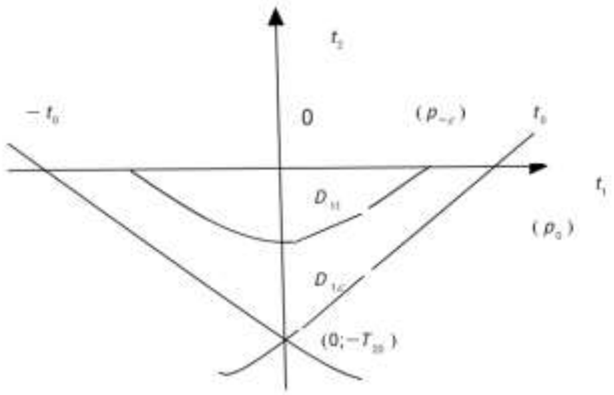


Сүрөт 3.2.9. Деңгээл сызыктын бутактанган учуру.

(3.2.9) сүрөттөн кийин (p_0) - деңгээл сызыгынын бутактары жана $[-t_0, t_0]$ - кесиндиси менен чектелген областы D_1 деп белгилейли.

$$(p_{-\varepsilon}) = \{t \in D_1, \operatorname{Re} F_0(t) = -\varepsilon \ln \varepsilon\}$$

деңгээл сызыгы аркылуу $D_{1\varepsilon}$, D_{11} бөлүктөргө бөлөлү (Сүрөт 3.2.10).



Сүрөт 3.2.10. $(p_{-\varepsilon})$ деңгээл сызыгы аркылуу бөлүнгөн $D_{1\varepsilon}$, D_{11} областары.

(3.2.1) теңдемени D_1 областа жана чечимдин жашашын далилдөө, аны баалоону жүргүзүү үчүн интегралдоо жолдорун тандайбыз. Интегралдоонун жолу $(p_0)[t_0, \tilde{t}]$, $(q)[\tilde{t}, t]$ турат.

Мурда жүргүзүлгөн эсептөөлөрдү кайталоо менен (3.2.1) теңдеменин чечими үчүн төмөнкү баалоону алабыз:

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_6 \exp\left(\frac{\operatorname{Re} F(t)}{\varepsilon}\right)$$

же

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_6 \begin{cases} 1, \ t \in D_{1\varepsilon} \cup (p_0), \\ \varepsilon^n, \ \ t \in D_{11}. \end{cases} . \qquad (3.2.12)$$

Төмөндөгүдөй теорема далилденди.

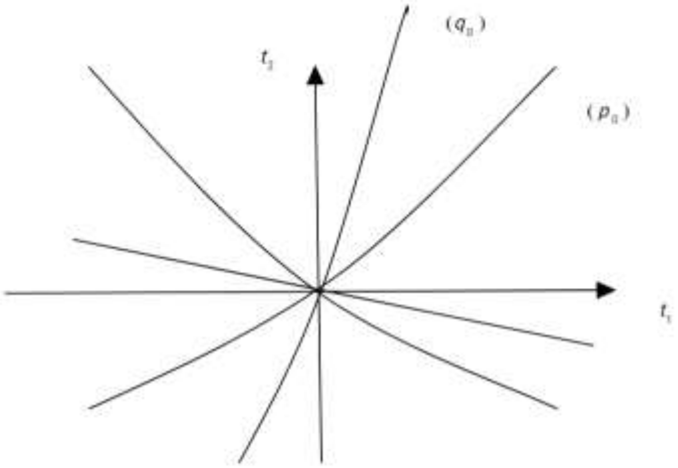
Т.3.1.2. (3.1.1)-(3.1.2) маселе каралсын жана U3.1.1, U3.1.2, U3.1.4 ($n=1$, $T_0 = -iT_{20}$, $T_{20} > 0$) U3.1.5 шарттар аткарылсын. Бул шарттар аткарылганда $D_0 \subset D$ жана бул областа аныкталган (3.1.1)-(3.1.2) маселенин $x(t,\varepsilon)$ чечими жашап, бул чечим үчүн (3.2.12) баалоо туура болот.

(3.2.12) баалоодон:

(p_0) бутактары – (ЧКС), $D_{1\varepsilon}$ - (ЧКО), D_{11} - (ТО) болору келип чыгат; $[-t_0, t_0]$ - аралыгында туруктуулуктун жоголушунун узартылышы кубулушу байкалат; $(-t_0)$ ду сол жака жылдырганда, t_0 оң жака карата жылат.

I.2.2. U3.1.1, U3.1.2, U3.1.4, U3.1.5 шарттар аткарылсын. $\lambda(t)$ өздүк мааниси, T_0 чекитинде жөнөкөй нөлгө ээ болсун жана бул нөл чыныгы окто жатсын.

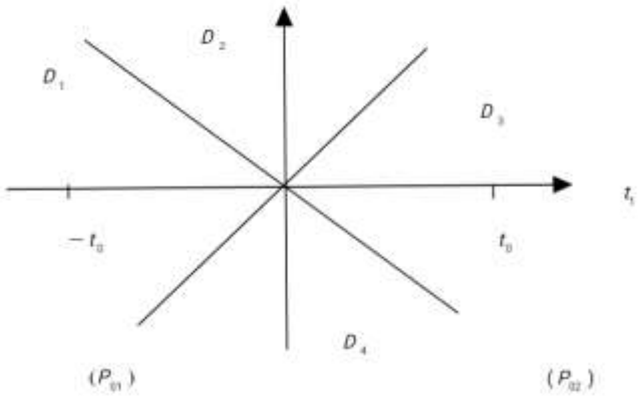
$T_0 \equiv 0$ деп эсептейли. $F(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau$, $F_0(t) = \int_{0}^{t} \lambda(\tau)d\tau$ функцияларды аныктайлы. Жогоруда белгиленгендей $F(t) = F_0(t) - F_0(-t_0)$, барабардык орун алат. $F_0(t)$ функция $t=0$ чекитинде эки эселүү нөлгө ээ болот жана бул чекитте $\operatorname{Re} F_0(t)$, $\operatorname{Im} F_0(t)$ функциялардын деңгээл сызыктары бутактанат (Сүрөт 3.2.11)



Сүрөт 3.2.11. Деңгээл сызыктардын бутактануусу.

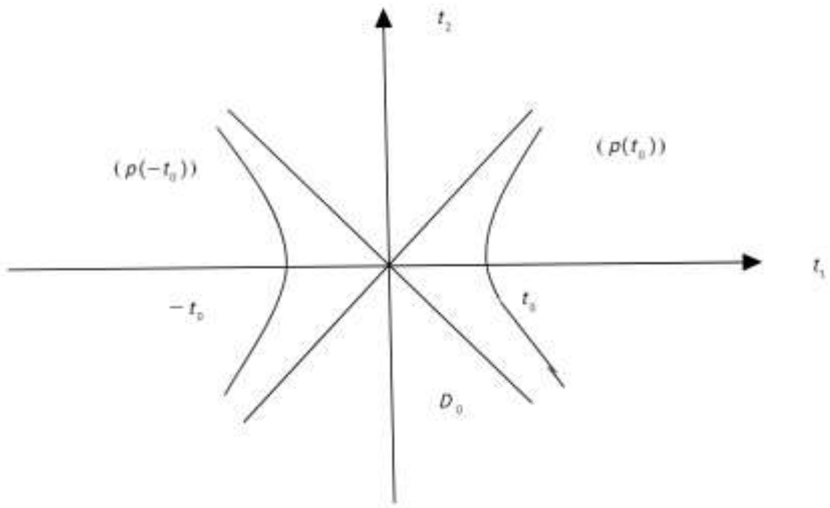
$F_0(t)$ функциясы U3.1.4 шартка ылайык D областында жалгыз гана (T_0) нөлгө ээ болгондуктан, $\operatorname{Re} F_0(t)$, $\operatorname{Im} F_0(t)$ функциялардын деңгээл сызыктары D областынын чек арасына жакындайт.

(p_0) деңгээл сызыктарынын бутактары $((p_{01}),(p_{02}))$ аркылуу D областы төрт секторго бөлүнөт. Секторлорду D_j $(j = 1,2,3,4)$ аркылуу белгилейли (Сүрөт 3.2.12)



Сүрөт 3.2.12. D_j $(j = 1,2,4)$ секторлору.

$(p(-t_0)) = \{t \in D_1, \operatorname{Re} F_0(t) = p(-t_0) - const\}$ деңгээл сызыгын аныктайлы. $[-t_0, t_0]$ аралыгында, U3.1.5 шартка ылайык, $\operatorname{Re} F_0(t)$ функция кемүүчү, $[0, T_{01}]$ аралыгында өсүүчү болгондуктан, кандайдыр бир $(0 < T_{02} < T_{01})$ T_{02} чекит жашайт. Бул чекит аркылуу өтүүчү $(p(T_{02}))$ деңгээл сызыгы жашайт жана $p(T_{02}) \equiv p(-t_0)$ болот. Жалпылыкты бузбастан $T_{02} = t_0$ деп алалы. $(p(-t_0))$, $(p(-t_0))$ деңгээл сызыктар менен чектелген D нын бөлүгүн D_0 деп белгилейли (Сүрөт 3.2.13).

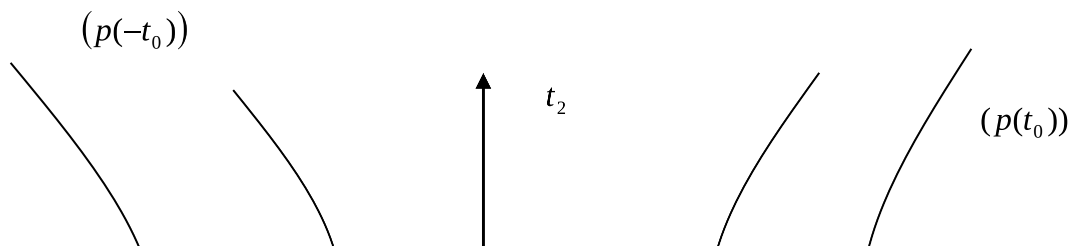


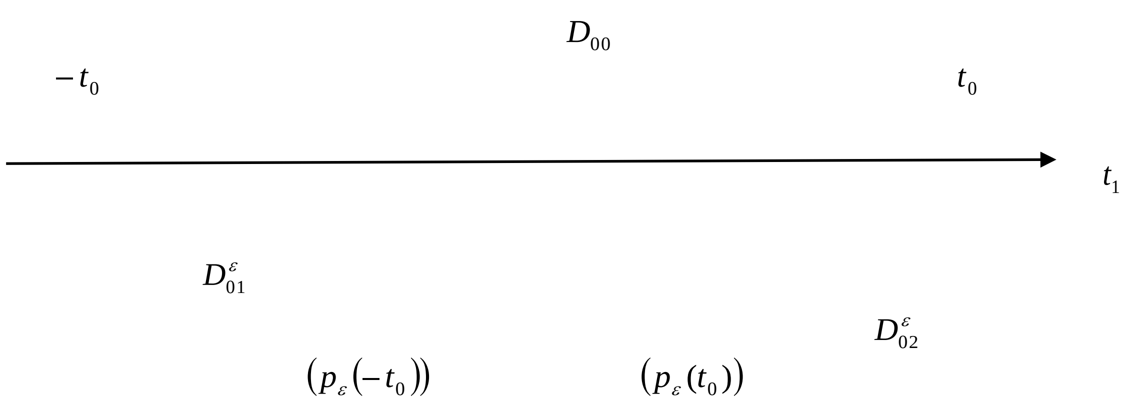
Сүрөт 3.2.13. D областынын бир бөлүгү болгон D_0 обласы.

$\forall t \in D_0$ $(\operatorname{Re} F(t) \le 0)$ барабардык орун алат. (3.2.1) теңдемени D_0 областында карайбыз.

$$(p_{+\varepsilon}(-t_0)) = \{t \in D_0, \operatorname{Re} F_0(t) = p(-t_0) - \varepsilon \ln \varepsilon\},$$
$$(p_{-\varepsilon}(t_0)) = \{t \in D_0, \operatorname{Re} F_0(t) = p(t_0) + \varepsilon \ln \varepsilon\},$$

деңгээл сызыктары аркылуу D_0 областын бир нече бөлүктөргө бөлөлү жана бөлүктөрдү D_{01}^{ε}, D_{00}, D_{02}^{ε} аркылуу белгилейли (Сүрөт 3.2.14)





Сүрөт 3.2.14. D_{01}^{ε}, D_{00}, D_{02}^{ε} областар.

(3.2.1) теңдемеге удаалаш жакындашуу методун колдонобуз. Удаалаш жакындашууларды баалоо жана алардын жыйналуучулугун далилдөө үчүн интегралдоо жолдорун тандайбыз. Интегралдоо жолдорун $(p(t))$ жана $(q(t))$ деңгээл сызыктарын же (t_0, t) чекиттерин туташтыруучу кесиндилердин жыйындысы катары аныктоого болот.

Удаалаш жакындашууларды баалоо жана алардын бир калыпта жыйналуучулугун далилдөө аркылуу (3.2.1) теңдеменин чечими үчүн төмөнкүдөй баалоого ээ болобуз.

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_6 \exp\left(\frac{\operatorname{Re} F(t)}{\varepsilon}\right),$$

же

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_6 \begin{cases} 1, & t \in D_{01}^{\varepsilon} \cup D_2; \\ \varepsilon^n, & t \in D_{00}. \end{cases} \qquad (3.2.13)$$

Жыйынтыгында төмөнкү теорема далилденди.

Т.3.1.3. (3.1.1)-(3.1.2) маселе каралсын жана U3.1.1, U3.1.2, U3.1.4 ($m = 2$, $T_0 = 0$), U3.1.5 шарттар аткарылсын, анда $D_0 \subset D$ областы жана бул область аныкталган (3.1.1)-(3.1.2) маселенин $x(t,\varepsilon)$ - чечими жашап, бул чечим үчүн (3.2.13) баалоо туура болот.

Далилденген теорема 3.2.3 төн төмөндөгү ырастоолордун тууралыгы келип чыгат:

1). $(p(-t_0))$, $(p(t_0))$ - (ЧКС); D_{01}^{ε}, D_{02}^{ε} - (ЧКО); D_{00} - (ТО).

2). $[-t_0 t_0]$ - аралыгында туруктуулуктун жоголушунун узартылышы кубулушу орун алат.

3). $[-t_0 t_0]$ - аралыгын, $(-t_0)$ ду сол жака жылдырганда, t_0 оң жака жылуу менен, кеңейтүү мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз.

§3.3. Кичине козголуу болгон учурда маселенин чечилиши

(3.1.1)-(3.1.2) маселени төмөндөгүдөй көрүнүштө жазабыз:

$$x(t,\varepsilon) = x^0 \exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right) + \int_{-t_0}^{t} [h(\tau) + f(\tau,x)] \exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right) d\tau , \qquad (3.3.1)$$

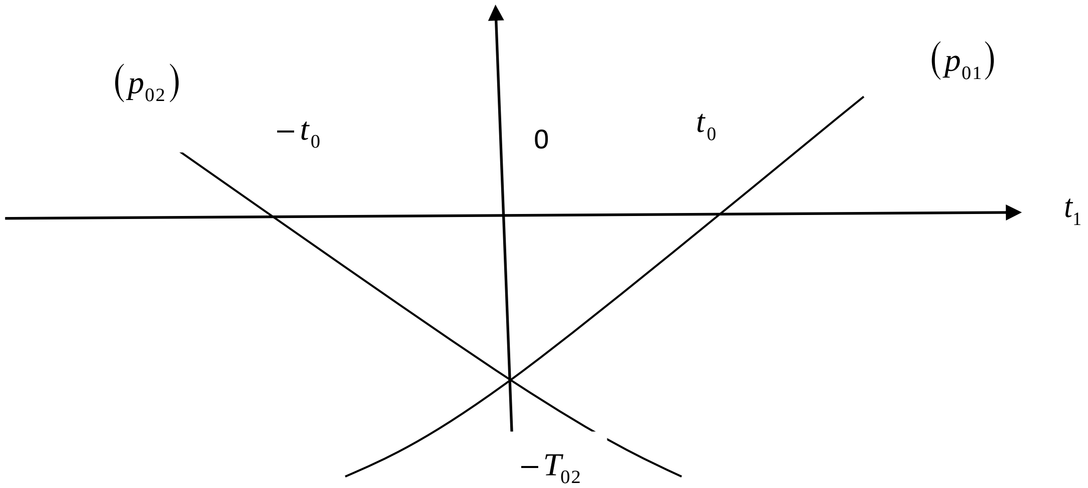
$\lambda(t)$ функциясы жөнөкөй нөлдөргө ээ болуп, бул нөлдөр чыныгы окто жаткан жатпаган учурларды карайлы. Кичине козголуунун (3.3.1) теңдеменин чечимине тийгизген таасирин аныктайлы (туруктуулук шарты өзгөргөндө туруктуулуктун жоголушунун узартылышы кубулушу).

U3.3.1. U3.1.1, U3.1.2, U3.1.4, U3.1.5, U3.1.6 шарттар аткарылсын. $\lambda(t)$ өздүк мааниси, T_0 чекитинде жөнөкөй нөлгө ээ болсун жана бул нөл чыныгы окто жатпасын

($T_0 = -iT_{02}$, T_{02} деп алалы).

$F(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau) d\tau \quad F_0(t) = \int_{T_0}^{t} \lambda(\tau) d\tau$ функцияларды аныктайлы.

$F(t)=F_0(t)-F_0(t_0)$ болот. $F_0(t)$ функция $t=T_0$ чекитинде эки эселүү нөлгө ээ болот. Бул чекитте $\operatorname{Re}F(t)$, $\operatorname{Im}F(t)$ функциялардын деңгээл сызыктары бутактанат. Сүрөт 3.3. $\operatorname{Re}F_0(t)$ функциянын бутактануучу деңгээл сызыгы жана анын бутактары (p_{01}), (p_{02}).



Сүрөт 3.3.1. $\operatorname{Re}F(t)$ функциянын бутактанган деңгээл сызыгы.

