УТВЕРЖДЕНО
Постановлением президиума
НАК при Президенте
Кыргызской Республики
от 27 января 2022 № 084

ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 01.01.02 - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая экзаменационная программа соответствует утвержденному паспорту научной специальности "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление". В основу программы положены следующие дисциплины: обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными, а также ряд отдельных вопросов функционального анализа и теории функциональных пространств. Программа-минимум разработана Институтом математики НАН Кыргызской Республики.

Цель кандидатского экзамена по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление: определение минимального объема теоретических сведений, необходимого для овладения основами современной теории дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления и приобретения профессиональной эрудиции, достаточной для проведения самостоятельных научных исследований по специальности. Для достижения этой цели в программу включены основные факты теории дифференциальных уравнений, а также ряда разделов смежных математических дисциплин.

Задачи кандидатского экзамена по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление: проверить и оценить знания аспиранта или соискателя в области дифференциального уравнения, динамических систем и оптимального управления.

СОДЕРЖАНИЕ ТИПОВОЙ ПРОГРАММЫ-МИНИМУМ

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.

Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных и др.).

Автономные системы уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы.

Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению.

Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства), приложение к задачам быстродействия для линейных систем.

Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.

Задача Штурма - Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными аргументами. Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения методом мажорант.

Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.

Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. Теория Гамильтона – Якоби.

2. Уравнения с частными производными

Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши - Ковалевской.

Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.

Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.).

Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.).

Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.).

Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье.

Пространства Соболева $W_p{}^m$. Теоремы вложения, следы функций из $W_p{}^m$ на границе области.

Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Задачи на собственные функции и собственные значения.

Псевдодифференциальные операторы (определение, основные свойства).

Нелинейные гиперболические уравнения. Основные свойства.

Монотонные нелинейные эллиптические уравнения. Основные свойства.

Монотонные нелинейные параболические уравнения. Основные свойства.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики [Текст] / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – М.: Физматлит, 2000. – 400 с.
2. **Лионс, Ж. Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач [Текст] / Ж. Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
3. **Михайлов, В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных [Текст] / В. П. Михайлов. – М.: Наука, 1983. – 391 с.
4. **Пикулин, В. П.** Практический курс по уравнениям математической физики [Текст] / В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. – М: Наука, 1995. – 224 с.
5. **Понтрягин, Л. С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1998. – 51 с.
6. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / [Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, и др.]. – М.: Наука, 1963. – 384 с.
7. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 742 с.
8. **Трикоми, Ф.** Дифференциальные уравнения. Издательство иностранной литературы [Текст] / Ф. М. Трикоми. – М.: Наука, 1962. – 346 с.
9. **Федорюк, М. В.** Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
10. **Филиппов, А. Ф.,** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью[Текст] /

А. Ф. Филиппов. – М.: Издательство физ.-мат. литературы, 1985. – 250 с.

1. **Смирнов, В. И.** Курс высшей математики [Текст] / В. И. Смирнов. – М.: Физматгиз, 1958. – 122 с.
2. **Петровский, И. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными [Текст] / И. Г. Петровский. – М: Физматгиз, 1961. – 400 с.
3. **Самарский, А. А.** Теория разностных схем [Текст] / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 654 с.
4. **Бицадзе, А. В.** Уравнения математической физики [Текст] / А. В. Бицадзе. – М.: Наука, 1976. – 296 с.

Дополнительная литература

1. **Арнольд, В. И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / В. И. Арнольд**.** – М.: Наука, 1971. – 275 с.
2. **Мартинсон, Л. К.** Дифференциальные уравнения математической физики [Текст] / Л. К. Мартинсон, Ю. И. Малов. – М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 1996. – 367 с.
3. **Петровский, И. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными [Текст] / И. Г. Петровский. – М.: Наука, 1961. – 400 с.
4. **Тихонов, А. Н.** Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения [Текст] / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
5. **Шубин, М. А.** Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория [Текст] / М. А. Шубин. – М.: Наука, 1978. – 279 с.

