**Институт математики Национальной академии наук**

**Кыргызской Pеспублики**

**Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына**

Диссертационный совет Д 01.24.701

На правах рукописи

УДК 517.968

**Бапа кызы Айнура**

**Проекционно – итерационные методы исследования периодических решений интегро – дифференциальных уравнений типа Вольтерра**

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2025

Работа выполнена на кафедре математики, информатики и информационных технологий Иссык-Кульского государственного университета им. Касыма Тыныстанова.

**Научный руководитель:** **Алымбаев Асангул Темиркулович**, доктор физико-математических наук, и.о. профессора Института новых информационных технологий Кыргызского государственного университета им. И.Арабаева.

**Официальные оппоненты:**

**Ведущая организация:**

Защита состоится «\_\_» \_\_\_\_\_\_ 202\_года в \_\_ на заседании диссертационного совета Д 01.24.701 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете имени Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374.

Идентификатор защиты – [\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_](https://vc1.vak.kg/b/012-ltf-b7j-lgy).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики (720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265а), и Кыргызском национальном университете имени Ж. Баласагына, (720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547) и на сайте [www.vak.kg](http://www.vak.kg).

Автореферат разослан “\_\_” \_\_\_\_\_\_ 202\_ г.

Ученый секретарь диссертационного совета

кандидат физико-математических наук, доцент Шаршембиева Ф. К.

**ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

**Актуальность темы.** Исследование многих физических задач сводится к изучению периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, как с конечными, так и бесконечными последействиями, и их систем.

Для исследования периодических решений этих уравнений имеются качественные, аналитические и асимптотические методы, созданные А. Пуанкаре (1879-1912 гг.), Н.М. Крыловым (1912-1955 гг.), Н.Н. Боголюбовым (1934-1991 гг.), Ю.А. Митропольским (1951-2006 гг.), А.М. Самойленко (1973-1976 гг.) и другими авторами. Эти методы успешно применяются при исследовании систем уравнений, содержащих малый параметр, в которых эффект от нелинейности проявляется медленно. Однако при исследовании нелинейных систем общего вида их применимость ограничивается узкими классами уравнений.

В связи с этим в настоящее время одной из важных и актуальных задач исследования является разработка и обоснование методов, применимых для исследования решений уравнений общего вида с сильными нелинейностями.

В диссертационной работе рассматриваются вопросы исследования существования и построения периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, а также системы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, обладающей свойством автономности. В исследовании применяется и обосновывается проекционно-итерационный метод, сочетающий идеи метода Галеркина и метода последовательных приближений. Основное внимание уделено обоснованию проекционно-итерационного метода, который сочетает идеи метода Галеркина и метода последовательных приближений. Решение этих вопросов определяет актуальность данной работы.

**Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими работами, проводимыми образовательными и научными учреждениями.**

Исследования по теме диссертации проводились в соответствии с утвержденной ученым советом Иссык-Кульского государственного университета им. К. Тыныстанова тематикой «Проекционно-итерационные методы исследования периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра», протокола №2, от 02.11.2021 г.

**Цель и задачи исследования.** Целью исследования диссертационной работы является обоснование применимости проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием второго порядка, а также системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром, обладающей свойством автономности.

Для достижения цели работы были решены следующие задачи:

1. Доказательство существования приближений Галеркина в окрестности точного периодического решения и оценка погрешности между приближенными и точными периодическими решениями.
2. Доказательство обратного утверждения о существовании точного периодического решения в окрестности приближений Галеркина и оценка погрешности между ними.

3. Построение методом гармонического баланса в первом приближении периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля с конечным последействием, дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка с запаздыванием и дифференциального уравнения Ван-дер-Поля второго порядка с членом запаздывающего аргумента. Показать степень влияния параметра запаздывания на амплитудно-частотные характеристики периодических решений.

**Методы исследования.** При обосновании проекционно-итерационного метода применены: метод Галеркина, метод последовательных приближений, функции Грина об ограниченных решениях на числовой оси, метод сведения автономной системы к неавтономной системе уравнений и тригонометрический ряд Фурье.

**Научная новизна работы.**

* Дано обоснование проекционно-итерационного метода для изучения вопросов существования и приближенного построения периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечными и бесконечными последействиями.
* Доказаны взаимообратные утверждения: теорема о существовании приближений Галеркина в окрестности точного периодического решения и теорема о существовании точного периодического решения в окрестности приближений Галеркина для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.
* Дано обоснование применимости проекционно-итерационного метода для построения периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром и конечным последействием.
* Методом гармонического баланса в первом приближении построены и проанализированы периодические решения следующих систем: интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля с конечным последействием, дифференциального уравнения Дюффинга с запаздыванием, а также дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля второго порядка с членом запаздывающего аргумента.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит как теоретический, так и прикладной характер. Результаты диссертации могут быть использованы для исследования периодических решений новых классов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Разработанные алгоритмы позволяют находить решения конкретных модельных уравнений и могут быть адаптированы для применения в различных областях науки и техники.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

* методом проекционного метода Галеркина доказано существование периодических решений в окрестности точных периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечным и бесконечным последействием. Оценена погрешность разности приближённых и точных решений.
* на основе функции Грина методом последовательных приближений доказано существование точных периодических решений в окрестности приближений Галеркина для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечным и бесконечным последействием. Оценена погрешность их разности.
* обоснована применимость проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром.
* определены методом гармонического баланса первые приближения периодических решений: системы интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием, дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка и дифференциального уравнения Ван-дер-Поля второго порядка с членом запаздывающего аргумента. Определена степень влияния параметра запаздывания на амплитудно-частотные характеристики приближённых периодических решений.