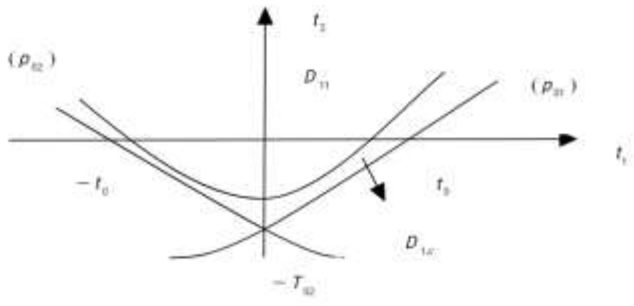
Жалпылыкты бузбастан (p_0) дун бутактары $(-t_0,0)$, $(t_0,0)$ чекиттери аркылуу өтөт деп эсептейли. (p_0) деңгээл сызыгынын бутактары жана $[-t_0,t_0]$ кесинди менен чектелген областы D_1 деп белгилейли.

$(p_0^{-\varepsilon})=\{t\in D_1, \operatorname{Re}F_0(t)=\varepsilon\ln\varepsilon\}$ деңгээл сызыгын аныктайлы. (p_0) дун бутактары жана $(p_0^{-\varepsilon})$ деңгээл сызыгы менен чектелген областы $D_{1\varepsilon}$, $D_1\setminus D_{1\varepsilon}=D_{11}$ деп белгилейли (Сүрөт 3.3.2).

(3.3.1) удаалаш жакындашуу методун колдонобуз:

$$x_n(t,\varepsilon)=x^0\exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right)+\int_{-t_0}^{t}[h(\tau)+f(\tau,x_{n-1}(\tau,\varepsilon)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau, \qquad (3.3.2)$$

$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0$, $n=1,2,\ldots$.



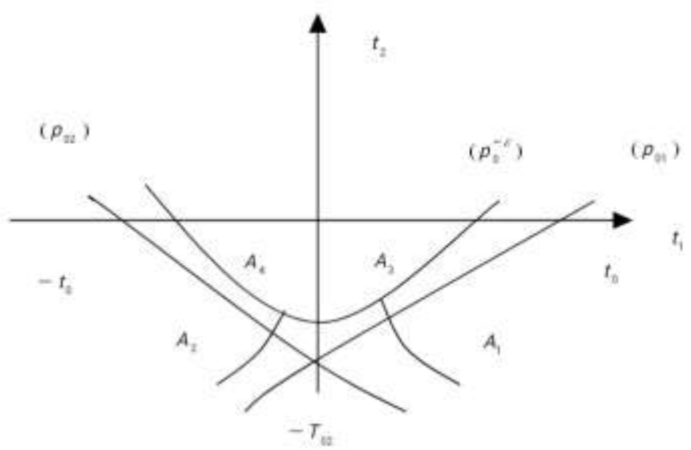
Сүрөт 3.3.2. $D_{1\varepsilon}$ чек аралык обласы

(p_{01}) бутактан $A_1(+\gamma_1\varepsilon^{\beta}, -T_{02}+\gamma_2\varepsilon^{\beta})$, (p_{02}) бутактан $A_2(-\gamma_3\varepsilon^{\beta}, -T_{02}+\gamma_4\varepsilon^{\beta})$ чекиттерди алалы, мында γ_j - ε дон көз каранды эмес, кандайдыр бир оң сандар, $0<\beta<1$.

$$(q_{1\varepsilon}) = \{t \in D_1, \operatorname{Im} F_0(t) = \operatorname{Im} F_0((\gamma_1 + i(-T_{02}+\gamma_2))\varepsilon^{\beta}\},$$

$$(q_{2\varepsilon}) = \{t \in D_1, \operatorname{Im} F_0(t) = \operatorname{Im} F_0((-\gamma_2 + i(-T_{02}+\gamma_4)\varepsilon^{\beta})\},$$

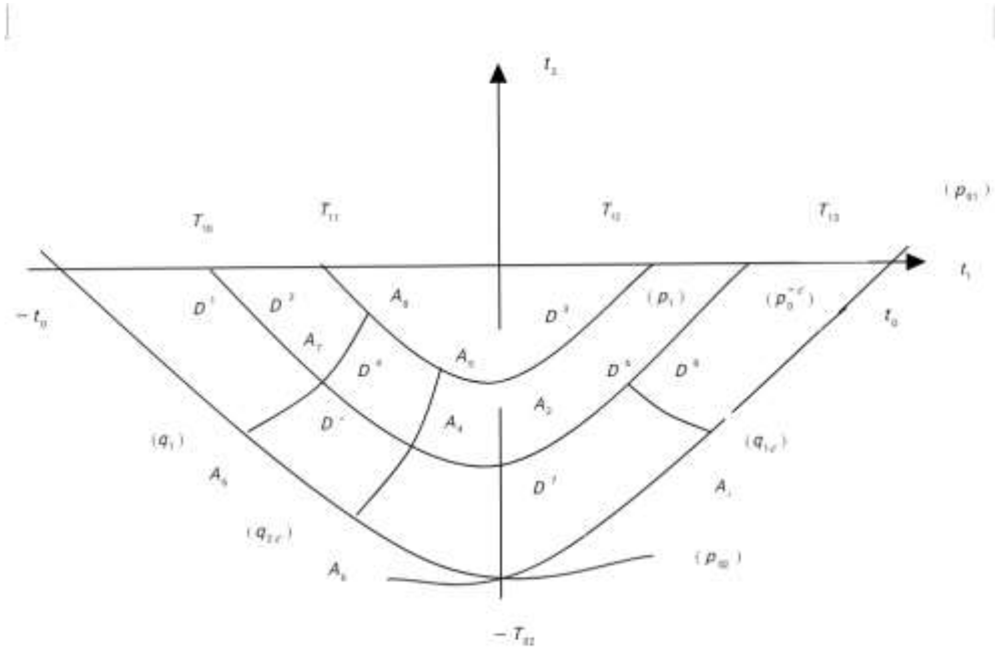
деңгээл сызыктарын жүргүзөлү. $(q_{1\varepsilon})$, $(q_{2\varepsilon})$ сызыктар $(p_0^{-\varepsilon})$ сызыгы менен тиешелеш түрдө $A_3(\gamma_5 + i(\gamma_6 + T_{02})\varepsilon^{\beta})$, $A_4(-\gamma_7 + i(\gamma_8 - T_{02})\varepsilon^{\beta})$ $(\gamma_j\,(j=5,6,7,8)>0)$ сандар) чекиттерде кесилишсин (Сүрөт 3.3.3).



Сүрөт 3.3.3. Деңгээл сызыктар бутактануучу чекиттин чекебели.

Э.3.3.1. Конкреттүү $F_0(t)$ функция учурда чекиттердин координаталары башкача болушу да мүмкүн. Мындай болсо деле кийинки жүргүзүлүүчү баалоолордо, натыйжаларда сапаттык өзгөрүүлөр болбойт.

Бул деңгээл сызыктар жана жогоруда аныкталган деңгээл сызыктар аркылуу D_1 областы бир нече бөлүктөргө бөлүнөт (Сүрөт 3.3.4).



Сүрөт 3.3.4 D_1 областынын бөлүнүшү

$$(p_1)=\{t\in D_1, \operatorname{Re}F_0(t)=p_1-const \wedge \varepsilon \text{ дөн көз каранды эмес}\},$$

$$(q_1)=\{t\in D_1, \operatorname{Im}F_0(t)=q_1-const \wedge \varepsilon \text{ дөн көз каранды эмес}\},$$

деңгээл сызыктарын аныктайлы.

$[-t_0,T_{10}]$ - кесинди, (p_{02}) $[-t_0,A_6]$, (q_1) $[A_6,A_7]$, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[A_7,T_{10}]$ менен чектелген область D^1; $[T_{10},T_{11}]$ - кесинди, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[T_{10},A_7]$, (q_1) $[A_7,A_8]$, (p_1) $[A_8,T_{11}]$ аркылуу чектелген область D^2; $[T_{11},T_{12}]$ - кесинди (p_1) $[T_{11},T_{12}]$ менен чектелген область D^3; $(p_0^{-\varepsilon})$ $[A_7,A_4]$, $(q_{2\varepsilon})$ $[A_4,A_5]$, (p_1) $[A_5,A_8]$, (q_1) $[A_7,A_8]$ лер менен чектелген область D^4; (p_{02}) $[A_6,A_3]$, $(q_{2\varepsilon})$ $[A_3,A_4]$, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[A_4,A_7]$, (q_1) $[A_7,A_6]$ чектеген область D^5; $[T_{12},T_{13}]$ - кесинди, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[T_{13},A_4]$, $(q_{2\varepsilon})$ $[A_4,A_5]$, (p_1) $[A_5,T_{12}]$ чектеген область D^6

; (p_{02}) $[A_3,-T_{02}]$, (p_{01}) $[-T_{02},A_1]$, $(q_{1\varepsilon})$ $[A_1,A_2]$, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[A_2,A_4]$, $(q_{2\varepsilon})$ $[A_4,A_3]$ чектеген область D^7; (p_{01}) $[A_1,t_0]$, $[T_{13},t_0]$ - кесинди, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[T_{13},A_2]$, $(q_{1\varepsilon})$ $[A_2,A_1]$ - чектеген область D^8 болсун.

(3.3.2) жакындашууларды D^j ($j=1,...,8$) областарда карайлы жана баалоолорду аткаралы. Баардык жакындашуулар үчүн интегралдоонун жолдору бирдей болот жана төмөндөгүдөй аныкталат: жол $(p_{02})\cup(p_{01})[-t_0,\tilde{t}\,]$, (q) $[\tilde{t},t]$ бөлүктөрдөн турат. Удаалаш жакындашууларды баалоодо негизги аныктоочу биринчи жакындашуу болгондуктан биринчи жакындашууну баалоо менен чектелсек болот.

1). $t\in D^1\cup D^5\cup D^7\cup D^8$ болсо, биринчи жакындашууда $x^0\exp\left(\dfrac{F(t)}{\varepsilon}\right)$ мүчө аныктоочу, ал эми $\int\limits_{-t_0}^{t}h(\tau)\exp\left(\dfrac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau$ мүчө чектелген болот. Натыйжада

$$|x_1|\le M_{11},\ t\in D^1\cup D^5\cup D^7\cup D^8,$$

баалоого ээ болобуз.

2). $t\in D^2\cup D^4\cup D^6$ болсун. Бул учурда $x^0\exp\left(\dfrac{F(t)}{\varepsilon}\right)$ мүчө ε^n ($n\in N$) тартипте болуу менен мааниге ээ болбойт. Ал эми $J(t)=\int\limits_{-t_0}^{t}h(\tau)\exp\left(\dfrac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau$ мүчө аныктоочу болуу менен бул областардын ар биринде түрдүүчө асимптотикалык баалоолорго ээ болот.

Төмөндөгүдөй баалоолорго ээ болобуз:

$|J(t)|\le M_{12}\varepsilon,\ t\in D^2;$

$|J(t)|\le N_{13}\varepsilon^{1-\beta},\ t\in D^4\cup D^6.$

Кийинки баалоолорду жүргүзүүнүн алдында алгач $t \in (p_{02}) \cup (p_{01})$ үчүн (3.3.1) теңдеменин чечими үчүн баалоону жүргүзүү максатка ылайыктуу болот. Ал үчүн $-t_0$, $t \in (p_{02}) \cup (p_{01})$ чекиттерин туташтырган ийиринин узундугун s деп белгилесек, анда удаалаш жакындашуулар үчүн төмөндөгүдөй баалоолорду алууга болот:

$$|x_2| \le M_{11} + M_{11} M_{14} s,$$

$$|x_3| \le M_{11} + M_{11} \cdot \frac{(M_{14}s)^2}{2!}, \qquad (3.3.3)$$

$$\dots \; \dots \; \dots,$$

$$|x_m| \le M_{11}\left(1 + \dots + \frac{(M_{14}s)^{m-1}}{(m-1)!}\right), \; m = 1,2,\dots .$$

(3.3.1) баалоодон

$|x_m| \le M_{11} \exp(M_{14}s) \le M_{11} \exp(M_{14}s_0)$ келип чыгат.

$$|x_m| \le M_{11} \exp(M_{14}s) \le M_{11} \exp(M_{14}s_0) \le M_0$$

барабарсыздык аткарылат деп эсептейбиз. Бул шарт аткарылганда $f(t,x)$ үчүн (U3.1.1) шарт аткарылат. Удаалаш жакындашуулардын бир калыпта жыйналуучулугу мурда каралган учурдагыдай эле далилденет.

Демек, $\forall t \in (p_{01}) \cup (p_{02})$ үчүн (3.3.1) теңдеменин $x(t,\varepsilon)$ чечими жашап ал үчүн

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_5 \le M_0, \; t \in (p_{01}) \cup (p_{02}), \qquad (3.3.4)$$

баалоо туура болот.

$t \in \overset{8}{\cup} D_j$ ($j = 1,2,\dots 8$) үчүн (3.3.1) теңдемеде төмөндөгүдөй өзгөртүүнү аткаралы

$$x(t,\varepsilon)=x^0\exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right)+\int_{-t_0}^{t}[h(\tau)+f(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau=x^0\exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right)+$$

$$+\int_{-t_0}^{\tilde t}[h(\tau)+f(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau+\int_{\tilde t}^{t}[h(\tau)+f(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau=$$

$$=\exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde t)}{\varepsilon}\right)\left[x^0\exp\left(\frac{F(\tilde t)}{\varepsilon}\right)+\int_{-t_0}^{\tilde t}[h(\tau)+f(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(\tilde t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau\right]+$$

$$+\int_{\tilde t}^{t}[h(\tau)+f(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau\,.$$

Акыркы алынган туюнтмадагы [...] кашаанын ичиндеги туюнтма (3.3.1) теңдеменин $\tilde t\in(p_{01})\cup(p_{02})$ болгондогу $x(\tilde t,\varepsilon)$ чечими болуп эсептелет. Муну эске алсак

$$x(t,\varepsilon)=x(\tilde t,\varepsilon)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde t)}{\varepsilon}\right)+\int_{\tilde t}^{t}[h(\tau)+f(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau\,, \qquad (3.3.5)$$

теңдемеге ээ болобуз.

(3.3.5) теңдемеге удаалаш жакындаштыруу методун колдонобуз. Удаалаш жакындаштырууларды төмөндөгүдөй аныктайбыз

$$x_n=x(\tilde t,\varepsilon)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde t)}{\varepsilon}\right)+\int_{\tilde t}^{t}[h(\tau)+f(\tau,x_{n-1})]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau\,, \qquad (3.3.6)$$

$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0$, $n=1,2,\ldots$.

(3.3.6) да $t\in D^1\cup D^5\cup D^7\cup D^8$ үчүн $|x(\tilde t,\varepsilon)|\le M_{15}$ жана $\left|\exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde t)}{\varepsilon}\right)\right|\le O(1)$,

$t\in D^2\cup D^3\cup D^4\cup D^6$ болгондо $\left|\exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde t)}{\varepsilon}\right)\right|=\exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t)}{\varepsilon}\right)\le\exp\ln\varepsilon=O(\varepsilon^n)$,

$n\in N$. Тандалган жол боюнча $\operatorname{Re}F(t)$ кемүүчү болгондуктан $|x_1|$ деги интеграл чектелген болот. $t\in D^1\cup D^5\cup D^7\cup D^8$ болгондо

$$\forall n\in N\ \ (|x_n|\le M_{16}), \qquad (3.3.7)$$

баалоону алсак болот. $t \in D^2 \cup D^3 \cup D^4 \cup D^6$ болсо $|x_1| \le M_{16} w(t,\varepsilon)$, мында $w(t,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, t \in D^2 \cup D^3, \\ \varepsilon^{1-p}, t \in D^4 \cup D^6, \end{cases}$ баалоо туура болот (мындай баалоо [] эмгектерде да алынгандыктан толук далилдөөнү келтирбейбиз). Калган жакындашууларды баалоодо биринчи жакындашуу аныктоочу болгондуктан төмөндөгү баалоонун тууралыгы келип чыгат

$$\forall n \in N \ \left(|x_n(t,\varepsilon)| \le M_{16} w(t,\varepsilon) \right),$$

мында $w(t,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, t \in D^2 \cup D^3; \\ \varepsilon^{1-p}, t \in D^4 \cup D^6. \end{cases}$.

Удаалаш жакындашуулардын жыйналуучулугу §3.1 дегидей эле далилденет. Натыйжада (3.3.6) же (3.3.1) теңдеменин чечими үчүн

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_{16} w_1(t,\varepsilon), \tag{3.3.8}$$

баалоого ээ болобуз, мында

$$w_1(t,\varepsilon) = \begin{cases} 1, \ t \in D^1 \cup D^5 \cup D^7 \cup D^8; \\ \varepsilon, \ t \in D^2 \cup D^3; \\ \varepsilon^{1-\beta}, \ t \in D^4 \cup D^6. \end{cases}$$

Төмөндөгүдөй теорема далилденди.

Теорема 3.3.1. (3.3.1) теңдеме берилсин, U3.3.1 шарт аткарылсын, анда $D_1 \subset D$ облас жана бул область аныкталган (3.3.1) теңдеменин $x(t,\varepsilon)$ чечими жашап, бул чечим үчүн (3.3.8) баалоо туура болот.

Бул теоремадан төмөндөгүдөй ырастоонун тууралыгы келип чыгат: Кичине козголуу болгон учурда жана U3.3.1 шартта $(-t_0)$ ду сол жака жылдыруудан туруктуулук шарт өзгөргөндө, туруктуулуктун жоюлушунун интервалы өзгөрбөйт. D^1 областы бир нече катмарларга бөлүнөт, айрым катмарлар ЧКА ($D^1 \cup D^5 \cup D^7 \cup D^8$), айрымдары өтмө аймактар $\left(D^4 \cup D^6\right)$, айрымдары стабилдүү аймактар $(D^2 \cup D^3)$ болушат (кичине козголуу болбогон учурда өтмө аймактар болбойт жана стабилдүү аймакта чечим үчүн $O(\varepsilon^n)$, $n \in N$ баалоо туура болот).

Эми (3.3.1) теңдемени U3.3.2 шартта карайлы.

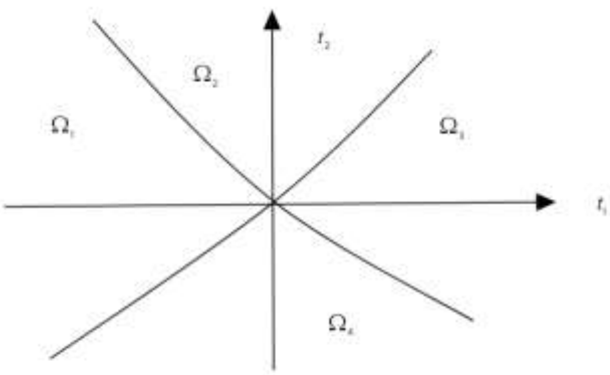
U3.3.2. U3.1.1, U3.1.2, U3.1.4, U3.1.5, U3.1.6 шартар аткарылсын. $\lambda(t)$ өздүк мааниси, T_0 чекитинде жөнөкөй нөлгө ээ болсун жана бул нол чыныгы окто жатсын.

