УТВЕРЖДЕНО
Постановлением президиума
НАК при Президенте
Кыргызской Республики
от 27 января 2022 № 084

ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 01.01.04 - ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ВВЕДЕНИЕ

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: геометрия (в том числе дискретная), общая, алгебраическая и дифференциальная топологи по разделам: геометрия многообразий и различных геометрических структур; дискретная и комбинаторная геометрия; дифференциальная геометрия и ее приложения; интегральная геометрия; симплектическая, контактная и пуассонова геометрия конечномерных и бесконечномерных пространств; общая топология; алгебраическая топология; топология гладких многообразий; маломерная топология, включая теорию узлов и зацеплений; топология особенностей; теория пространств отображений и пространств модулей различных геометрических структур; топология и геометрия групп и однородных пространств. Программа-минимум разработана Институтом математики НАН Кыргызской Республики.

Цель кандидатского экзамена по специальности 01.01.04 – геометрия и топология: определение минимального объема теоретических сведений, необходимого для овладения основами современной теории геометрии и топологии и приобретения профессиональной эрудиции, достаточной для проведения самостоятельных научных исследований по специальности.

Задачи кандидатского экзамена по специальности 01.01.04 – геометрия и топология: проверить и оценить знания аспиранта или соискателя в области геометрии и топологии.

СОДЕРЖАНИЕ ТИПОВОЙ ПРОГРАММЫ-МИНИМУМ

1. Общая топология

Метрическое пространство. Полнота. Теорема Бэра о категории.

Топологическое пространство. Непрерывность. Гомеоморфизм. Аксиомы отделимости. Связность и линейная связность. Фактор-топология. Топологии в функциональных пространствах (отрыто-замкнутая топология в пространстве непрерывных отображений и C^k-топология в пространстве гладких отображений).

Лемма Урысона. Теорема о продолжении непрерывных функций.

Компактность и способы компактификации пространств. Теорема Тихонова о компактности произведения. Расширения Чеха-Стоуна. Разбиение единицы и его приложения. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации полиномами непрерывной функции на компакте в евклидовом пространстве.

Лебегово определение размерности. Нерв покрытия и аппроксимация компакта полиэдрами.

Индуктивное определение топологической размерности. Теорема Урысона об эквивалентности.

Хаусдорфова размерность. Ее связь с топологической. Фракталы: канторово множество, ковер Серпинского, их хаусдорфова размерность.

2. Алгебраическая топология

Гомотопическая эквивалентность. Гомотопические классы отображений. Фундаментальная группа топологического пространства. Группа кос как фундаментальная группа конфигурационного пространства системы точек на плоскости. Гомотопические группы пространств и их гомотопическая инвариантность. Точная гомотопическая последовательность пары. Вычисление k-мерных гомотопических групп n-мерной сферы для k меньших или равных n.

Пространства Эйленберга-Маклейна. Н-пространства и группа гомотопических классов отображений в Н-пространство. Коммутативность фундаментальной группы Н-пространства.

Группы сингулярных гомологий и когомологий. Симплициальные и клеточные пространства. Симплициальные и клеточные гомологии и когомологии, их связь с сингулярными. Эйлерова характеристика. Гомотопическая инвариантность групп гомологий. Умножение в когомологиях. Точные гомологическая и когомологическая последовательности пары. Гомологии и когомологии с коэффициентами. Оператор Бокштейна. Связь фундаментальной группы и группы одномерных гомологий. Двойственность Пуанкаре для многообразий.

Теории гомологий и когомологий. Аксиомы теории гомологий и когомологий. Теорема единственности для гомологий и когомологий. Группы когомологий как группы классов отображений в пространства Эйленберга-Маклейна.

Кольцо когомологий Н-пространства как алгебра Хопфа. Классификация градуированных алгебр Хопфа над полем рациональных чисел.

Гомологии и кольца когомологий проективных пространств. Клетки Шуберта и гомологии многообразий Грассмана.

Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие. Накрытие и фундаментальная группа. Аксиома о накрывающей гомотопии и расслоение в смысле Серра. Пространство путей и петель, лемма о накрывающей гомотопии для расслоения путей.

Локально тривиальные расслоения. Сечения. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Основные понятия теории препятствий (препятствующий коцикл и первое препятствие к сечению расслоения).
Действие монодромии в гомологиях расслоения. Формула Пикара-Лефшеца.

Векторные расслоения. Прямая сумма и тензорное произведение векторных расслоений. Многообразие Грассмана как база универсального векторного расслоения. Пространства Тома и изоморфизм Тома в гомологиях и когомологиях.