ПОЛЕЗНЫЕ ССЫЛКИ

1. http://nlkr.gov.kg
2. http://lib.mexmat.ru/
3. https://www.nehudlit.ru/
4. http://math.semestr.ru/math/diffur.php
5. http://www.tuio.math.csu.ru/data/files/documents/cyrsovayaNEW.pdf
6. http://www.tuio.math.csu.ru/data/files/documents/metodukaz.pdf
7. http://www.math.csu.ru/index.php?option=com_content&view=article&id=48&Itemid=56
8. http://www.math.csu.ru/?option=com_content&view=article&id=82&Item id=73
9. https://www.elibrary.ru/defaultx.asp
10. https://www.scopus.com/home.uri
11. https://www.rsl.ru/ru/s2/d104/

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПО ТИПОВОЙ ПРОГРАММЕ-МИНИМУМ

1. Теорема существования и единственности решения начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Непрерывность и дифференцируемость решений по параметрам и начальным данным.
2. Решение линейных уравнений и систем произвольного порядка с постоянными коэффициентами. Линейные уравнения с переменными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных.
3. Автономные системы дифференциальных уравнений. Положения равновесия, предельные циклы. Устойчивость, теорема Ляпунова. Исследования Вышнеградского. Седло, узел, фокус, центр.
4. Элементы вариационного исчисления. Уравнения Эйлера. Системы уравнений Гамильтона.
5. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Метод последовательных приближений. Теоремы Фредгольма. Эрмитовы ядра. Теорема Гильберта-Шмидта. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению с помощью функции Грина.

6. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных (колебательные процессы, теплопроводность и диффузия, электромагнитное поле, уравнения гидро-газодинамики, уравнение Шрёдингера). Вариационные принципы.
7. Понятие о характеристиках уравнений в частных производных. Теорема Ковалевской.
8. Классификация и канонические формы уравнений в частных производных второго порядка. Постановка основных краевых задач: задача Коши, I, II, III краевые задачи, смешанные задачи. Корректность постановки краевых задач.
9. Классические решения основных краевых задач для эллиптических уравнений. Уравнение Лапласа. Основные свойства гармонических функций (формула Грина, теорема о среднем, принцип максимума, теорема об устранимой особенности). Решение задач Дирихле и Неймана (внутренней и. внешней) методом потенциалов. Функция Грина и ее применения к решению краевых задач. Формула Пуассона для шара и круга. Исследование регулярности точек границы. Уравнение Гельмгольца ;постановка краевых задач, условия излучения, принципы предельной амплитуды и предельного поглощения.
10. Обобщенные решения основных краевых задач для эллиптических уравнений. Разрешимость краевых задач и гладкость обобщённых решений. Некоторые теоремы вложения функциональных пространств (неравенства Пуанкаре и Стеклова). Задача на собственные значения для эллиптического уравнения (в частности, задача Штурма-Лиувилля). Свойства собственных значений и собственных функций. Вариационный метод решения краевых задач. Разложение в ряды по собственным функциям.
11. Уравнения параболического типа. Постановка основных краевых задач. Принцип максимума и единственность. Тепловые потенциалы. Решение смешанной задачи методом разделения переменных (метод Фурье). Обоснование метода Фурье. Обобщение решения. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.
12. Уравнения гиперболического типа. Постановка основных краевых задач. Интеграл энергии, единственность. Решение смешанной задачи методам Фурье. Обоснование метода Фурье. Обобщение решения. Решение задачи Коши для волнового уравнения (формулы Даламбера, Пуассона и Кирхгофа). Метод спуска. Распространение волн в пространстве, на плоскости и на прямой. Методы Даламбера и Римана для решения задач Коши и Гурса в случае одного пространственного переменного.
13. Обобщенные функции и их свойства. Построение фундаментальных решений линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Решение обобщенной задачи Коши для волнового уравнения. Некорректно поставленные задачи. Интегральные уравнения Фредгольма первого ряда и метода их регуляризации. Общие метода регуляризации некорректно поставленных задач.
14. Метод конечных разностей. Общие сведения. Метод конечных разностей для решения задачи Дирихле, Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Устойчивость разностных схем. Итерационные методы решения сеточных уравнений.