Бул шартта U3.1.5 шартын эске алсак $T_0 \in [-t_0, t_0]$ болсо, анда $T_0 = 0$ болууга тийиш. Кийинки изилдөөлөрдө ушундай деп эсептейбиз. §3.1 де коюлган негизги маселе өзгөрүүсүз калат. маселени чечүү үчүн жогорудагыдай эле $F(t) = \int\limits_{-t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau$, $F_0(t) = \int\limits_{0}^{t} \lambda(\tau)d\tau$ функцияларды карайбыз.

$\operatorname{Re} F_0(t)$ функциянын

$$(p_0) = \{t \in D, \operatorname{Re} F_0(t) = 0\}$$

деңгээл сызыгы $(0;0)$ чекитинде бутактанат жана D областын төрт секторго бөлөт (Сүрөт 3.3.5) $(\Omega_j, j = 1,2,3,4)$.



Сүрөт 3.3.5 D областынын секторлорго бөлүнүшү

U3.1.5 шартты колдонуу аркылуу төмөндөгү катыштардын орун аларын далилдөөгө болот

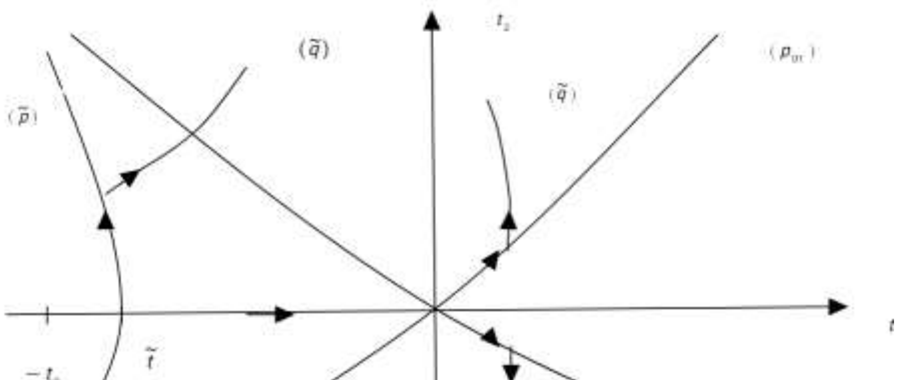
$$\forall t \in \Omega_1 \cup \Omega_3 \left(\operatorname{Re} F_0(t) \geq 0\right),$$

$$\forall t \in \Omega_2 \cup \Omega_4 \left(\operatorname{Re} F_0(t) \leq 0\right). \qquad (3.3.9)$$

Барабардык белгилер (p_{01}), (p_{02}) бутактарда гана орун алат. Изилдөөлөр көрсөткөйдөй (3.3.1) теңдеменин чечимин чектелген болушу $\operatorname{Re} F_0(t)$ функция өспөөчү жолдордун жашашы камсыз кылат. (3.3.1) теңдеменин чечимин асимптотикалык жүрүшүн изилдөөдө жогорудагы методдор колдонулуп, баалоолор, эсептөөлөр кайталангандыктан, аларга токтолбостон $\operatorname{Re} F_0(t)$ функция өспөөчү болгон жолдорду жана аларга жараша чечимди ТО көрсөтөбүз.

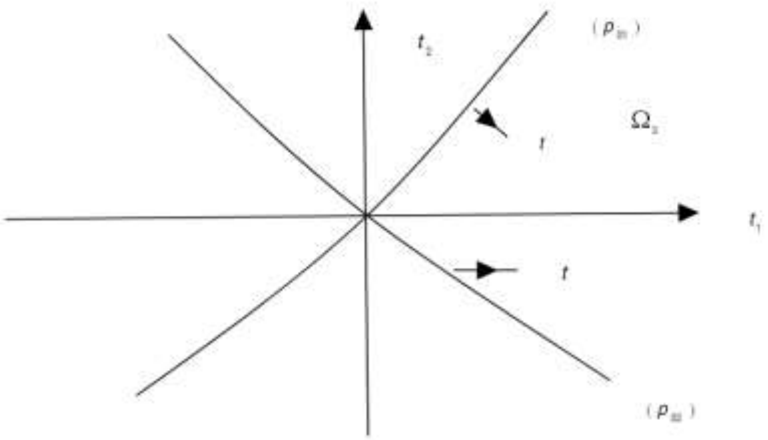
$\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_4$ областарын карайлы. (3.3.9) шартка ылайык $(-t_0, 0)$ чекитинен $\operatorname{Re} F_0(t)$ өспөөчү болгон жолдор жашайт. Мисалы, $\forall t \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_4$ үчүн жолду сүрөттөгүдөй тандаса тандаса болот. Жолдорду мындай тандоо менен Ω_3 секторун чектеген (p_{01}) жана (p_{02}) бутактарга чейин жете алабыз.

Эгерде $t \in \Omega_3$ болсо, анда (p_{01}) же (p_{02}) бутактардан t чекитин туташтырып, $\operatorname{Re} F_0(t)$ өспөөчү болгон, жол жашабайт (Сүрөт 3.3.6)

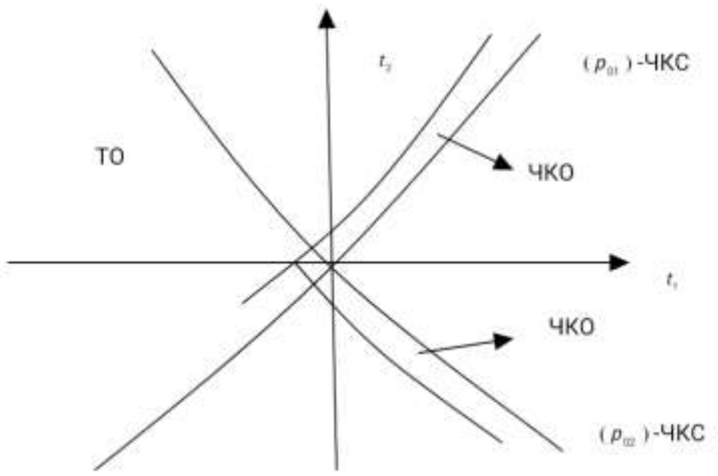


Сүрөт 3.3.6 Жолдордун тандалышы

Демек, чечим $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_4$ областарында чектелген болот. Ал эми (p_{01}), (p_{02}) бутактарынын Ω_3 секторун чектеген катмары ЧКС, ал эми $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ областын калган бөлүктөрү ТО болот (Сүрөт 3.3.7)



Сүрөт 3.3.7 Ω_3 секторуна жол



Сүрөт 3.3.8 ЧКО, ТО

Жыйынтык: Каралып жаткан учурда туруктуулуктун жоголушунун узартылышы кубулушу орун албайт.

Айрым учурларда, $\lambda(t)$ өздүк мааниси, D областа полюстарга ээ болгондо, туруктуулуктун жоюлушунун узартылышы жана бул кубулуш орун алган интервалды узартуу мүмкүнчүлүктөр [57]эмгекте каралган.

Эгерде $\lambda(t)$ өздүк мааниси жорума бөлүктөн турса, анда бүткүл сан огу туруктуу болот. Мындай учур [] каралган.

3 - бап боюнча корутунду

Эгерде өздүк маанинин нөлү жок болсо, анда кичине козголуунун таасири байкалбайт. Тактап айтканда туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушу орун алат.

Ал эми өздүк маанинин нөлү тегиздикте жатса, кичине козголуу жок болсо, анда туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушу орун алып, $t \in [-t_0, t_0]$ аралыгында $(-t_0)$ сол жакка карай жылдыруу менен, (t_0) оң жакка карай жылып, тартылуу областын кеңейтирүүгө болот. Кичине козголуу бар болсо, туруктуулуктун узартылыш кубулушу орун алып, бирок бул учурда туруктуулуктун жоюлушунун интервалы өзгөрбөйт.

Өздүк маанин нөлү сан огунда жатса, анда кичине козголуу болбосо, туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушу орун алып, $t \in [-t_0, t_0]$ аралыгында $(-t_0)$ сол жакка карай жылдыруу менен, (t_0) оң жакка карай жылып, тартылуу областын кеңейтирүүгө болот. Кичине козголуу бар болсо, туруктуулуктун жоголуусунун узартылыш кубулуу орун албайт.

Кичине козголуу жок болуп, бирок деңгээл сызыктар тегиздикте жана сан огунда бутактанып же бутактанбаган учурлардагы туруктуулуктун жоголушунун узартылышы кубулушу орун алары далилденди. Ага ылайык интервалды кеңейтирип алууга болору көрсөтүлүп, мисалдар келтирилди.

4 БАП. ЭКИ ЭСЕЛҮҮ ӨЗДҮК МААНИ

§4.1. Эки эселүү комплекстүү өздүк маани

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = D(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon[h(t) + f(t, x(t,\varepsilon))], \tag{4.1.1}$$

$$x(-t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\,,\ \|x^0(\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \tag{4.1.2}$$

карайлы. Мында $0 < \varepsilon << 1$ - кичине параметр, $[-t_0, t_0]$ - чыныгы октогу кесинди, $h(t) = colon(h_1(t), h_2(t))$, $x(t,\varepsilon) = colon(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon))$, $x(t,\varepsilon)$ - изделүүчү белгисиз функция, $x(t_0,\varepsilon) = colon(x_1^0(\varepsilon), x_2^0(\varepsilon))$, $D(t) = \begin{pmatrix} \lambda(t) & 0 \\ 0 & \lambda(t) \end{pmatrix}$, $f(t,x) = colon(f_1(t,x), f_2(t,x))$.

Төмөнкү шарттар аткарылсын:

U 4.1.1. $\forall(t,x) \in H_0$: $f(t,x) \in \Phi(S_r)$, $\Phi(S_r)$ - аналитикалык функциялардын мейкиндиги, $f(t,0) \equiv 0$; $\|f(t,\tilde{x}) - f(t,\tilde{\tilde{x}})\| \le M \cdot \|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|$ мында $0 < M$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес туррактуу сан.

U4.1.2. U3.1.2, U3.1.4, U3.1.5, U3.1.6 шарттар аткарылсын. $\lambda(t)$ өздүк мааниси тегиздикте жөнөкөй нөлгө ээ болсун.

(4.1.1) системасынан $\varepsilon = 0$ болгон учурда

$$D(t)\tilde{x}(t,0) = 0\,. \tag{4.1.3}$$

Негизги маселе: U4.1.1, U4.1.2 шартта (4.1.1)-(4.1.2) маселенин чечими болгон $x(t,\varepsilon)$ функциясынын асимптотикасын D_1 областында баалоо.

Кичине козголуу $\varepsilon h(t)$ чечимдин туруктуулугунун жоголушунун узартылыш кубулушуна тийгизген таасири изилденет.

I. Кичине козголуу $\varepsilon h(t) \ne 0$ болсун.

$F(t) = \int\limits_{-t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau$ $F_0(t) = \int\limits_{T_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau$ функцияларды аныктайлы. Анда

$F(t) = F_0(t) - F_0(-t_0)$ болот. $F_0(t)$ функция $t = T_0$ чекитинде эки эселүү нөлгө ээ болот. Бул чекитте $\operatorname{Re}F(t)$, $\operatorname{Im}F(t)$ функциялардын деңгээл сызыктары бутактанат. (§3.2, Сүрөт 3.3.1).

Жалпылыкты бузбастан (p_0) дун бутактары $(-t_0,0)$, $(t_0,0)$ чекиттери аркылуу өтөт деп эсептейли. (p_0) деңгээл сызыгынын бутактары жана $[-t_0,t_0]$ кесинди менен чектелген областы D_1 деп белгилейли.

$(p_0^{-\varepsilon}) = \{t \in D_1, \operatorname{Re}F_0(t) = \varepsilon \ln \varepsilon\}$ деңгээл сызыгын аныктайлы. (p_0) дун бутактары жана $(p_0^{-\varepsilon})$ деңгээл сызыгы менен чектелген областы $D_{1\varepsilon}$, $D_1 \setminus D_{1\varepsilon} = D_{11}$ деп белгилейли (§3.2, Сүрөт 3.3.2).

(p_{01}) бутактан $A_1(+\gamma_1\varepsilon^\beta, -T_{02} + \gamma_2\varepsilon^\beta)$, (p_{02}) бутактан $A_2(-\gamma_3\varepsilon^\beta, -T_{02} + \gamma_4\varepsilon^\beta)$ чекиттерди алалы, мында γ_j - ε дон көз каранды эмес, кандайдыр бир оң сандар, $0 < \beta < 1$.

$$(q_{1\varepsilon}) = \{t \in D_1, \operatorname{Im}F_0(t) = \operatorname{Im}F_0((\gamma_1 + i(-T_{02} + \gamma_2))\varepsilon^\beta\},$$

$$(q_{2\varepsilon}) = \{t \in D_1, \operatorname{Im}F_0(t) = \operatorname{Im}F_0((-\gamma_2 + i(-T_{02} + \gamma_4)\varepsilon^\beta)\},$$

деңгээл сызыктарын жүргүзөлү. (Сүрөт 3.3.3).

$(q_{1\varepsilon})$, $(q_{2\varepsilon})$ сызыктар $(p_0^{-\varepsilon})$ сызыгы менен тиешелеш түрдө $A_3(\gamma_5 + i(\gamma_6 + T_{02})\varepsilon^\beta)$, $A_4(-\gamma_7 + i(\gamma_8 - T_{02})\varepsilon^\beta)$ (γ_j $(j = 5,6,7,8) > 0)$ сандар) чекиттерде кесилишсин (§3.2, Сүрөт 3.3.3).

Бул деңгээл сызыктар жана жогоруда аныкталган деңгээл сызыктар аркылуу D_1 областы бир нече бөлүктөргө бөлүнөт (§3.2, Сүрөт 3.3.4).

$$(p_1) = \{t \in D_1, \operatorname{Re}F_0(t) = p_1 - const \wedge \varepsilon \text{ дөн көз каранды эмес}\},$$

$$(q_1) = \{t \in D_1, \operatorname{Im}F_0(t) = q_1 - const \wedge \varepsilon \text{ дөн көз каранды эмес}\},$$

деңгээл сызыктарын аныктайлы.

$[-t_0, T_{10}]$ - кесинди, (p_{02}) $[-t_0, A_6]$, (q_1) $[A_6, A_7]$, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[A_7, T_{10}]$ менен чектелген область D^1; $[T_{10}, T_{11}]$ - кесинди, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[T_{10}, A_7]$, (q_1) $[A_7, A_8]$, (p_1) $[A_8, T_{11}]$ аркылуу чектелген область D^2; $[T_{11}, T_{12}]$ - кесинди (p_1) $[T_{11}, T_{12}]$ менен чектелген область D^3; $(p_0^{-\varepsilon})$ $[A_7, A_4]$, $(q_{2\varepsilon})$ $[A_4, A_5]$, (p_1) $[A_5, A_8]$, (q_1) $[A_7, A_8]$ лер менен чектелген область D^4; (p_{02}) $[A_6, A_3]$, $(q_{2\varepsilon})$ $[A_3, A_4]$, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[A_4, A_7]$, (q_1) $[A_7, A_6]$ чектеген область D^5; $[T_{12}, T_{13}]$ - кесинди, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[T_{13}, A_4]$, $(q_{2\varepsilon})$ $[A_4, A_5]$, (p_1) $[A_5, T_{12}]$ чектеген область D^6 ; (p_{02}) $[A_3, -T_{02}]$, (p_{01}) $[-T_{02}, A_1]$, $(q_{1\varepsilon})$ $[A_1, A_2]$, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[A_2, A_4]$, $(q_{2\varepsilon})$ $[A_4, A_3]$ чектеген область D^7; (p_{01}) $[A_1, t_0]$, $[T_{13}, t_0]$ - кесинди, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[T_{13}, A_2]$, $(q_{1\varepsilon})$ $[A_2, A_1]$ - чектеген область D^8 болсун.

(4.1.1)-(4.1.2) маселесин интегралдык теңдеме менен алмаштырабыз:

$$x(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-t_0}^{t} D(s)ds\right) + \int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} D(s)ds\right)\cdot\left[h(\tau) + f(\tau, x(\tau,\varepsilon))\right]d\tau . \qquad (4.1.4)$$

(4.1.4) маселесин скалярдык формада жазалы:

$$x_1(t,\varepsilon) = x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right) + \int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t) - F(\tau)\right)\right)\cdot h_1(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t) - F(\tau)\right)\right)\cdot f_1(\tau, x_1(\tau,\varepsilon), x_2(\tau,\varepsilon))d\tau , \qquad (4.1.5)$$

$$x_2(t,\varepsilon) = x_2^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}F(t)\right) + \int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t) - F(\tau)\right)\right)\cdot h_2(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t) - F(\tau)\right)\right)\cdot f_2(\tau, x_1(\tau,\varepsilon), x_2(\tau,\varepsilon))d\tau .$$

(4.1.5) маселесин удаалаш жакындашуу усулунун жардамында чечебиз. Удаалаш жакындашууларды төмөнкүчө аныктайбыз:

$$x_{10}(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$x_{20}(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$x_{11}(t,\varepsilon) = x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}F(t)\right) + \int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t)-F(\tau)\right)\right)\cdot h_1(\tau)d\tau\,,$$

$$x_{21}(t,\varepsilon) = x_2^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}F(t)\right) + \int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t)-F(\tau)\right)\right)\cdot h_2(\tau)d\tau\,, \qquad (4.1.6)$$

$$x_{1n}(t,\varepsilon) = x_{11}(t,\varepsilon) + \int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t)-F(\tau)\right)\right)\cdot f_1(\tau, x_{1n-1}(\tau,\varepsilon), x_{2n-1}(\tau,\varepsilon))d\tau\,,$$

$$x_{2n}(t,\varepsilon) = x_{21}(t,\varepsilon) + \int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t)-F(\tau)\right)\right)\cdot f_2(\tau, x_{1n-1}(\tau,\varepsilon), x_{2n-1}(\tau,\varepsilon))d\tau\,,$$

мында $n \in N$.