Характеристические классы векторных расслоений.

Понятие о группе K(X) и периодичности Ботта. Группа K(X) как когомологический функтор.

3. Топология гладких многообразий

Гладкие многообразия. Криволинейные координаты. Гладкие отображения и дифференциал. Диффеоморфизм. Подмногообразия. Ориентация. Касательные векторы и касательные расслоения. Примеры гладких многообразий. Теория Морса: функции Морса, индуцированное клеточное разбиение, неравенства Морса. Перестройки в многообразиях. Конструкция Понтрягина-Тома. Понятие бордизма многообразий.

Вложения и погружения. Теорема Уитни о вложении и погружении в евклидовы пространства. Субмерсии и гладкие расслоения. Особые и регулярные точки гладких отображений. Лемма Сарда (формулировка). Степень отображения, ее гомотопическая инвариантность. Применения степени отображения. Степень отображения и интеграл. Теорема Гаусса-Бонне. Гомотопическая классификация отображений n-мерной сферы в себя. Расслоение Хопфа и классификация отображений трехмерной сферы в двумерную. Инвариант Хопфа.

Индекс особой точки векторного поля и теорема Эйлера-Пуанкаре.

Двойственность Александера. Индексы пересечения и зацепления.

Исчисление струй. Топологии Уитни в пространствах гладких отображений. Теоремы трансверсальности. Теорема трансверсальности Тома и ее следствия: лемма Морса, слабая теорема Уитни. Локальная классификация устойчивых отображений плоскости в плоскость и в трехмерное пространство. Число Милнора изолированной особенности функции.

4. Топология малых размерностей

Классификация двумерных замкнутых поверхностей. Группы гомологий и фундаментальные группы двумерных поверхностей. Узлы и зацепления. Движения Райдемайстера. Полином Александера узла. Примеры трехмерных многообразий. Склейка полноторий по диффеоморфизму границы. Диаграмма Хегора трехмерных многообразий.

5. Дифференциальная геометрия

Теория кривых и поверхностей в трехмерном пространстве: натуральный параметр, кривизна и кручение кривой, формулы Френе, первая и вторая квадратичные формы поверхности, гауссова и средняя кривизны, главные направления и главные кривизны, теорема Менье и формула Эйлера. Деривационные формулы.

Риманова метрика и римановы многообразия. Подмногообразия в евклидовом пространстве и индуцированная метрика. Геометрия Лобачевского. Проективная геометрия.

Тензоры и тензорные поля на гладких многообразиях. Алгебраические операции над тензорами. Симметрические и кососимметрические тензоры. Производная Ли.

Внешние дифференциальные формы, внешнее дифференцирование. Интегрирование внешних дифференциальных форм. Формула Стокса. Точные и замкнутые формы. Когомологии де Рама. Теорема де Рама (без доказательства). Оператор Лапласа и гармонические формы. Двойственность Пуанкаре.

Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля. Тензор кручения. Римановы симметрические связности. Тензор кривизны Римана и критерий локальной евклидовости римановой метрики, тензор Риччи и скалярная кривизна. Теорема Гаусса о связи между скалярной и гауссовой кривизнами.

Параллельный перенос и геодезические. Формула Эйлера-Лагранжа. Примеры: геодезические на плоскости, сфере, плоскости Лобачевского, поверхности вращения. Сопряженные точки и индекс геодезической.

Связности и кривизна в расслоениях. Тождество Бьянки.

Характеристические классы и характеристические числа. Конструкция Чженя-Вейля характеристических классов. Характеристические числа.

Теорема Стокса и инвариантность характеристических чисел относительно бордизма.

Проективная двойственность и преобразования Лежандра.

6. Геометрические структуры на гладких многообразиях

Структуры на гладких многообразиях: риманова, почти комплексная, эрмитова, комплексная, кэлерова. Понятие о препятствиях к существованию структур.

Симплектическая структура. Примеры симплектических многообразий. Теорема Дарбу. Существование почти комплексной структуры на симплектическом многообразии. Скобка Пуассона. Примеры пуассоновых многообразий. Гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы системы. Первые интегралы гамильтоновых систем.

Контактные структуры и контактные многообразия. Примеры. Слоения и распределения. Теорема Фробениуса.

7. Геометрия групп Ли и однородных пространств

Группы Ли и алгебры Ли, присоединенное представление. Алгебра Ли векторных полей. Действия групп Ли на гладких многообразиях. Односвязные и неодносвязные группы Ли. Однородные пространства. Примеры: классические матричные группы Ли, многообразия Грассмана и Штифеля, лагранжевы грассманианы U(n)/O(n) и U(n)/SO(n). Компактные группы Ли и биинвариантная метрика.