(4.1.6) жакындашууларды D^j ($j = 1,...,8$) областарда баалайлы. Баардык жакындашуулар үчүн интегралдоонун жолдору бирдей болот: жол $(p_{02})\cup(p_{01})[-t_0,\tilde{t}\,]$, (q) $[\tilde{t},t]$ бөлүктөрдөн турат.

1). $t \in D^1 \cup D^5 \cup D^7 \cup D^8$ болсо, биринчи жакындашууда $x^0\exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right)$ мүчө аныктоочу, ал эми $\int_{-t_0}^{t} h_1(\tau)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau$ мүчө чектелген болот. Натыйжада

$|x_1| \le M_{11}$, $t \in D^1 \cup D^5 \cup D^7 \cup D^8$,

баалоого ээ болобуз.

2). $t \in D^2 \cup D^4 \cup D^6$ болсун. Бул учурда $x^0\exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right)$ мүчө ε^n ($n \in N$) тартипте болуу менен мааниге ээ болбойт. Ал эми $J_1(t) = \int_{-t_0}^{t} h_1(\tau)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau$ мүчө аныктоочу болуу менен бул областардын ар биринде түрдүүчө асимптотикалык баалоолорго ээ болот.

Төмөндөгүдөй баалоолорго ээ болобуз:

$|J_1(t)| \le M_{12}\varepsilon$, $t \in D^2$;

$$\left|J_1(t)\right| \le N_{13}\varepsilon^{1-\beta},\ t \in D^4 \cup D^6.$$

Аналогиялуу түрдө

$$\left|J_2(t)\right| \le M_{12}\varepsilon,\ t \in D^2;$$

$$\left|J_2(t)\right| \le N_{13}\varepsilon^{1-\beta},\ t \in D^4 \cup D^6.$$

мында $J_2(t) = \int\limits_{-t_0}^{t} h_2(\tau)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau$.

Кийинки баалоолорду жүргүзүүнүн алдында алгач $t \in (p_{02}) \cup (p_{01})$ үчүн (4.1.4) теңдеменин чечими үчүн баалоону жүргүзүү максатка ылайыктуу болот. Ал үчүн $-t_0$, $t \in (p_{02}) \cup (p_{01})$ чекиттерин туташтырган ийиринин узундугун s деп белгилесек, анда удаалаш жакындашуулар үчүн төмөндөгүдөй баалоолорду алууга болот:

$$\left\|x_2(t,\varepsilon)\right\| \le M_{11} + M_{11}M_{14}s,$$

$$\left\|x_3(t,\varepsilon)\right\| \le M_{11} + M_{11}\cdot\frac{(M_{14}s)^2}{2!}, \tag{4.1.7}$$

$$\dots\ \dots\ \dots,$$

$$\left\|x_n(t,\varepsilon)\right\| \le M_{11}\left(1+\dots+\frac{(M_{14}s)^{n-1}}{(n-1)!}\right),\ n=1,2,\dots.$$

(4.1.7) баалоодон

$$\left\|x_n(t,\varepsilon)\right\| \le M_{11}\exp(M_{14}s) \le M_{11}\exp(M_{14}s_0),$$

келип чыгат.

$$\left\|x_n(t,\varepsilon)\right\| \le M_{11}\exp(M_{14}s) \le M_{11}\exp(M_{14}s_0) \le M_0$$

барабарсыздык аткарылат деп эсептейбиз. Анда $f(t,x)$ функциясы үчүн (U4.1.1) шарты аткарылат. Удаалаш жакындашуулардын бир калыпта жыйналуучулугу мурда каралган учурдагыдай эле далилденет.

Демек, $\forall t \in (p_{01}) \cup (p_{02})$ үчүн (4.1.4) теңдеменин $x(t,\varepsilon)$ чечими жашап ал үчүн

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le M_5 \le M_0, \; t \in (p_{01}) \cup (p_{02}), \tag{4.1.8}$$

баалоо туура болот.

$t \in \overset{8}{\cup} D_j$ $(j = 1,2,...8)$ үчүн (4.1.4) теңдемеде төмөндөгүдөй өзгөртүүнү аткаралы

$$x_1(t,\varepsilon) = x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right) + \int_{-t_0}^{t} [h_1(\tau) + f_1(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau = x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right) +$$

$$+ \int_{-t_0}^{\tilde{t}} [h_1(\tau) + f_1(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau + \int_{\tilde{t}}^{t} [h_1(\tau) + f_1(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau =$$

$$= \exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde{t})}{\varepsilon}\right)\left[x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{F(\tilde{t})}{\varepsilon}\right) + \int_{-t_0}^{\tilde{t}} [h_1(\tau) + f_1(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(\tilde{t})-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau\right] +$$

$$+ \int_{\tilde{t}}^{t} [h_1(\tau) + f_1(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau .$$

Акыркы алынган туюнтмадагы $[...]$ кашаанын ичиндеги туюнтма (4.1.4) теңдеменин биринчи компонентасынын $\tilde{t} \in (p_{01}) \cup (p_{02})$ болгондогу $x_1(\tilde{t},\varepsilon)$ чечими болуп эсептелет. Муну эске алсак

$$x_1(t,\varepsilon) = x_1(\tilde{t},\varepsilon)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde{t})}{\varepsilon}\right) + \int_{\tilde{t}}^{t} [h_1(\tau) + f_1(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau , \tag{4.1.9}$$

теңдемеге ээ болобуз.

(4.1.9) теңдемеге удаалаш жакындаштыруу методун колдонобуз. Удаалаш жакындаштырууларды төмөндөгүдөй аныктайбыз

$$x_{1n}(t,\varepsilon)=x_1(\tilde{t},\varepsilon)\exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde{t})}{\varepsilon}\right)+\int\limits_{\tilde{t}}^{t}[h_1(\tau)+f_1(\tau,x_{n-1})]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau, \tag{4.1.10}$$

$x_{10}(t,\varepsilon)\equiv 0$, $n=1,2,\ldots$.

(4.1.10) да $t\in D^1\cup D^5\cup D^7\cup D^8$ үчүн $|x_1(\tilde{t},\varepsilon)|\le M_{15}$ жана $\left|\exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde{t})}{\varepsilon}\right)\right|\le O(1)$, $t\in D^2\cup D^3\cup D^4\cup D^6$ болгондо $\left|\exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde{t})}{\varepsilon}\right)\right|=\exp\left(\frac{\operatorname{Re}F(t)}{\varepsilon}\right)\le \exp\ln\varepsilon=O(\varepsilon^n)$, $n\in N$. Тандалган жол боюнча $\operatorname{Re}F(t)$ кемүүчү болгондуктан $|x_1(t,\varepsilon)|$ деги интеграл чектелген болот. $t\in D^1\cup D^5\cup D^7\cup D^8$ болгондо

$$\forall m\in N\ \left(|x_{1n}(t,\varepsilon)|\le M_{16}\right), \tag{4.1.11}$$

баалоону алсак болот. $t\in D^2\cup D^3\cup D^4\cup D^6$ болсо $|x_1(t,\varepsilon)|\le M_{16}w(t,\varepsilon)$, мында $w(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon, t\in D^2\cup D^3,\\ \varepsilon^{1-p}, t\in D^4\cup D^6,\end{cases}$ баалоо туура болот (мындай баалоо [] эмгектерде да алынгандыктан толук далилдөөнү келтирбейбиз). Калган жакындашууларды баалоодо биринчи жакындашуу аныктоочу болгондуктан төмөндөгү баалоонун тууралыгы келип чыгат

$\forall m\in N\ \left(|x_{1n}(t,\varepsilon)|\le M_{16}w(t,\varepsilon)\right)$,

мында $w(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon, t\in D^2\cup D^3;\\ \varepsilon^{1-p}, t\in D^4\cup D^6.\end{cases}$.

Удаалаш жакындашуулардын жыйналуучулугу §3.1 дегидей эле далилденет. Натыйжада (4.1.10) же (4.1.4) теңдеменин чечими үчүн

$$|x_1(t,\varepsilon)|\le M_{16}w_1(t,\varepsilon), \tag{4.1.12}$$

баалоого ээ болобуз, мында

$$w_1(t,\varepsilon)=\begin{cases}1,\ t\in D^1\cup D^5\cup D^7\cup D^8;\\ \varepsilon,\ t\in D^2\cup D^3;\\ \varepsilon^{1-\beta},\ t\in D^4\cup D^6.\end{cases}$$

Аналогиялуу түрдө (4.1.12) баалоосу $|x_2(t,\varepsilon)|$ үчүн да орун алат.

Теорема далилденди.

Теорема 4.1.1. (4.1.4) теңдеме берилип, U4.1.1 шарт аткарылсын. Анда $D_1\subset D$ областа (4.1.4) теңдеменин $x(t,\varepsilon)$ чечими жашап, бул чечим үчүн (4.1.12) баалоо туура болот.

Мисалдар. 1).Комплекстүү эки эселүү $\lambda(t)=t+i$ өздүк мааниси, U4.1.2 шартын канаатандырып, тегиздикте жөнөкөй нөлгө ээ болот. Баштапкы чекит $t_0=-1$ чекити алынса, (4.1.1)-(4.1.2) маселесинин чечими $t=[t_0,T]=[-1,1]$ кесиндисинде изилденет. Тегиздиктин $(0,-1)$ чекити өздүк маанинин жөнөкөй нөлү.

2). $\lambda(t)=t-i$ эки эселүү комплекстүү өздүк мааниси, тегиздиктин $(0,1)$ чекитинде жөнөкөй нөлгө ээ болуп, U4.1.1 шартын канааттандырат.

II. Кичине козголуу $\varepsilon h(t)=0$ болсун.

(4.1.1)-(4.1.2) маселесинин чечимин кичине козголуу жок болгон учурда жазып:

$$x(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-t_0}^{t}D(s)ds\right)+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds\right)\cdot f\left(\tau,x(\tau,\varepsilon)\right)d\tau\,. \qquad (4.1.13)$$

(4.1.13) маселесин скалярдык формада жазалы:

$$x_1(t,\varepsilon)=x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right)+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t)-F(\tau)\right)\right)\cdot f_1(\tau,x_1,x_2)d\tau\,,$$

$$x_2(t,\varepsilon)=x_2^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}F(t)\right)+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t)-F(\tau)\right)\right)\cdot f_2(\tau,x_1,x_2)d\tau\,. \qquad (4.1.14)$$

(4.1.14) маселесин удаалаш жакындашуу усулунун жардамында чечебиз. Удаалаш жакындашууларды төмөнкүчө аныктайбыз:

$$x_{10}(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$x_{20}(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$x_{11}(t,\varepsilon)=x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}F(t)\right),$$

$$x_{21}(t,\varepsilon)=x_2^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}F(t)\right), \qquad (4.1.15)$$

$$x_{1n}(t,\varepsilon)=x_{11}(t,\varepsilon)+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t)-F(\tau)\right)\right)\cdot f_1(\tau,x_{1n-1}(\tau,\varepsilon),x_{2n-1}(\tau,\varepsilon))d\tau,$$

$$x_{2n}(t,\varepsilon)=x_{21}(t,\varepsilon)+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t)-F(\tau)\right)\right)\cdot f_2(\tau,x_{1n-1}(\tau,\varepsilon),x_{2n-1}(\tau,\varepsilon))d\tau,$$

мында $n\in N$.

T_0 чекити $\lambda(t)$ функциясынын жөнөкөй нөлү болсун б.а. $\lambda(T_0)=0 \wedge \lambda'(T_0)\neq 0$, $D=\{t\in C,|t|<r_0\}$ деп алалы. $T_0=T_{10}-iT_{20}$ ($T_{20}>0$) деп эсептейли. $F(t)=\int_{-t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau$, $F_0(t)=\int_{T_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau$ функцияларын аныктайлы.

$F(t)=F_0(t)-F(-t_0)$ барабардыгы туура болот. Барабардык $\int_{-t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau$ интегралга Кошинин теоремасын колдонуудан келип чыгат. $F_0(t)$ функциясы T_0 чекитинде эки эселүү нөлгө ээ болот жана

$$(p_0)=\{t\in D,\operatorname{Re}F_0(t)=0\},$$

деңгээл сызыгы бул чекитте бутактанат. Бутактар чыныгы окту $(-t_0;0)$, $(t_0;0)$ чекиттерде кесип өтөт десек, каралып өткөн учурга келебиз (Сүрөт 3.2.9).

(3.2.9) сүрөттөн кийин (p_0) - деңгээл сызыгынын бутактары жана $[-t_0, t_0]$ - кесиндиси менен чектелген областы D_1 деп белгилейли.

$$(p_{-\varepsilon}) = \{t \in D_1, \operatorname{Re} F_0(t) = -\varepsilon \ln \varepsilon\}$$

деңгээл сызыгы аркылуу $D_{1\varepsilon}$, D_{11} бөлүктөргө бөлөлү (Сүрөт 3.2.10).

(4.1.13) теңдемени D_1 областа жана чечимдин жашашын далилдөө, аны баалоону жүргүзүү үчүн интегралдоо жолдорун тандайбыз. Интегралдоонун жолу $(p_0)[t_0, \tilde{t}]$, $(q)[\tilde{t}, t]$ турат.

Мурда жүргүзүлгөн эсептөөлөрдү (4.1.15) удаалаш жакындашууларына кайталоо менен (4.1.13) теңдеменин чечими үчүн төмөнкү баалоону алабыз

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le M_6 \exp\left(\frac{\operatorname{Re} F(t)}{\varepsilon}\right),$$

же

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le M_6 \begin{cases} 1, \ t \in D_{1\varepsilon} \cup (p_0), \\ \varepsilon^n, \ \ t \in D_{11}. \end{cases} \qquad (4.1.16)$$

Төмөндөгүдөй теорема далилденди.

Т.4.1.2. U4.1.1-U4.1.2 шарттары аткарылсын. Анда кичине козголуу жок болгон учурда (4.1.1) – (4.1.2) маселесинин чечими жашап жалгыз болуп, (4.1.16) баалоосу орун алат.

Мисалдар. 1).Комплекстүү эки эселүү $\lambda(t) = t + i$ өздүк мааниси, U4.1.2 шартын канаатандырып, тегиздикте жөнөкөй нөлгө ээ болот. Баштапкы чекит $t_0 = -1$ чекити алынса, (4.1.1)-(4.1.2) маселесинин чечими $t = [t_0, T] = [-1,1]$ кесиндисинде изилденет. Тегиздиктин $(0,-1)$ чекити өздүк маанинин жөнөкөй нөлү. Мында $\varepsilon h(t) = 0$. $[-t_0, t_0]$ - аралыгын кеңейтирүү мүмкүнчүлүгү болот.

2). $\lambda(t) = t - i$ эки эселүү комплекстүү өздүк мааниси, тегиздиктин $(0,1)$ чекитинде жөнөкөй нөлгө ээ болуп, U4.1.1 шартын канааттандырат, кичине козголуу нөл болгон учурда $[-t_0, t_0]$ - аралыгын кеңейтирүүгө болот.

§4.2. Эки эселүү чыныгы өздүк маани

U4.2.1. U3.1.2, U3.1.4, U3.1.5, U3.1.6 шарттар аткарылсын. $\lambda(t)$ өздүк мааниси $t = T_0$ чекитинде сан огунда жаткан жөнөкөй нөлгө ээ болсун.

Кичине козголуу $\varepsilon h(t)$ чечимдин туруктуулугунун узартылыш кубулушуна тийгизген таасири изилденет.

I. Кичине козголуу $\varepsilon h(t) \equiv 0$ болсун.

$T_0 \equiv 0$ деп эсептейли. $F(t) = \int_{-t_0}^{t} \lambda(\tau) d\tau$, $F_0(t) = \int_{0}^{t} \lambda(\tau) d\tau$ функцияларды аныктайлы. Жогоруда белгиленгендей $F(t) = F_0(t) - F_0(-t_0)$, барабардык орун алат. $F_0(t)$ функция $t = 0$ чекитинде эки эселүү нөлгө ээ болот жана бул чекитте $\operatorname{Re} F_0(t)$, $\operatorname{Im} F_0(t)$ функциялардын деңгээл сызыктары бутактанат.

$F_0(t)$ функциясы U3.1.4 шартка ылайык D областында жалгыз гана (T_0) нөлгө ээ болгондуктан, $\operatorname{Re} F_0(t)$, $\operatorname{Im} F_0(t)$ функциялардын деңгээл сызыктары D областынын чек арасына жакындайт.

(p_0) деңгээл сызыктарынын бутактары $((p_{01}),(p_{02}))$ аркылуу D_1 областы төрт секторго бөлүнөт.

Областардын бөлүнүшү, алардын чиймелери §3.2 параграфында берилген.

(4.1.4) теңдемеге удаалаш жакындашуу методун колдонобуз. Удаалаш жакындашууларды баалоо жана алардын жыйналуучулугун далилдөө үчүн интегралдоо жолдорун тандайбыз. Интегралдоо жолдорун $(p(t))$ жана $(q(t))$

деңгээл сызыктарын же (t_0, t) чекиттерин туташтыруучу кесиндилердин жыйындысы катары аныктоого болот.

Бардык жакындашуулар үчүн баалоо өзгөрүүсүз калат. Анда удаалаш жакындашууларды баалоо жана алардын бир калыпта жыйналуучулугун далилдөө аркылуу (4.1.4) теңдеменин чечими үчүн төмөнкүдөй баалоого ээ болобуз.

$$\|x(t,\varepsilon)\| \leq M_6 \exp\left(\frac{\operatorname{Re} F(t)}{\varepsilon}\right),$$

же

$$\|x(t,\varepsilon)\| \leq M_6 \begin{cases} 1, \ t \in D_{01}^{\varepsilon} \cup D_2; \\ \varepsilon^n, \ \ t \in D_{00}. \end{cases} \qquad (4.2.1)$$

Жогоруда төмөнкү теорема далилденди.

Т.4.2.1. Эгерде U 4.1.1, U 4.1.3 шарттары аткарылса, анда кичине козголуу жок болгон учурда (4.1.1)-(4.1.2) маселесинин чечими $-[t_0, t_0]$ аралыгында жашап, жалгыз болуп (4.2.1) баалоосу орун алат.

II. Кичине козголуу $\varepsilon h(t) \neq 0$ болгон учур.

Бул шартта U3.1.5 шартын эске алсак $T_0 \in [-t_0, t_0]$ болсо, анда $T_0 = 0$ болууга тийиш. Кийинки изилдөөлөрдө ушундай деп эсептейбиз. Маселени чечүү үчүн жогорудагыдай эле $F(t) = \int_{-t_0}^{t} \lambda(\tau) d\tau$, $F_0(t) = \int_{0}^{t} \lambda(\tau) d\tau$ функцияларды карайбыз.

$\operatorname{Re} F_0(t)$ функциянын

$$(p_0) = \{t \in D, \operatorname{Re} F_0(t) = 0\}$$

деңгээл сызыгы $(0;0)$ чекитинде бутактанат жана D областын төрт секторго бөлөт (Сүрөт 3.3.5).

U3.1.5 шартты колдонуу аркылуу төмөндөгү катыштардын орун аларын далилдөөгө болот

$$\forall t \in \Omega_1 \cup \Omega_3 \left(\operatorname{Re} F_0(t) \geq 0\right),$$

$$\forall t \in \Omega_2 \cup \Omega_4 \left(\operatorname{Re} F_0(t) \leq 0\right). \tag{4.2.2}$$

Барабардык белгилер (p_{01}), (p_{02}) бутактарда гана орун алат. Изилдөөлөр көрсөткөндөй (4.1.4) теңдеменин чечимин чектелген болушу $\operatorname{Re} F_0(t)$ функция өспөөчү жолдордун жашашы камсыз кылат. (4.1.4) теңдеменин чечимин асимптотикалык жүрүшүн изилдөөдө жогорудагы методдор колдонулуп, баалоолор, эсептөөлөр кайталангандыктан, аларга токтолбостон $\operatorname{Re} F_0(t)$ функция өспөөчү болгон жолдорду жана аларга жараша чечимди ТО көрсөтөбүз.

$\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_4$ областарын карайлы. (4.2.2) шартка ылайык $(-t_0, 0)$ чекитинен $\operatorname{Re} F_0(t)$ өспөөчү болгон жолдор жашайт. Мисалы, $\forall t \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_4$ үчүн жолду сүрөттөгүдөй тандаса тандаса болот. Жолдорду мындай тандоо менен Ω_3 секторун чектеген (p_{01}) жана (p_{02}) бутактарга чейин жете алабыз.

Эгерде $t \in \Omega_3$ болсо, анда (p_{01}) же (p_{02}) бутактардан t чекитин туташтырып, $\operatorname{Re} F_0(t)$ өспөөчү болгон, жол жашабайт (Сүрөт 3.3.6)

Демек, чечим $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_4$ областарында чектелген болот. Ал эми (p_{01}), (p_{02}) бутактарынын Ω_3 секторун чектеген катмары ЧКС, ал эми $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ областын калган бөлүктөрү ТО болот (Сүрөт 3.3.7)

Жыйынтык: Каралып жаткан учурда туруктуулуктун жоголушунун узартылышы кубулушу орун албайт.

Мисал. Өздүк маани $\lambda(t) = t - 1$ $t \in [0, -1)$ аралыгында $\lambda(t) < 0$, ал эми $t = 1$ болсо $\lambda(1) = 0$, $t \in [1; 2]$ аралыгында $\lambda(t) > 0$. Мында кичине козголуу $\varepsilon h(t) \neq 0$, ал эми D областын H_0 аркылуу белгилеп алдык.

$t = t_1 + it_2$; $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ алуу менен комплекстүү тегиздикке көчөбүз. Мында t_1, t_2, τ_1, τ_2 - чыныгы өзгөрүлмөлөр. Анда

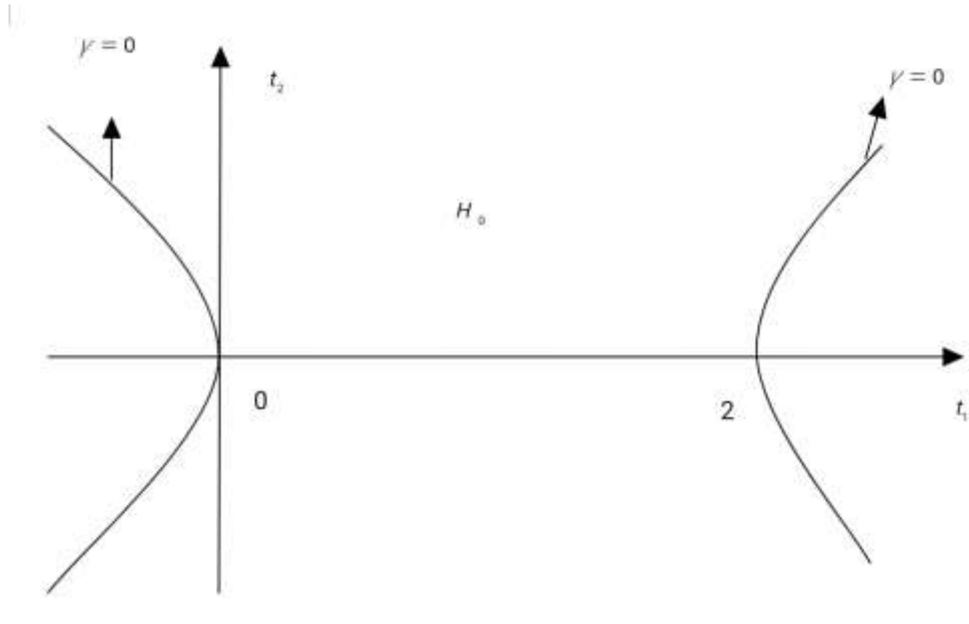
$$\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds = \int_{0}^{t} \lambda(s)ds = \frac{t^2}{2} - t = \frac{1}{2}\left[(t-1)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[(t_1-1)^2 - t_2^2 - 1\right] + it_2(t_1 - 1),$$

$$u(t_1, t_2) = \mathrm{Re}\int_{0}^{t} \lambda(s)ds = \frac{1}{2}\left[(t_1-1)^2 - t_2^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[t_1^2 - 2t_1 - t_2^2\right],$$

$$\vartheta(t_1, t_2) = \mathrm{Im}\int_{0}^{t} \lambda(s)ds = t_2(t_1 - 1).$$

$H_0 = \{(t_1; t_2) : \mathrm{Re}\, F(t_1, t_2) \le 0\}$ (Сүрөт 4.2.1.) областында

$$|A_1(t_1, t_2, \varepsilon)| = \left| x^0(\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{0}^{t_1 + it_2} (s-1)ds \right) \right| = O(\varepsilon).$$



Сүрөт 4.2.1. H_0 областы.

(4.1.5) удаалаш жакындашуулары чектелген чоңдук болуусу үчүн интегралдоо жолдору баштапкы чекиттен акыркы чекитке дейре кемүүчү болуусу керек. Бул шарт интегралдоо жолдоруна коюлган негизги талап болуп эсептелет.

$u(t_1,t_2)=\gamma$ $\left(\left(t_1^2-2t_1-t_2^2\right)=2\gamma\right)$ болсун. Мында γ - чыныгы сан. Эгерде $\gamma>0$ болсо, анда гиперболалар $u(t_1,t_2)=0$ критикалык сызыктын оң жагында жайгашат. Ал эми $-1<\gamma<0$ болсо, гиперболалар критикалык сызыктын сол тарабында жайгашат. Ошондой эле $\gamma=-1$ болсо, гиперболалар кубулуп $t_2=\pm(t_1-1)$ түздөрүнө ажырайт. Эгерде $\gamma<-1$ болсо, анда гиперболалар $t_2=\pm(t_1-1)$ түздөрүнүн үстүнкү(астынкы) бөлүктөрүндө жайгашат.

Каалаган $u(t_1,t_2)=\gamma$ гиперболалары үчүн $t_2=t_1-1$ же $t_2=-t_1+1$ түздөрү асимптота болушат.

Биз үчүн маселенин чечиминин $1\le t_1\le 2$ кесиндисиндеги асимптотикалык жүрүмүн изилдөө актуалдуу болуп саналат.

H_0 областын $H_0=H_1\cup H_2\cup H_3\cup H_4\cup H_5\cup H_6$ областарына бөлөбүз. H_1, H_2 областары $t_1\in[0,1)$ сан огун, H_4, H_5 областары $t_1\in[1,2]$ сан огун кармап, Ot_1 сан огуна карата, ал эми H_3, H_4 областары Ot_2 огуна карата симметриялуу болушуп, алтоосу тең чексиз туюк областар болушат.

$H_1=\{(t_1,t_2):(t_1,t_2)\in H_0, t_2\ge 0, 0\le t_1\le 1\}$ областы сол жактан $t_2=-t_1$

($-\infty<t_1\le 0$), оң жактан $t_2=-(t_1-1)$ ($-\infty<t_1\le 1$) жарым түздөрү менен чектелген чексиз область.

$H_2=\{(t_1,t_2):(t_1,t_2)\in H_0, t_2\le 0, 0\le t_1\le 1\}$ областы сол жактан $t_2=t_1$

($-\infty<t_1\le 0$), оң жактан $t_2=t_1-1$ ($-\infty<t_1\le 1$) жарым түздөрү менен чектелген чексиз область.

H_1 жана H_2 областары Ot_1 сан огуна карата симметриялуу болгондуктан, H_1 областы үчүн тандалган интегралдоо жолдору жана алынган баалоосу аналогиялуу түрдө H_2 областы үчүн орун алат.

$(t_1,t_2)\in H_1$ болсун. Анда баалоону сан огунда алып кою жетиштүү. Демек,

$$l_0 = \{(\tau_1, \tau_2): 0 \le \tau_1 \le 1, \tau_2 = 0\}.$$

$I(t,\varepsilon) = \int_0^t h(\tau)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t \lambda(s)ds\right)d\tau$ интегралында $|h(\tau)| = O(1)$ деп божомолдойлу. Анда $|I(t,\varepsilon)| = O(1)\int_l \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2))\right)|d\tau|$ интегралын баалайлы.

1). $l_0 = \{(\tau_1, \tau_2): 0 \le \tau_1 \le 1, \tau_2 = 0\}$, анда эки учур болот:

а). $0 \le t_1 < 1 - \sqrt{\varepsilon}$.

б). $1 - \sqrt{\varepsilon} \le t_1 \le 1$ болсун. Жалпысынан

$$|I(t_1,t_2,\varepsilon)| = O(1)\int_{l_0} \exp\left(\frac{u(t_1,0) - u(\tau_1,0)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

баалоосуна ээ болобуз.

Жыйынтыгында $(t_1,t_2) \in H_1$ областы үчүн

$$|x_1(t,\varepsilon)| \le C\sqrt{\varepsilon}\,. \tag{4.2.3}$$

H_1, H_2 областары Ot_1 сан огуна карата симметриялуу жайгашкандыктан, $(t_1,t_2) \in H_2$ областы үчүн да (3.3.1) баалоосу аткарылат.

$(t_1,t_2) \in H_6$ болсун. $H_6 = \{(t_1,t_2):(t_1,t_2) \in H_0, t_2 \ge 0, H_1 \cap H_5\}$ областын $H_6 = H_{06} \cup H_{16}$ областарына бөлүп алабыз. Анда

$$H_{06} = \{(t_1,t_2):(t_1,t_2) \in H_6, t_1 \le 1\},\ H_{16} = \{(t_1,t_2):(t_1,t_2) \in H_6, t_1 \ge 1\}.$$

$(t_1,t_2) \in H_{06}$ болсун, анда l_0 интегралдоо жолу сакталат. Анда

1). $l_1 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_1 = 1, 0 \le \tau_2 \le \sqrt{\varepsilon}\}$, интегралдап,

$$|I(t_1,t_2,\varepsilon)| = O(1)\int_{l_1} \exp\left(\frac{u(1,t_2) - u(1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O(1)\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(\frac{\tau_2^2 - t_2^2}{2\varepsilon}\right)d\tau_2 = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

2). $l_2 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = -\tau_1 + 1 + \sqrt{\varepsilon}, -\infty > \tau_1 \ge 1\}$, анда l_2 - жолу солдон оң багытты карай жүргөндө өсүүчү, оң багыттан сол багытты карай жүргөндө кемүүчү болот. Демек, $b - const$, $-\infty < b < 1$ жана баалоо b чоңдугунан көз каранды болбогондуктан

$$\left|I(t_1,t_2,\varepsilon)\right| = O(1)\int_{l_2} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2) - u(\tau_1,-\tau_1+1+\sqrt{\varepsilon})}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right).$$

3). Ал эми $l_3 = \left\{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = t_2, -t_2+1+\sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le t_1\right\}$ болсо, эки учур болот:

а). $-t_2 + 1 + \sqrt{\varepsilon} \le t_1 < 1 - \sqrt{\varepsilon}$.

б). $1 - \sqrt{\varepsilon} \le t_1 \le 1$.

$$\left|I(t_1,t_2,\varepsilon)\right| = O(1)\int_{l_5} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right).$$

$(t_1,t_2) \in H_{16}$ болсун, анда l_0 , l_1 интегралдоо жолу сакталат.

1). Ал эми $l_4 = \left\{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = \tau_1 - 1 + \sqrt{\varepsilon}, 1 \le \tau_1 < +\infty\right\}$, мындан $b - const$, $1 < b < +\infty$ үчүн

$$\left|I(t_1,t_2,\varepsilon)\right| = O(1)\int_{l_4} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right).$$

2). $l_5 = \left\{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = t_2, t_1 \ge \tau_1 \ge t_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon}\right\}$. Мында эки учур болот:

а). $1 + \sqrt{\varepsilon} > t_1 > t_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon}$.

б). $1 \ge t_1 \ge 1 + \sqrt{\varepsilon}$. Жыйынтыгында

$$\left|I(t_1,t_2,\varepsilon)\right| = O(1)\int_{l_7} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right).$$

Жыйынтыгында $(t_1,t_2) \in H_6$ областындагы чекиттердин көптүгү үчүн (3.3.1) баалоосуна барабар болгон баалоо алынат. Ал баалоо $(t_1,t_2) \in H_3$ чекиттеринин көптүгү үчүн да орун алат.

$H_4 = \{(t_1,t_2): (t_1,t_2) \in H_0, t_2 \le 0, 1 \le t_1 \le 2\}$ областы сол жактан $t_2 = -t_1 + 1$

($1 \le t_1 < +\infty$), оң жактан $t_2 = -t_1 + 2$ ($2 \le t_1 < +\infty$) жарым түздөрү менен чектелген чексиз область.

$H_5 = \{(t_1, t_2) : (t_1, t_2) \in H_0, t_2 \ge 0, 1 \le t_1 \le 2\}$ областы сол жактан $t_2 = t_1 - 1$ ($1 \le t_1 < +\infty$), оң жактан $t_2 = t_1 - 2$ ($2 \le t_1 < +\infty$) жарым түздөрү менен чектелген чексиз область.

Ал эки областын кесилүүсү үчүн: $H_1 \cap H_2 = [1,2]$ орун алат. H_4 , H_5 - областары Ot_1 сан огуна карата симметриялуу болуп, экөөсү тең чексиз туюк областар болушат.

Маселенин чечимин H_5 туюк областында баалайбыз. H_4 областындагы интегралдоо жолдору H_5 областындагы интегралдоо жолдоруна симметриялуу болгондуктан аналогиялуу түрдө H_4 областында да баалоо алынат. Ал үчүн эң оболу H_5 туюк областында кемүүчү болгон интегралдоо жолдорун аныктап алабыз.

Демек, $+\infty$ чексиздиктен (τ_1, τ_2) чекиттерине дейре түшүүчү $t_2 = t_1 - 2$ түзүн карайбыз. Анда $\tau_2 = t_2$, $\tau_1 = t_2 + 2$, (t_1, t_2) - H_5 областынын акыркы чекити. $\tau_2 = \tau_1 - 2$ түзүндө баштапкы чекиттен $(2,0)$ чекитине чейинки ($\tau_1 = +\infty$, $\tau_2 = \tau_1 - 2 = +\infty$) жолу өсүүчү болот.

Жогоруда H_5 областынын чектеген жарым түз сызыктарын карадык. Бул жерде областа $t_2 = t_1 - 1$ ($1 \le t_1 < +\infty$) түзү асимптота болгондуктан H_{16} областындагы деңгээл сызыктар H_5 областагы деңгээ сызыктарга өтө албайт. Ошондой эле бул областка өтүүчү кемүүчү болгон чектүү аралыктан өтүүчү интегралдоо жолу жашабайт.

Демек, $t_1 \in [1,2]$ туруксуз аралыгын кармаган областка баруучу кемүүчү болгон интегралдоо жолу жок. Мына ошол себептүү, бул учурда туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушу орун албайт.

§4.3 Комплекстүү түйүндөш өздүк маанилер

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=K(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon[h(t)+f(t,x(t,\varepsilon))], \qquad (4.3.1)$$

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\,,\ \left\|x^0(\varepsilon)\right\|=O(\varepsilon), \qquad (4.3.2)$$

маселесин карайлы. Мында $0<\varepsilon<<1$ - кичине параметр, $[-t_0,t_0]$ - чыныгы октогу кесинди, $x(t,\varepsilon)$ - изделүүчү белгисиз функция жана $x(t,\varepsilon)=colon(x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon))$, $h(t)=colon(h_1(t),h_2(t))$
$f(t,x(t,\varepsilon))=colon\big(f_1(t,x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon)),f_2(t,x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon))\big)$, $K(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t) & 0\\ 0 & \lambda_2(t)\end{pmatrix}$.

Төмөнкү шарт аткарылсын:

U 4.3.1. U4.1.1, U3.1.2, U3.1.4, U3.1.5, U3.1.6 шарттар аткарылсын. $\lambda_k(t)$ комплеекстүү түйүндөш өздүк маанилери $t=\pm T_0$ чекитинде жөнөкөй нөлдөргө ээ.

M. U 4.3.1 шартта (4.3.1)-(4.3.2) маселенин чечимин D областындагы асимптотикалык жүрүмүнө кичине козголуунун тийгизген таасирин изилдөө.

Кичине козголуу $\varepsilon h(t)\neq 0$ болсун.

Өздүк маанилер комплекстүү түйүндөш болгондуктан, $\lambda_1(t)$ комплекстүү өздүк маанисин изилдөө жетиштүү.

$F_1(t)=\int\limits_{-t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau \quad F_{10}(t)=\int\limits_{T_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau$ функцияларды аныктайлы. Анда

$F_1(t)=F_{10}(t)-F_{10}(-t_0)$ болот. $F_{10}(t)$ функция $t=T_0$ чекитинде эки эселүү нөлгө ээ болот. Бул чекитте $\operatorname{Re}F_1(t)$, $\operatorname{Im}F_1(t)$ функциялардын деңгээл сызыктары бутактанат. Учурдун сүрөттөлүшү §3.2 параграфынын Сүрөт 3.3.1 аналогиялуу болот.