Кольцо когомологий компактной группы Ли. Группы токов и группы диффеоморфизмов как примеры бесконечномерных групп Ли.

8. Дискретная и комбинаторная геометрия

Выпуклые множества и разбиения пространства. Разбиения Вороного и Делоне [16]. Кристаллы как правильные точечные системы. Кристаллографическая группа в евклидовом пространстве. Классификация кристаллографических групп на плоскости.

Правильные многогранники. Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данным набором граней.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Дубровин, Б. А.** Современная геометрия [Текст] / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М.: Наука, 1986. – 760 с.
2. **Новиков, С. П.** Современные геометрические структуры и поля [Текст] / С. П. Новиков, И. А. Тайманов. – М.: МЦНМО, 2003. – 584 с.
3. **Фоменко, А. Т.** Курс гомотопической топологии [Текст] / А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. – М.: Наука, 1989. – 528 с.
4. **Новиков, С. П.** Топология [Текст] / С. П. Новиков. – Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 336 с.
5. **Арнольд, В. И.** Математические методы классической механики [Текст] / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1989. – 408 с.
6. **Арнольд, В. И.** Особенности дифференцируемых отображений [Текст] / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. – М.: Наука, 1982. – 303 с.
7. **Александров, П. С.** Введение в теорию размерности [Текст] / П. С. Александров, Б. А. Пасынков – М.: Наука, 1973. – 577 с.
8. **Милнор, Дж.** Характеристические классы [Текст] / Дж. Милнор, Дж. Сташеф. – М.: Мир, 1979. – 376 с.
9. **Прасолов, В. В.** Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия[Текст] / В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский. – М.: Изд-во МЦНМО, 1997. – 352 с.
10. **Гильберт, Д.** Наглядная геометрия [Текст] / Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
11. **Коксетер, Г. С.** Введение в геометрию [Текст] / Г. С. Коксетер. – М.: Наука, 1966. – 648 с.
12. **Колмогоров, А. Н.** Элементы теории функций и фунционального анализа [Текст] / А. Н. Колмогоров., А. Н., С. В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
13. **Спрингер, Дж.** Введение в теорию римановых поверхностей [Текст] / Дж. Спрингер. – И.: ИД, I960. – 152 с.
14. **Ху Сы-Цзян.** Теория гомотопий [Текст] / Ху Сы-Цзян. – М.: Мир, 1964. – 468 с.
15. **Понтрягин, Л. С.** Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий [Текст] / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1976. – 174 с.
16. **Ефимов, Н. В.** Высшая геометрия [Текст] / Н. В. Ефимов. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
17. **Гильберт, Д.,** Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия [Текст] / Д. Гильберт., С. Кон-Фоссен. – М.: ГТТИ, 1951. – 344 с.
18. **Касселе, Дж.** Введение в геометрию чисел [Текст] / Дж. Касселе. – М.: Мир, 1965. – 407 с.

Дополнительная литература

1. **Келли, Дж.** Общая топология [Текст] / Дж. Келли. – М.: Наука, 1981. – 432 с.
2. **Милнор, Дж.** Теория Морса [Текст] / Дж. Милнор. – М.: Мир, 1965. – 184 с.