Жалпылыкты бузбастан (p_0) дун бутактары $(-t_0,0)$, $(t_0,0)$ чекиттери аркылуу өтөт деп эсептейли. (p_0) деңгээл сызыгынын бутактары жана $[-t_0,t_0]$ кесинди менен чектелген областы D_1 деп белгилейли.

$\left(p_0^{-\varepsilon}\right)=\{t\in D_1, \operatorname{Re}F_{10}(t)=\varepsilon\ln\varepsilon\}$ деңгээл сызыгын аныктайлы. (p_0) дун бутактары жана $\left(p_0^{-\varepsilon}\right)$ деңгээл сызыгы менен чектелген областы $D_{1\varepsilon}$, $D_1\setminus D_{1\varepsilon}=D_{11}$ деп белгилейли. Бул учурда да сүрөт §3.2 параграфынын Сүрөт 3.3.2 сүрөтүнө аналогиялуу болот.

(p_{01}) бутактан $A_1(+\gamma_1\varepsilon^{\beta},-T_{02}+\gamma_2\varepsilon^{\beta})$, (p_{02}) бутактан $A_2(-\gamma_3\varepsilon^{\beta},-T_{02}+\gamma_4\varepsilon^{\beta})$ чекиттерди алалы, мында γ_j - ε дон көз каранды эмес, кандайдыр бир оң сандар, $0<\beta<1$.

$$(q_{1\varepsilon})=\{t\in D_1, \operatorname{Im}F_{10}(t)=\operatorname{Im}F_{10}((\gamma_1+i(-T_{02}+\gamma_2))\varepsilon^{\beta}\},$$

$$(q_{2\varepsilon})=\{t\in D_1, \operatorname{Im}F_{10}(t)=\operatorname{Im}F_{10}((-\gamma_2+i(-T_{02}+\gamma_4)\varepsilon^{\beta})\},$$

деңгээл сызыктарын жүргүзөлү. (Сүрөт 3.3.3). $(q_{1\varepsilon})$, $(q_{2\varepsilon})$ сызыктар $\left(p_0^{-\varepsilon}\right)$ сызыгы менен тиешелеш түрдө $A_3(\gamma_5+i(\gamma_6+T_{02})\varepsilon^{\beta})$, $A_4(-\gamma_7+i(\gamma_8-T_{02})\varepsilon^{\beta})$ (γ_j $(j=5{,}6{,}7{,}8)>0)$ сандар) чекиттерде кесилишсин. Сүрөттөлүшү §3.2 параграфынын Сүрөт 3.3.3 аналогиялуу болот.

Бул деңгээл сызыктар жана жогоруда аныкталган деңгээл сызыктар аркылуу D_1 областы бир нече бөлүктөргө бөлүнөт. Сүрөттөлүшү §3.2 параграфынын Сүрөт 3.3.4 аналогиялуу болот.

$$(p_1)=\{t\in D_1, \operatorname{Re}F_{10}(t)=p_1-const\wedge\varepsilon\,\text{дөн көз каранды эмес}\},$$

$$(q_1)=\{t\in D_1, \operatorname{Im}F_{10}(t)=q_1-const\wedge\varepsilon\,\text{дөн көз каранды эмес}\},$$

деңгээл сызыктарын аныктайлы.

$[-t_0,T_{10}]$ - кесинди, (p_{02}) $[-t_0,A_6]$, (q_1) $[A_6,A_7]$, $\left(p_0^{-\varepsilon}\right)$ $[A_7,T_{10}]$ менен чектелген область D^1; $[T_{10},T_{11}]$ - кесинди, $\left(p_0^{-\varepsilon}\right)$ $[T_{10},A_7]$, (q_1) $[A_7,A_8]$, (p_1) $[A_8,T_{11}]$ аркылуу чектелген область D^2; $[T_{11},T_{12}]$ - кесинди (p_1) $[T_{11},T_{12}]$ менен чектелген область D^3; $(p_0^{-\varepsilon})$ $[A_7,A_4]$, $(q_{2\varepsilon})$ $[A_4,A_5]$, (p_1) $[A_5,A_8]$, (q_1) $[A_7,A_8]$ лер менен чектелген область D^4; (p_{02}) $[A_6,A_3]$, $(q_{2\varepsilon})$ $[A_3,A_4]$, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[A_4,A_7]$, (q_1) $[A_7,A_6]$ чектеген область D^5; $[T_{12},T_{13}]$ - кесинди, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[T_{13},A_4]$, $(q_{2\varepsilon})$ $[A_4,A_5]$, (p_1) $[A_5,T_{12}]$ чектеген область D^6; (p_{02}) $[A_3,-T_{02}]$, (p_{01}) $[-T_{02},A_1]$, $(q_{1\varepsilon})$ $[A_1,A_2]$, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[A_2,A_4]$, $(q_{2\varepsilon})$ $[A_4,A_3]$ чектеген область D^7; (p_{01}) $[A_1,t_0]$, $[T_{13},t_0]$ - кесинди, $(p_0^{-\varepsilon})$ $[T_{13},A_2]$, $(q_{1\varepsilon})$ $[A_2,A_1]$ - чектеген область D^8 болсун.

(4.3.1)-(4.3.2) маселесин интегралдык теңдеме менен алмаштырабыз:

$$x(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-t_0}^{t}K(s)ds\right)+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K(s)ds\right)\cdot\left[h(\tau)+f(\tau,x(\tau,\varepsilon))\right]d\tau\,. \qquad (4.3.3)$$

(4.3.3) маселесин скалярдык формада жазалы:

$$x_1(t,\varepsilon)=x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{F_1(t)}{\varepsilon}\right)+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F_1(t)-F_1(\tau)\right)\right)\cdot h_1(\tau)d\tau+$$

$$+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F_1(t)-F_1(\tau)\right)\right)\cdot f_1(\tau,x_1(\tau,\varepsilon),x_2(\tau,\varepsilon))d\tau\,, \qquad (4.3.4)$$

$$x_2(t,\varepsilon)=x_2^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}F_2(t)\right)+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F_2(t)-F_2(\tau)\right)\right)\cdot h_2(\tau)d\tau+$$

$$+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F_2(t)-F_2(\tau)\right)\right)\cdot f_2(\tau,x_1(\tau,\varepsilon),x_2(\tau,\varepsilon))d\tau\,.$$

(4.3.4) маселесин удаалаш жакындашуу усулунун жардамында чечебиз. Удаалаш жакындашууларды төмөнкүчө аныктайбыз:

$$x_{10}(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$x_{20}(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$x_{11}(t,\varepsilon)=x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)\right)+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F_1(t)-F_1(\tau)\right)\right)\cdot h_1(\tau)d\tau\,,$$

$$x_{21}(t,\varepsilon) = x_2^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)\right) + \int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F_1(t) - F_1(\tau)\right)\right)\cdot h_2(\tau)d\tau\,, \qquad (4.3.5)$$

$$x_{1n}(t,\varepsilon) = x_{11}(t,\varepsilon) + \int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F_1(t) - F_1(\tau)\right)\right)\cdot f_1(\tau, x_{1n-1}(\tau,\varepsilon), x_{2n-1}(\tau,\varepsilon))d\tau\,,$$

$$x_{2n}(t,\varepsilon) = x_{21}(t,\varepsilon) + \int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F_1(t) - F_1(\tau)\right)\right)\cdot f_2(\tau, x_{1n-1}(\tau,\varepsilon), x_{2n-1}(\tau,\varepsilon))d\tau\,,$$

мында $n \in N$.

(4.3.5) жакындашууларды D^j ($j = 1,...,8$) областарда баалайлы. Баардык жакындашуулар үчүн интегралдоонун жолдору бирдей болот: жол $(p_{02}) \cup (p_{01})[-t_0, \tilde{t}\,]$, (q) $[\tilde{t}, t]$ бөлүктөрдөн турат.

1). $t \in D^1 \cup D^5 \cup D^7 \cup D^8$ болсо, биринчи жакындашууда $x^0\exp\left(\frac{F_1(t)}{\varepsilon}\right)$ мүчө аныктоочу, ал эми $\int_{-t_0}^{t} h_1(\tau)\exp\left(\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau$ мүчө чектелген болот. Натыйжада

$$|x_1| \le M_{11},\ t \in D^1 \cup D^5 \cup D^7 \cup D^8,$$

баалоого ээ болобуз.

2). $t \in D^2 \cup D^4 \cup D^6$ болсун. Бул учурда $x^0\exp\left(\frac{F_1(t)}{\varepsilon}\right)$ мүчө ε^n ($n \in N$) тартипте болуу менен мааниге ээ болбойт. Ал эми $J_1(t) = \int_{-t_0}^{t} h_1(\tau)\exp\left(\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau$ мүчө аныктоочу болуу менен бул областардын ар биринде түрдүүчө асимптотикалык баалоолорго ээ болот.

Төмөндөгүдөй баалоолорго ээ болобуз:

$|J_1(t)| \le M_{12}\varepsilon$, $t \in D^2$;

$|J_1(t)| \le N_{13}\varepsilon^{1-\beta}$, $t \in D^4 \cup D^6$.

Аналогиялуу түрдө

$\left|J_2(t)\right| \le M_{12}\varepsilon$, $t \in D^2$;

$\left|J_2(t)\right| \le N_{13}\varepsilon^{1-\beta}$, $t \in D^4 \cup D^6$.

мында $J_2(t) = \int\limits_{-t_0}^{t} h_2(\tau)\exp\left(\frac{F_2(t) - F_2(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau$.

Кийинки баалоолорду жүргүзүүнүн алдында алгач $t \in (p_{02}) \cup (p_{01})$ үчүн (4.3.3) теңдеменин чечими үчүн баалоону жүргүзүү максатка ылайыктуу болот. Ал үчүн $-t_0$, $t \in (p_{02}) \cup (p_{01})$ чекиттерин туташтырган ийиринин узундугун s деп белгилесек, анда удаалаш жакындашуулар үчүн төмөндөгүдөй баалоолорду алууга болот:

$$\left\|x_2(t,\varepsilon)\right\| \le M_{11} + M_{11}M_{14}s,$$

$$\left\|x_3(t,\varepsilon)\right\| \le M_{11} + M_{11}\cdot\frac{(M_{14}s)^2}{2!}, \qquad (4.3.6)$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots,$$

$$\left\|x_n(t,\varepsilon)\right\| \le M_{11}\left(1 + \ldots + \frac{(M_{14}s)^{n-1}}{(n-1)!}\right),\ n = 1,2,\ldots.$$

(4.3.6) баалоодон

$$\left\|x_n(t,\varepsilon)\right\| \le M_{11}\exp(M_{14}s) \le M_{11}\exp(M_{14}s_0),$$

келип чыгат.

$$\left\|x_n(t,\varepsilon)\right\| \le M_{11}\exp(M_{14}s) \le M_{11}\exp(M_{14}s_0) \le M_0$$

барабарсыздык аткарылат деп эсептейбиз. Анда $f(t,x)$ функциясы үчүн (U4.1.1) шарты аткарылат. Удаалаш жакындашуулардын бир калыпта жыйналуучулугу мурда каралган учурдагыдай эле далилденет.

Демек, $\forall t \in (p_{01}) \cup (p_{02})$ үчүн (4.3.3) теңдеменин $x(t,\varepsilon)$ чечими жашап ал үчүн

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le M_5 \le M_0,\ t \in (p_{01}) \cup (p_{02}), \tag{4.3.7}$$

баалоо туура болот.

$t \in \bigcup^{8} D_j$ $(j = 1,2,...8)$ үчүн (4.3.3) теңдемеде төмөндөгүдөй өзгөртүүнү аткаралы

$$x_1(t,\varepsilon) = x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right) + \int_{-t_0}^{t}[h_1(\tau) + f_1(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau = x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{F(t)}{\varepsilon}\right) +$$

$$+\int_{-t_0}^{\tilde{t}}[h_1(\tau) + f_1(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau + \int_{\tilde{t}}^{t}[h_1(\tau) + f_1(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau =$$

$$= \exp\left(\frac{F(t)-F(\tilde{t})}{\varepsilon}\right)\left[x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{F(\tilde{t})}{\varepsilon}\right) + \int_{-t_0}^{\tilde{t}}[h_1(\tau) + f_1(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(\tilde{t})-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau\right] +$$

$$+\int_{\tilde{t}}^{t}[h_1(\tau) + f_1(\tau,x)]\exp\left(\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau\,.$$

Акыркы алынган туюнтмадагы $[...]$ кашаанын ичиндеги туюнтма (4.3.3) теңдеменин биринчи компонентасынын $\tilde{t} \in (p_{01}) \cup (p_{02})$ болгондогу $x_1(\tilde{t},\varepsilon)$ чечими болуп эсептелет. Муну эске алсак

$$x_1(t,\varepsilon) = x_1(\tilde{t},\varepsilon)\exp\left(\frac{F_1(t)-F_1(\tilde{t})}{\varepsilon}\right) + \int_{\tilde{t}}^{t}[h_1(\tau) + f_1(\tau,x)]\exp\left(\frac{F_1(t)-F_1(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau, \tag{4.3.8}$$

теңдемеге ээ болобуз.

(4.3.8) теңдемеге удаалаш жакындаштыруу методун колдонобуз. Удаалаш жакындаштырууларды төмөндөгүдөй аныктайбыз

$$x_{1n}(t,\varepsilon) = x_1(\tilde{t},\varepsilon)\exp\left(\frac{F_1(t)-F_1(\tilde{t})}{\varepsilon}\right) + \int_{\tilde{t}}^{t}[h_1(\tau) + f_1(\tau,x_{n-1})]\exp\left(\frac{F_1(t)-F_1(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau, \tag{4.3.9}$$

$x_{10}(t,\varepsilon) \equiv 0,\ n = 1,2,...\,.$

(4.3.9) да $t \in D^1 \cup D^5 \cup D^7 \cup D^8$ үчүн $|x_1(\tilde{t}, \varepsilon)| \le M_{15}$ жана $\left|\exp\left(\frac{F_1(t) - F_1(\tilde{t})}{\varepsilon}\right)\right| \le O(1)$,

$t \in D^2 \cup D^3 \cup D^4 \cup D^6$ болгондо $\left|\exp\left(\frac{F_1(t) - F_1(\tilde{t})}{\varepsilon}\right)\right| = \exp\left(\frac{\operatorname{Re} F_1(t)}{\varepsilon}\right) \le \exp \ln \varepsilon = O(\varepsilon^n)$,

$n \in N$. Тандалган жол боюнча $\operatorname{Re} F_1(t)$ кемүүчү болгондуктан $|x_1(t,\varepsilon)|$ деги интеграл чектелген болот. $t \in D^1 \cup D^5 \cup D^7 \cup D^8$ болгондо

$$\forall m \in N \ \left(|x_{1n}(t,\varepsilon)| \le M_{16}\right), \tag{4.3.10}$$

баалоону алсак болот. $t \in D^2 \cup D^3 \cup D^4 \cup D^6$ болсо $|x_1(t,\varepsilon)| \le M_{16} w(t,\varepsilon)$, мында $w(t,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, t \in D^2 \cup D^3, \\ \varepsilon^{1-p}, t \in D^4 \cup D^6, \end{cases}$ баалоо туура болот (мындай баалоо [] эмгектерде да алынгандыктан толук далилдөөнү келтирбейбиз). Калган жакындашууларды баалоодо биринчи жакындашуу аныктоочу болгондуктан төмөндөгү баалоонун тууралыгы келип чыгат

$\forall m \in N \ \left(|x_{1n}(t,\varepsilon)| \le M_{16} w(t,\varepsilon)\right),$

мында $w(t,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, t \in D^2 \cup D^3; \\ \varepsilon^{1-p}, t \in D^4 \cup D^6. \end{cases}$.

Удаалаш жакындашуулардын жыйналуучулугу §3.1 дегидей эле далилденет. Натыйжада (4.1.10) же (4.1.4) теңдеменин чечими үчүн

$$|x_1(t,\varepsilon)| \le M_{16} w_1(t,\varepsilon), \tag{4.3.11}$$

баалоого ээ болобуз, мында

$$w_1(t,\varepsilon) = \begin{cases} 1, \ t \in D^1 \cup D^5 \cup D^7 \cup D^8; \\ \varepsilon, \ t \in D^2 \cup D^3; \\ \varepsilon^{1-\beta}, \ t \in D^4 \cup D^6. \end{cases}$$

Аналогиялуу түрдө (4.1.11) баалоосу $|x_2(t,\varepsilon)|$ үчүн да орун алат.

Теорема далилденди.

Теорема 4.3.1. U4.3.1 шарт аткарылсын. Анда $D_1 \subset D$ области (4.3.1) – (4.3.2) маселенин чечими жашап, жалгыз болуп, чечим үчүн (4.1.11) баалоо туура болот.

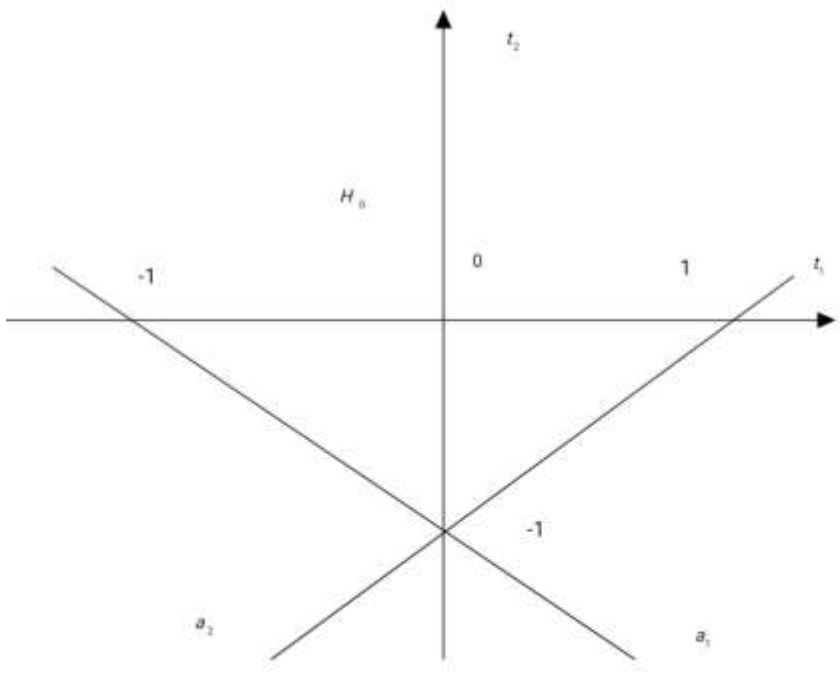
Мисал. $\lambda_k(t) = t \pm i$ өздүк маанилеринин чыныгы бөлүгү $t \in [t_0, T_0) = \; = [-1,0)$ болсо $\operatorname{Re}\lambda(t) < 0$, $t = T_0 = 0$ болсо, $\operatorname{Re}\lambda(T_0) = 0$, $t \in (T_0, T] = (0,1]$, $D_1 = H_0$ болсун.

Анда

$$H_0 = \{(t_1, t_2) : u(t_1, \pm t_2) \le 0\},$$

мында $u(t_1, \pm t_2) = \operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}(s \pm i)ds = \operatorname{Re}F_k(t_1 + it_2) = \dfrac{t_1^2 - (t_2 \pm 1)^2}{2}$.

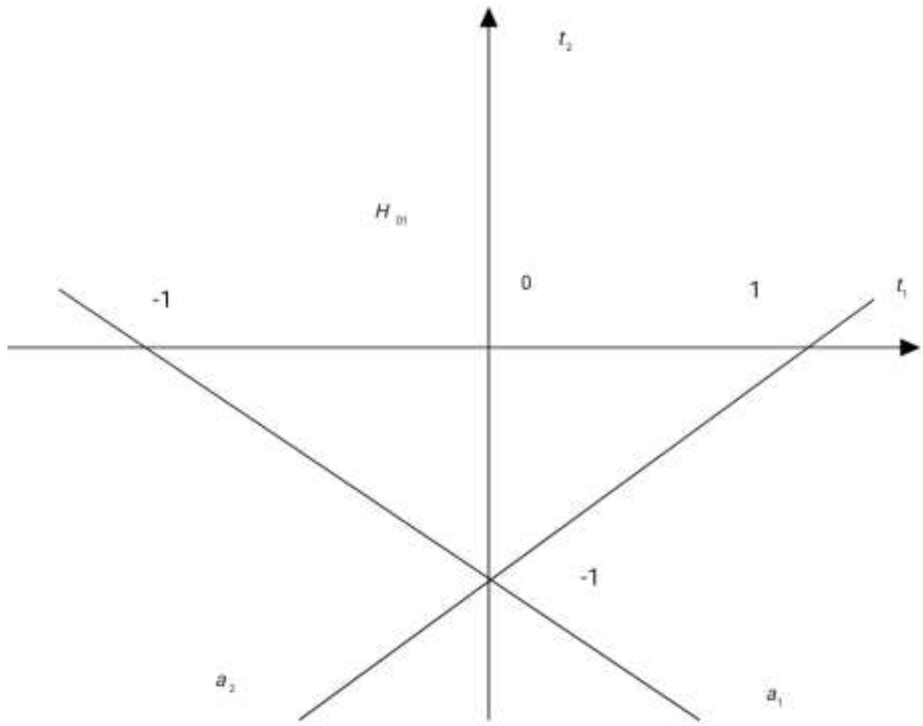
H_0 областында $\lambda_1(t) = t + i$ өздүк маанинин жөнөкөй нөлү тегиздикте $(0;-1)$ чекитинде жатат (Сүрөт 4.3.1). Баштапкы чекит туруктуу аралыктан тандалып, ал чекит катары $t_0 = -1$ чекити алынган. Туруктуу аралыктан туруксуз аралыкка өткөн чекит $T_0 = 0$, ал эми маселенин чечими изилденүүчү аралыктын акыркы чекити $T = 1$.



Сүрөт 4.3.1. H_0 областынын бир бөлүгү.

Сол багыттан оң багытка карай жүргөндө H_0 областынын чыныгы окко туура келген $t \in [T_0, T]$ бөлүгү туруксуз, $t \in [t_0, T_0)$ бөлүгү туруктуу аралык болуп калат. Ошол себептүү H_0 областын T_0 чекитине карата эки бөлүккө бөлөбүз. Анда $H_0 = H_{01} \cup H_{02}$, сүрөткө областын өздүк маанинин нөлү $(0,-1)$ чекитине туура келген бөлүгүн түшүрөбүз.

$H_{01} = \{(t_1, t_2) : u(t_1, \pm t_2) \le 0, -1 \le t_1 \le 0\}$ (Сүрөт 4.3.2).



4.3.2-чийме. H_{01} областынын бир бөлүгү

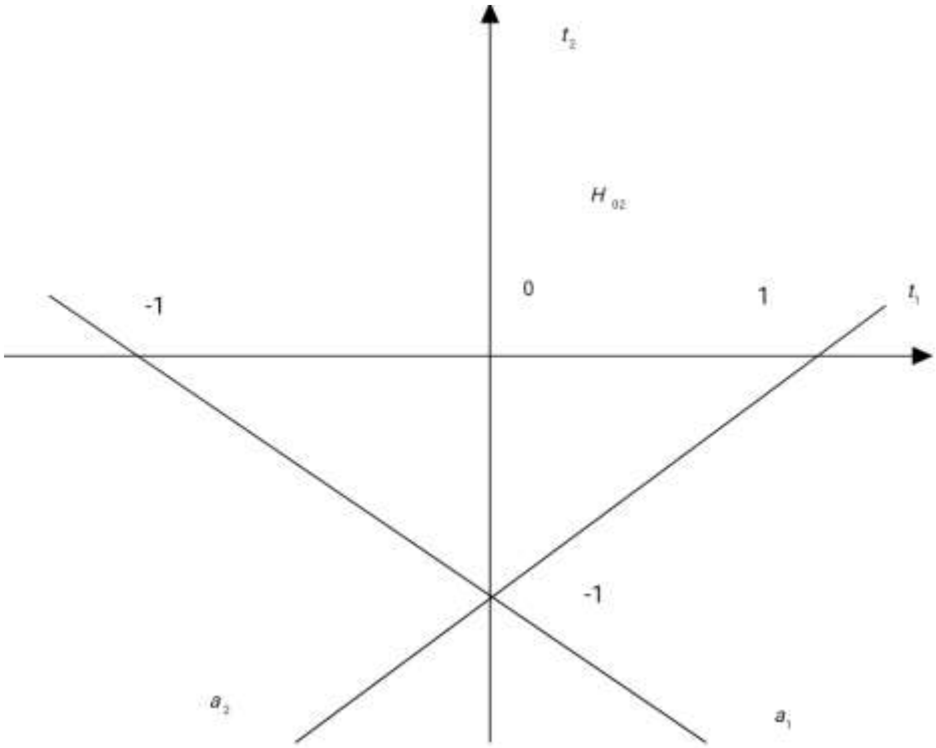
$H_{02} = \{(t_1, t_2) : u(t_1, \pm t_2) \le 0, 0 \le t_1 \le 1\}$ (4.3.3-чийме).

(4.3.5) удаалаш жакындашууларынан

$$|x_1(t,\varepsilon)| \le \left| x_1^0(\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^{t} (s+i) ds \right) + \int_{-1}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} (s+i) ds \right) \cdot h_1(\tau) d\tau \right|.$$

Же

$$|x_1(t_1, t_2, \varepsilon)| \le |x_1^0(\varepsilon)| \exp\left(\frac{u(t_1, t_2)}{\varepsilon} \right) + \int_{l} \exp\left(\frac{u(t_1, t_2) - u(\tau_1, \tau_2)}{\varepsilon} \right) \cdot |h_1(\tau)| \cdot |d(\tau_1 + i(\tau_1 + 1))|.$$



4.3.3-чийме. H_{02} областынын бир бөлүгү

Мындан

$$\left|A(t_1,t_2)\right| = \left|x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\right| = O(\varepsilon)\,,$$

мында $u(t_1,t_2) = \operatorname{Re} F(t) = \operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t_1+it_2}(s+i)ds = \dfrac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2}$.

$\left|h_1(\tau)\right| = O(1)$ деп божомолдоп,

$$\left|I_k(t_1,t_2,\varepsilon)\right| = O(1)\int\limits_{l_k}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot\left|d\tau\right|$$

функциясын l_k $(k\in N)$ жолу боюнча баалайбыз.

Интегралдоо жолдору кемүүчү болуп, бардык жакындашуулар үчүн өзгөрүүсүз сакталат.

$H_0 = H_{01}\cup H_{02}$ областында l интегралдоо жолдору боюнча

$$\left|I(t_1,t_2,\varepsilon)\right| = O(1)\int_l \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot\left|d\tau\right|,$$

интегралын баалабыз.

$(t_1,t_2)\in H_{01}$ болсун. Анда: $l = l_0 \cup l_1 \cup l_2$,

$l_0 = \{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = 0, -1-\sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le -1\}$,

$l_1 = \{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = -\tau_1 - 1 - \sqrt{\varepsilon}, -1-\sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le 0\}$,

$l_2 = \{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = t_2, -(t_2 + 1 + \sqrt{\varepsilon}) \le \tau_1 \le t_1 \le 0\}$.

Анда

1). $l_0 = \{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = 0, -1-\sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le -1\}$. Жыйынтыгында

$$\left|I_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)\right| = O(1)\int_{l_0} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot\left|d\tau\right| = O(\varepsilon).$$

2). $l_1 = \{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = -\tau_1 - 1 - \sqrt{\varepsilon}, -1-\sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le 0\}$, болсун. Анда

$$\left|I_{12}(t_1,t_2,\varepsilon)\right| = O(1)\int_{l_2} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot\left|d\tau\right| = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

4). $l_3 = \{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = t_2, -(t_2 + 1 + \sqrt{\varepsilon}) \le \tau_1 \le t_1 \le 0\}$. Анда төмөнкүдөй эки учур болот.

а). $t_1 < \sqrt{\varepsilon}$.

б). $-\sqrt{\varepsilon} \le t_1 \le 0$. Жыйынтыгында $\left|I_{13}(t_1,t_2,\varepsilon)\right| = O(\sqrt{\varepsilon})$ баалоосу орун алат.

$(t_1,t_2)\in H_{02}$ болсун. Анда $l = l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$,

1). l_0 - интегралдоо жолу боюнча баалоо алынган.

2). $l_1 = \{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = -\tau_1 - 1 - \sqrt{\varepsilon}, -1-\sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le -\sqrt{\varepsilon}\}$, эсептөө жүргүзүп,

$$|I_{12}(t_1,t_2,\varepsilon)| = O(1)\int_{l_2} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O(\sqrt{\varepsilon})\,.$$

3). $l_2 = \{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = \tau_1 - 1 + \sqrt{\varepsilon}, -\sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le 1-\sqrt{\varepsilon}\}$, анда

$$|I_{13}(t_1,t_2,\varepsilon)| = O(1)\int_{l_2} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O(\sqrt{\varepsilon})\,.$$

4). $l_3 = \{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = t_2, t_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le t_1\}$, анда эки учур болот:

а). $\sqrt{\varepsilon} > \tau_1 \ge 1-\sqrt{\varepsilon}$.

б). $0 \ge \tau_1 \ge \sqrt{\varepsilon}$. Жыйынтыгында

$$|I_{12}(t_1,t_2,\varepsilon)| = O(1)\int_{l_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O(\sqrt{\varepsilon})\,.$$

$(t_1,t_2)\in H_0$ областында кемүүчү жол болуп, тандалып алынган интегралдоо жолдорунан алынган баалоо биринчи жакындашуу үчүн

$$|x_1(t,\varepsilon)| = O(\sqrt{\varepsilon})\,, \tag{4.3.12}$$

болот.

Аналогиялуу түрдө, $\lambda_2(t)$ өздүк мааниси үчүн да (4.3.12) баалоосу орун алат.

Система үчүн

$$\|x_1(t,\varepsilon)\| = O(\sqrt{\varepsilon})\,, \tag{4.3.13}$$

Интегралды баалоодо кездешүүчү баалоого таасир этпеген оң турактуу чоңдуктардын баарын бир эле бир C менен белгилейбиз. Анда

$$\|x_2(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)\| \le (C\sqrt{\varepsilon})^2\,. \tag{4.3.14}$$

Улантуу менен

$$\left\| x_n(t,\varepsilon) - x_{n-1}(t,\varepsilon) \right\| \le \left(C\sqrt{\varepsilon} \right)^n, \ (n = 1,2,...), \tag{4.3.15}$$

баалоосун алабыз.

H_0 областында алынган (4.3.13)-(4.3.15) баалоолорунда $C\sqrt{\varepsilon} < 1$ шарты менен $x_n(t,\varepsilon)$ удаалаштыгы (4.3.3) теңдемесинин чечими болгон кандайдыр бир $x(t,\varepsilon) \in \Phi(S_r)$ функциясына бир калыпта жыйналат.

II. Кичине козголуу $\varepsilon h(t) = 0$ болсун.

(4.3.1)-(4.3.2) маселесинин чечимин кичине козголуу жок болгон учурда жазып:

$$x(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-t_0}^{t} K(s)ds \right) + \int_{-t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} K(s)ds \right) \cdot f\left(\tau, x(\tau,\varepsilon)\right)d\tau . \tag{4.3.16}$$

(4.1.16) маселесин скалярдык формада жазалы:

$$x_1(t,\varepsilon) = x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{F_1(t)}{\varepsilon} \right) + \int_{-t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F_1(t) - F_1(\tau)\right) \right) \cdot f_1(\tau, x_1, x_2)d\tau ,$$

$$x_2(t,\varepsilon) = x_2^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}F_2(t) \right) + \int_{-t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F_2(t) - F_2(\tau)\right) \right) \cdot f_2\left(\tau, x_1, x_2\right)d\tau . \tag{4.3.17}$$

(4.3.17) маселесин удаалаш жакындашуу усулунун жардамында чечебиз. Удаалаш жакындашууларды төмөнкүчө аныктайбыз:

$$x_{10}(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$x_{20}(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$x_{11}(t,\varepsilon) = x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}F_1(t) \right),$$

$$x_{21}(t,\varepsilon) = x_2^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}F_1(t) \right), \tag{4.3.18}$$

$$x_{1n}(t,\varepsilon)=x_{11}(t,\varepsilon)+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F_1(t)-F_1(\tau)\right)\right)\cdot f_1(\tau,x_{1n-1}(\tau,\varepsilon),x_{2n-1}(\tau,\varepsilon))d\tau\,,$$

$$x_{2n}(t,\varepsilon)=x_{21}(t,\varepsilon)+\int_{-t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F_2(t)-F_2(\tau)\right)\right)\cdot f_2(\tau,x_{1n-1}(\tau,\varepsilon),x_{2n-1}(\tau,\varepsilon))d\tau\,,$$

мында $n\in N$.

T_0 чекити $\lambda(t)$ функциясынын жөнөкөй нөлү болсун б.а. $\lambda(T_0)=0 \quad \wedge$ $\lambda'(T_0)\neq 0$, $D=\{t\in C,|t|<r_0\}$ деп алалы. $T_0=T_{10}-iT_{20}$ ($T_{20}>0$) деп эсептейли. $F_1(t)=\int_{-t_0}^{t}\lambda_1(\tau)d\tau$, $F_{10}(t)=\int_{T_0}^{t}\lambda_1(\tau)d\tau$ функцияларын аныктайлы.

$F_1(t)=F_{10}(t)-F_1(-t_0)$ барабардыгы туура болот. Барабардык $\int_{-t_0}^{t}\lambda_1(\tau)d\tau$ интегралга Кошинин теоремасын колдонуудан келип чыгат. $F_{10}(t)$ функциясы T_0 чекитинде эки эселүү нөлгө ээ болот жана

$$\left(p_0\right)=\{t\in D,\operatorname{Re}F_{10}(t)=0\},$$

деңгээл сызыгы бул чекитте бутактанат. Бутактар чыныгы окту $(-t_0;0)$, $(t_0;0)$ чекиттерде кесип өтөт десек, каралып өткөн учурга келебиз. Сүрөттөлүш Сүрөт 3.2.9 аналогиялуу болот.

(3.2.9) сүрөттөн кийин $\left(p_0\right)$ - деңгээл сызыгынын бутактары жана $[-t_0,t_0]$ - кесиндиси менен чектелген областы D_1 деп белгилейли.

$$\left(p_{-\varepsilon}\right)=\{t\in D_1,\operatorname{Re}F_{10}(t)=-\varepsilon\ln\varepsilon\}$$

деңгээл сызыгы аркылуу $D_{1\varepsilon}$, D_{11} бөлүктөргө бөлөлү. Сүрөттөлүш Сүрөт 3.2.10 аналогиялуу болот.

(4.2.16) теңдемени D_1 областа жана чечимдин жашашын далилдөө, аны баалоону жүргүзүү үчүн интегралдоо жолдорун тандайбыз. Интегралдоонун жолу $(p_0)[t_0,\tilde{t}\,]$, $(q)[\tilde{t}\,,t]$ турат.

Мурда жүргүзүлгөн эсептөөлөрдү (4.1.18) удаалаш жакындашууларына кайталоо менен (4.1.16) теңдеменин чечими үчүн төмөнкү баалоону алабыз

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le M_6 \exp\left(\frac{\operatorname{Re} F_k(t)}{\varepsilon}\right),\ (k=1,2),$$

же

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le M_6 \begin{cases} 1, & t \in D_{1\varepsilon} \cup (p_0), \\ \varepsilon^n, & t \in D_{11}. \end{cases} \qquad (4.3.19)$$

Төмөндөгүдөй теорема далилденди.

T.4.3.2. U4.3.1 шарт аткарылып, кичине козголуу жок болсун. Анда (4.3.1) – (4.3.2) маселесинин чечими жашап жалгыз болуп, (4.2.19) баалоосу орун алат.

4 - бап боюнча корутунду

Эгерде эселүү өздүк маанилердин нөлдөрү тегиздикте жатышса, анда туруктуулуктун жоголушунун узартылышы кубулушу орун алып, бирок кармалуу убактысын жетишээрлик чоң аралыкка чоңойтуу мүмкүнчүлүгү болбойт. Ага кичине козголуу жана өздүк маанилердин нөлдөрүнүн тегиздикте жайгашуусу таасир этет.