3. **Винберг, Э. Б.** Семинар по алгебраическим группам и группам Ли [Текст] / Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик. – М.: Наука, 1988. – 344 с.
4. **Чжень, Ш. Ш.** Комплексные многообразия [Текст] / Ш. Ш. Чжень. – М.: Иностранная Литература, 1961. – 240 с.
5. **Роджерс, К.** Укладки и покрытия [Текст] / К. Роджерс. – Мир, М., 1968. – 134 с.
6. **Бредон, Г.** Введение в теорию компактных групп преобразований [Текст] / Г. Бредон. – М.: Наука, 1980. – 440 с.
7. **Милнор, Дж.** Дифференциальная топология. Начальный курс [Текст] / Дж. Милнор, А. Уоллес. – М.: Мир, 1972. – 280 с.
8. **Милнор, Дж.** Теорема об h-кобордизме [Текст] / Дж. Милнор. – М.: Мир, 1969. – 115 с.
9. **Хирш, М.** Дифференциальная топология [Текст] / М. Хирш. – М.: Мир, 1979. – 281 с.
10. **Мищенко, А. С.** Курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. – М.: Изд-во "Факториал Пресс", 2000. – 448 с.
11. **Тайманов, И. А.** Лекции по дифференциальной геометрии [Текст] / И. А. Тайманов. – Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. . – 176 с.
12. **Кобаяси, Ш.** Основы дифференциальной геометрии[Текст] / Ш. Кобаяси, К. Номидзу – М.: Наука, 1981. – 416 с.
13. **Федорчук, В. В.** Общая топология. Основные конструкции [Текст] / В. В. Федорчук, В. В. Филиппов. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 336 с.
14. **Голод, П. И.** Математические основы теории симметрий [Текст] / П. И. Голод, А. У. Климык. – Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 760 с.
15. **Рохлин, В. А.** Начальный курс топологии, Геометрические главы [Текст] / В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. – М.: Наука, 1977. – 528 с.
16. **Пресли, А.** Группы петель [Текст] / А. Пресли, Г. Сигал. – М.: Мир, 1990. – 192 с.
17. **Атья, М.** Лекции по К-теории [Текст] / М. Атья. – М.: Мир, 1967. –264 с.
18. **Александров, А. Д.** Выпуклые многогранники [Текст] / А. Д. Александров. – М.: Технико-Теоретической литературы, 1950. – 428 с.
19. **Люстерник, Л. А.** Выпуклые фигуры и многогранники [Текст] / Л. А. Люстерник. – М.: Технико-Теоретической литературы, 1956. – 212 с.
20. **Федер, Е.** Фракталы [Текст] / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 256 с.

ПОЛЕЗНЫЕ ССЫЛКИ

1. http://nlkr.gov.kg
2. http://math.kg/
3. http://lib.mexmat.ru/
4. https://www.elibrary.ru/defaultx.asp
5. https://www.scopus.com/home.uri

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПО ТИПОВОЙ ПРОГРАММЕ-МИНИМУМ

1. Элементы теории множеств. Упорядоченные множества.
2. Трансфинитные числа. Трансфинитная индукция. Кольцо множеств.
3. Топологические пространства и метрические пространства. Топологические пространства. Вес и базы топологического пространства. Метрические и метризуемые пространства. Связность. Аксиомы отделимости.
4. Системы множеств и покрытия. Бикомпактные и паракомпактные пространства. Полные метрические пространства.
5. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Принцип сжатых отображений и его применения. Топологическое произведение. Теорема Тихонова. Многообразия.

6. Нормированные и топологические линейные пространства. Линейные пространства.
7. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана,-Банаха.
8. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.
9. Топологические группы. Подгруппа, Нормальный делитель, фактор-группа. Гомоморфизм. Прямое произведение.
10. Связные и вполне несвязные группы. Непрерывные группы преобразований. Понятие группы Ли.
11. Методы алгебраической топологии. Задача распространения. Задача ретракции. Задачи стягивания и накрытия.
12. Классификация отображений окружности в себя. Фундаментальная группа. Односвязные пространства.
13. Комбинаторная топология. Триангуляции, барицентрические координаты и подразделения. Ориентируемость.
14. Нормальные формы компактных ориентируемых поверхностей. Группы гомологий. Фундаментальная группа и одномерная гомологическая группа.
15. Гомологии на компактных поверхностях. Теорема Хопфа.
16. Расслоенные пространства. Аксиома о накрывающей гомотопии. Локально тривиальные расслоения. Хопфовские расслоения сфер.
17. Алгебраически тривиальные отображения. Накрытия и секущие поверхности. Пространства путей и петель.
18. Теорема о накрывающем пути. Теорема о расслоении пространства отображений. Накрывающие пространства.
19. Дифференцируемые многообразия. Гладкие многообразия и их гладкие отображения. Оснащенные многообразия. Хопфовский инвариант.
20. Классификация отображений трехмерной сферы в двумерную.
21. Элементы римановой геометрии. Риманова поверхность аналитической функции. Невырожденные гладкие функции на многообразии.
22. Теорема Стокса. Исчисление внешних дифференциальных фора. Аффинные связности. Риманова связность. Основы тензорного анализа.
23. Тензор кривизны. Геодезические и полнота. Римановы многообразия постоянной кривизны.
24. Дискретные группы и кристаллография. Точечные решетки. Теорема Минковского и ее применения. Плотнейшая решетчатая упаковка кругов и шаров.
25. Кристаллы как правильные точечные системы. Понятие федоровской группы. Классификация дискретных групп плоских движений.
26. Неевклидова геометрия и теория относительности. Параллельные по Лобачевскому. Функция П.
27. Эквидистантная поверхность и орисфера. Элементарная геометрия на поверхностях Лобачевского. Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Приложения к теории относительности.