Ал эми эселүү өздүк маанилер, чынгыгы болуп, нөлдөрү сан огунда жатышса, бул учурда кичине козголуу бар болсо, туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушу орун албайт. Ал эми жок болсо, туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушу орун алат.

Бапта өздүк маанилер комплекстүү, чыныгы жана комплекстүү түйүндөш болгон учурлар каралды. Бул учурда да туруктуулуктун жоголушунун узартлыш кубулушу орун алат. Кичине козголуу жок болсо, $t \in [-t_0, t_0]$ аралыгын кеңейтирүү мүмкүнчүлүгү болот. тескери учурда бул интервал өзгөрбөйт.

Эгерде эселүү өздүк маанилер жорума бөлүктөн туруп калышса эмне болот деген суроо табигый түрдө келип чыгат. Бул учурда сан огу туруктуу болуп, кичине козголуунун таасири байкалбайт.

КОРУТУНДУ

Сингулярдык козголгон маселенин чечиминин асимптотикалык ажыралмасын тургузуу жараянында өздүк маанилердин чыныгы бөлүгү туруктуу жана туруксуз аралыктарды аныктайт. Ошону менен бирге өздүк маанилер, чечимдин баалоосунун тартиби жана туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушун да аныктайт.

Диссертациялык жумушта туруктуулуктун жоголушунун узартылыш кубулушуна таасир этүүчү дагы бир козголуу каралды. Ал козголууну кичине козголуу деп атадык. Ал козголуу нөл же нөлдөн айырмалуу болгонуна карата, чечимдин туруктуулугунун жоголушунун узартылыш кубулушу орун алуусу же албоосу баяндалды. Мисалдар келтирилди.

Эки эселүү өздүк маанилерди кароо менен диссертациялык жумуш чектелди. Андан жогорку тартиптеги эселүүлүктөрдү изилдөөдө, алынган баалоолор өзгөрбөйт. Мына ошол себептүү ал учурларды изилдөөнүн зарылчылыгы болбойт.

ПРАКТИКАЛЫК СУНУШТАР

Диссертация теориялык мүнөзгө ээ болуп, сингулярдык козголгон теңдемелер системалары кванттык механикада, термелүүлөр теориясында, радиотехникада, гидродинамикада жана башка кубулуштарда түрдүү колдонмо маселелерди чечүүдө колдонууга сунуштайбыз.

Изилдөөнүн жыйынтыктары сингулярдык козголуулар теориясы боюнча “Математика”, “Колдонмо математика жана информатика”, “Физика-математикалык билим берүү”, “Математика жана компьютердик илимдер” багыттары боюнча магистрлерди жана бакалаврларды даярдоонун атайын курстарында лекцияларды окууда колдонууга сунуштулат.

КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР

1. **Абдилазизова, А.А.** Асимптотика решений сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений при нарушении условия устойчивости. [Текс] / А. А. Абдилазизова // – Дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02. – Ош, 2012. – 80 с.

2. **Абдилазизова, А.А.** Чектелбеген областта сызыктуу эмес маселенин өзгөчө учурдагы асимптотикалык баасы [Текст] / А.А. Абдилазизова // ОшМУнун жарчысы. – Ош, 2021. – 3-том. – Б. 4-9.

3. **Азимбаев, М.А.** Устойчивость решений сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости. [Текст] / М. Азимбаев //– Дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2010. – 106 с.

4. **Алыбаев, К.С.** Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. [Текст] / К.С. Алыбаев // Дисс. … д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2001. – 204 с.

5. **Алыбаев, К.С.** Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. [Текст] / К.С. Алыбаев // Вестник КГНУ. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001 г. – С. 190-200.

6). **Алыбаев, К.С.** Асимптотическое разложение решений по малому параметру в случае нарушения устойчивости точки покоя. [Текст] / К.С. Алыбаев // Проблемы автоматики и управления. – Бишкек.: Илим, 1999 г. – С. 209-214.

7). **Алыбаев, К.С.** Некоторые классы сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. [Текст] / К.С. Алыбаев // Исслед. по интегро-дифферец. уравнениям – Бишкек.: Илим, -2001. Вып. 30. – С. 139-147.

8. **Алымкулов, К.А.** Возмущенные дифференциальные уравнение с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач [Текст] / К. Алымкулов // Бишкек: Илим, 1992. – 108 с.

9. **Алымкулов, К.А.** Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, А.А. Халматов // Матем. заметки, Т. 92. Вып. 6, 2012. – С 818-824.

10. **Алымкулов, К.А.** Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно-возмущенного уравнения второго порядка [Текст] / К. Алымкулов // Вестник ОшГУ, 2012. –№3. –С. 43-45.

11. **Алымкулов, К.А.** Асимптотическое разложение решения сингулярно-возму-щенного уравнения с двумя точками поворота [Текст] / К. Алымкулов , Т.Д. Асылбеков, Д.А. Турсунов// Вестник ОшГУ, 2012. –№3. –С. 43-45.

12. **Алымкулов, К.** Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач [Текст] / К. Алымкулов, Д. А. Турсунов // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 12. – С. 3–11.

13. **Алымкулов, К.** Метод структурного сращивания решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, Ж. К. Жээнтаева // Матем. заметки. – 2006. – Т. 79. – № 5. – С. 643–652.

14. **Алымкулов, К.** Равномерная асимптотика решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка со слабой особенно-стью [Текст] / К. Алымкулов, А.З. Зулпукаров // Доклады академии наук. – 2004. – Т. 398. – № 5. – С. 583–586.

15. **Анарбаева, Г.М.** Асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости: [Текст] / Г.М. Анарбаева // – Дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек,1993. – 120 с.

16. **Акматов, А.А.** Поведение решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости [Текст] / С. Каримов // Естественные и технические науки. – Москва. 2006. №1(21). – С. 14-19.

17. **Акматов, А. А.** Поведение решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости II. [Текст] / С. Каримов // Естественные и технические науки. – Москва. 2006. №2(22). – С. 14.

18. **Акматов, А.А.** Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае неоднократной смены устойчивости. [Текст] / А. А. Акматов // Вестник ОшГУ. Ош. №5. – 2008. – С. 79-82.

19. **Акматов, А.А.** Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, когда собственные значения матрицы имеют мнимые части. [Текст] / С. Каримов // Вестник ОшГУ. – Ош. 2021. №1. – С. 61-

20. **Акматов, А.А.** Комплекстик тегиздикте Френель интегралдарынын асимптотикалык ажыралмасы. [Текст] / А. А. Акматов // Вестник ОшГУ. Ош. №2. – 2021. – С. 19-25

21. **Акматов, А.А.** Сингулярдуу козголууга ээ болгон дифференциалдык теңдемелердин чечимин изилдөөдө чегериштердин таасири. [Текст] / А. А. Акматов // Вестник ОшГУ. Ош. №1. – 2022. – С. 47-55.

22. **Акматов, А.А.** Сингулярдык козголгон маселенин чечимин изилдөө. [Текст] / А. А. Акматов // Вестник ОшГУ. Ош. №2. – 2021. – С. 26-33.

23. **Акматов, А.А.** Асимптотика решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. [Текст] / А. А. Акматов // Журнал бюллетень науки и практики. Москва. №5. – 2022. – С. 24-31.

24. **Акматов, А.А.** Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. [Текст] / А. А. Акматов // Журнал бюллетень науки и практики. Москва. №5. – 2022. – С. 15-23.

25. **Акматов, А. А.** Поведения решения нелинейной задачи в случае смены устойчивости. [Текст] / А. М. Токторбаев, К. К. Шакиров // Журнал бюллетень науки и практики. Москва.Т.8. №7. – 2022. – С. 12-20.

26. **Акматов, А. А.** Прикладные задачи теории возмущений. [Текст] / А. М. Токторбаев, Замирбек кызы Н // Журнал бюллетень науки и практики. Москва.Т.8. №12. – 2022. – С. 36-42.

27. **Акматов, А.А.** Об устойчивости решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. [Текст] / А. А. Акматов // Журнал бюллетень науки и практики. Москва. №3. – 2023. – С. 39-46.

28. **Акматов, А.А.** Исследования решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. [Текст] / А. А. Акматов // Журнал бюллетень науки и практики. Москва. №3. – 2023. – С. 33-38.

29. **Акматов, А. А.** Эки жактуу туруктуу аймактагы чечимдин асимптотикасы. [Текст] / С. Каримов // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. Жалал-Абад. 2023. – С. 45-50.

30. **Акматов, А. А**. Кичине козголуунун сингулярдык козголгон теңдеменин чечиминин туруктуулугунун узартылышына тийгизген таасири. [Текст]/ А. А. Акматов // Вестник ОшГУ. Ош. 2023.

31. **Акматов, А.А.** Влияние малой возмущении к решению сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. [Текст]/ А. А. Акматов// Современные роблемы дифференциальных уравнений и их приложения. Международная научна конференция Ташкент, 23-25 ноября 2023 года.Тезисы Докладов.Часть 1. –С. 26.

32. **Боголюбов, Н.Н**. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. [Текст] / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский // – Москва: Наука, 1974. – 501 с.

33. **Вазов, В.**Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. [Текст] / В. Вазов // – Москва: Мир, 1968. – 462 с.

34. **Васильева, А.Б.** Построения равномерного приближения для решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной [Текст] / А.Б. Васильева // Матем. сборник. – 1960, – том 50, – №1. – С.43-58.

35. **Васильева, А.Б**. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов // – Москва: Наука, 1973. – 272 с.

36. **Васильева, А.Б.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов // – Москва: Высшая школа, 1990. – 208 с.

37. **Васильева, А.Б.** Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. [Текст] / А.Б.Васильева, Бутузов, В.Ф // – Москва: Изд. МГУ, 1978. – 106 с.

38. **Васильева,А.Б.** О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры [Текст] / А.Б.Васильева // Матем. сборник. – 1952. – том 31(73).
– № 3. – С. 587-644.

39. **Гантмахер, Ф.Р**. Теория матриц. [Текст] / Ф.Р. Гантмахер // – Москва: Наука, 1996. – 576 с.

40**. Иманалиев, М.И**. Колебания и устойчивость решений сингулярно– возмущенных интегро-дифференциальных систем. [Текст] / М.И. Иманалиев // – Фрунзе: Илим, 1974. – 352 .

41. **Иманалиев, М.И**. Явление всплеска для скалярных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений первого порядка [Текст] /
М.И. Иманалиев, С.П. Панков // Изв. АН. Кирг. СССР. – 1987. –№3. – С. 45-51.

42. **Иманалиев, М.И.** Явление удаляющегося пограничного слоя в теории сингулярновозмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений[Текст] /М.И. Иманалиев, С.П. Панков // Докл. РАН. – 1993. – Том 333, №5. – С. 575-577.

43. **Иманалиев, М.И.** Явление вращающегося пограничного слоя в теории сингулярновозмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений[Текст] /М.И. Иманалиев, С.П. Панков // Докл. АН СССР – 1986. – Том 289, №3. – С. 356-361.

44. **Иманалиев, М.И.** Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. [Текст] / М.И. Иманалиев//– Фрунзе: Илим, 1972.– 356 с.

45. **Иманалиев, М.И.** Сингулярно возмущенные уравнения при нарушении условия устойчивости. [Текст] / М.И. Иманалиев, К. С. Алыбаев //– Жалалабад: 2001.–173 с.

46. **Иманалиев, М.И.** Метод линий уровня оценки интегралов содержащих большой параметр I. [Текст] / М.И. Иманалиев, К. С. Алыбаев // Исслед. по интегро-дифферец. уравнениям – Бишкек.: Илим, -2001. Вып. 30. – С. 15-21.

47. **Иманалиев, М.И.** Метод линий уровня оценки интегралов содержащих большой параметр II. [Текст] / М.И. Иманалиев, К. С. Алыбаев // Исслед. по интегро-дифферец. уравнениям – Бишкек.: Илим, -2001. Вып. 30. – С. 22-26.

48. **Иманалиев, М.И.** Асимптотические поведение решений сингулярно возмущенных уравнений при нарушении устойчивости точки покоя II/ [Текст] / М.И. Иманалиев, К. С. Алыбаев // Исслед. по интегро-дифферец. уравнениям – Бишкек.: Илим, -1999. Вып. 28. – С. 25-29.

49. **Иманалиев, М.И.** Асимптотические поведение решений сингулярно возмущенных уравнений при нарушении устойчивости точки покоя I/ [Текст] / М.И. Иманалиев, К. С. Алыбаев // Исслед. по интегро-дифферец. уравнениям – Бишкек.: Илим, -1999. Вып. 28. – С. 19-24.

50.**Касымов, К.** Асимптотическое разложение решения задачи с начальным скачком для системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной[Текст] / К. Касымов // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10. – № 7. – С.1248-1263.

51.**Каримов, С.К.** Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений»[Текст] / С.К. Каримов //– Дис… д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. – Ош, 1983. – 260 с.

52. **Каримов, С.К.** Равномерные приближения к решениям системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных [Текст] / С.К. Каримов, К. С. Алыбаев // Исслед. по интегро-дифферец. уравнениям – Фрунзе.: Илим, -1981. – С. 276-285.

53. **Кененбаева, Г.М.** Теория и методика поиска новых эффектов и явлений в теории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений [Текст] / Г.М. Кененбаева//–Бишкек. – Илим, 2012. – 204 с.

54.**Лаврентьев, М.А.** Методы теории функций комплексного переменного[Текст]/ М.А.Лаврентьев, Б.В. Шабат // - Москва: Наука. – 1973. – 739 с.

55.**Ломов, С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений[Текст] / С.А. Ломов// – Москва: Наука. – 1981. – 400 с.

56. **Мищенко, А. И.** Введение в теорию аналитических функций [текст] / Л. А. Маркушевич // - Москва. Просвещение, 1977. – 143 с.

57.**Мищенко, Е.Ф.**Дифференциальные уравнения с малым параметрои и релаксационные колебания [Текст] / Е.Ф.Мищенко, Н.Х. Розов // –Москва. Наука, – 1975. –248 с.

58. **Мурзабаева, А.Б.** Исследование сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с разделением множеств при вырождении- [Текст] / А.Б.Мурзабаева // Дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02. – Ош, 2019. – 150 с.

59. **Нарбаев, М.Р.** Простирающиеся пограничные слои в теории сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости [Текст] / М.Р. Нарбаев // Дисс. ... канд. физ. - мат. наук. 01.01.02. – Бишкек,2010. – 116 с.

60. **Нейштадт, А.И.** Асимптотические исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось[Текст] / А.И.Нейштадт // УМН. – 1985. – Том 40. – Вып. 5. – С. 300-301.

61. **Нейштадт, А.И.** О затягивании потери устойчивостипри динамических буфиркациях. [Текст] / А.И.Нейштадт // УМН. – 1986. – Том 41. – Вып. 4.

62. **Панков, П.С**. Асимптотика метода сеток для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, многочлены Бернштейна и некоторые обобщения. [Текст] / П.С.Панков, Т.М.Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям[Текст] – Бишкек: Илим, 2000. – Вып. 29. – С. 36-40.

63.**Понтрягин, Л.С.** Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. [Текст] / Л.С.Понтрягин // Изв. АН СССР. – 1957. – Т.21. – № 5. – С. 605-626.

64.**Понтрягин, Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. [Текст] / Л.С. Понтрягин // – Москва: Наука, 1982. – 332 с.

65. **Понтрягин, Л.С.** Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с малым параметром.[Текст] / Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко // Труды МИАН. – 1985. –Т. 169. – С. 99-188.

66. **Понтрягин, Л.С**.Периодическое решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром.[Текст] / Л.С. Понтрягин, Л. В Родыгин // Док. АН СССР. – 1960. –Т. 132. – С. 537-560.

67. **Рожков, В.И.** Асимптотика решений некоторых систем с малым параметром при производных [Текст] / В.И. Рожков // Дифференциальные уравнения, 1974. – Т. 10. – № 6. – С.67-85.

68. **Тампагаров, К.Б.** Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями. [Текст] / К.Б.Тампагаров /-Дисс. … докт. физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2017. – 218 с.

69. **Тихонов, А.Н.** Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. [Текст] / А.Н. Тихонов // Мат. сб., 1952. – Т.31(73). –№3. – С.575-586.

70.**Тихонов, А.Н.** О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. [Текст] / А.Н. Тихонов // / Мат. сб. – Москва, 1948. – Т. 22. – № 2. – С. 193-204.

71. **Турсунов Д. А.** Асимптотика решений бисингулярно возмущенных обыкновенных и элиптических дифференциальных уравнений. [Текст] / Д. А. Турсунов // Дисс. ... докт.физ.мат.наук: 01.01.02/ - Бишкек, 2014. -192 с.

72. **Турсунов, Д.А.** Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости, когда собственные значения име-

ют n-кратный полюс. [Текст] / Д.А. Турсунов // Дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2005. – 106 с.

73. **Федорюк, М.В.** Метод перевала [Текст]/ М.В. Федорюк // – Москва: Наука. – 1977. – 368 с.

74. **Шишкова, М. А.** Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. [Текст] / М. А.Шишкова // Докл. АН СССР . –1973. – Т. 209. – № 3. – С. 576-579.

75. **Шарифзода, З.И.** О циклических решениях уравнения Понтрягина с малым параметром [Текст] / З. И. Шарифзода, Э. М. Мухамадиев, И. Д. Ну-ров // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2021. – Т. 194. – С. 167.

76. **Шлихтинг, Г.** Теория пограничного слоя [Текст] / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. –712 с.

77. **Akmatov A. A.** Bistability of Solitions to a Nonlinear Problem. [text]/ A. Toktorbaev., K. Shakirov// AIP conference Proceedings 3085, 020013. -2024.

78.**Abdilazizova A.A.** Behavior of the solution of singular perturbed system of differential equations in particularly critical case[Text] / S. K. Karimov, G.M. Anarbaeva, A.A. Abdilazizova, // Al-Farabi Kazakh NU. – Reports. – V1, – P 337-343.

79. **Alymkulov, K.** Perturbed Differential Equations with Singular Points [Text] / K. Alymkulov, D.A.Tursunov // In book “Recent Studies in Perturbation Theory”, Chapter 1, Edited by Dimo I. Uzunov. Publisher InTech. – 2017.

80. **Alymkulov, K.** Generalized method of boundary layer function for bisingularly perturbed differential Cole equation [Text] K. Alymkulov, D. A. Tursunov, B. A. Azimov / FJMS. – 2017. – V. 101. No 3. – P. 507–516.