**Апробация результатов исследований.** Результаты настоящей работы были доложены и обсуждены на:

* Международной научно-практической конференции “Эпоха СССР: оценка временем” (г. Каракол, ИГУ им. К. Тыныстанова, 14-15 октября 2021 г.)
* Международной научно-практической конференции «Проблемы и будущее технологий преподавания естественно-математических наук в условиях цифровизации», посвященной 70-летию доктора педагогических наук КГУ имени И. Арабаева, профессора Торогельдиевой Конуржан Макишевны и 70-летию кафедры «Математика и технологии ее преподавания» (г. Бишкек, КНУ им. И. Арабаева, 21-22 мая 2022 г.)
* Международной научно-практической конференции: «Историко-просветительское значение г. Каракол в развитии Кыргызстана» (г. Каракол, ИГУ им. К. Тыныстанова, 10-11 июня 2022 г.)
* Международной научно-практической конференции «Современные цифровые трансформации устойчивого развития общества, образования и науки в эпоху глобализации: опыт прошлого, возможности настоящего, стратегии будущего», посвященной 90-летию общественного и политического деятеля Абсамата Масалиева (г. Баткен, БатГУ, 28-29 апреля 2023 г.)
* Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и образования", посвященной 80-летию д. ф.-м. н., профессора, член-корреспондента НАН КР, почетного академика НАН КР Келдибая Алымкулова (г. Ош, ОшГУ, 12-13 мая 2023 г.)
* Международной научно-практической конференции «VI чтения И. Бекбоева: проблемы современной модели образования: актуальные вопросы, достижения и инновации», посвященной Народному учителю КР, лауреату государственной премии в области науки и техники, член-корреспонденту НАН КР, академику НАН, Бекбоеву Исак Бекбоевичу (г. Бишкек, ТалГУ, 8-9 июня 2023 г.)
* Международной научной конференции «V Борубаевские чтения», посвященной 70-летию НАН КР и 40-летию Института математики НАН КР (г. Бишкек, ИМ НАН КР, 20-21 июня 2024 г.)

**Публикации:** Основное содержание диссертации опубликовано в 14 статьях 1 статья входит в базу данных Veb of Science**.**

**Личный вклад соискателя.**

Постановка задач и анализ полученных результатов осуществлялись под руководством научного руководителя А.Т. Алымбаева. Под его руководством были определены ключевые направления исследования, а также разработаны основные методологические подходы. Доказательство теорем, выведение следствий и создание иллюстративных примеров выполнены соискателем.

Соискатель активно участвовала в апробации результатов исследования на различных международных научно-практических конференциях, где представляла доклады и участвовала в обсуждениях, получив положительные отзывы и предложения по дальнейшему развитию исследований.

**Структура и объём диссертации.** Диссертационная работа состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, четырех глав, содержащих 12 разделов, заключения и списка использованных источников из 73 наименований, 102 стр. компьютерного текста.

**ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

**Во введении** излагаются цель и задачи исследования, обосновываются актуальность темы, научная новизна, практическая и теоретическая ценность работы.

**В первой главе** представлен краткий обзор научных работ, посвящённых проекционно-итерационным методам исследования периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, а также близких по содержанию задач, рассматриваемых в данной диссертационной работе.

Основы проекционного метода Галеркина заложены в работах В. Ритца, Б.Г. Галеркина, Л.В. Канторовича, М.В. Келдыша, И.В. Сварского, Н.И. Польского и других авторов. Вопросы построения периодических решений автономных и неавтономных систем дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, различных типов интегро-дифференциальных уравнений по методу Галеркина были изучены в трудах М. Урабе, А.М. Самойленко, О.Д. Нуржанова, Б. Вуйтовича, А.Б. Кибенко, П.П. Забрейко, С.О. Стрыгина, A. Stokes, Yamamoto Norio и других авторов.

Метод гармонического баланса, который относится к семейству методов Галеркина, был разработан и обоснован Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым. Широкий круг вопросов, связанных с методом гармонического баланса, его обобщениями и приложениями, рассмотрен Е.Н. Розенвассером, Л. Чезари, Дж. Хейлом. Один из наиболее эффективных вариантов метода гармонического баланса для определения предельных циклов в математических моделях нелинейной динамики предложен А.А. Кондратьевым, S. Zelik и B. Delamotte.

Следует выделить работу М. Урабе, посвящённую вопросам обоснования метода Галеркина применительно к периодической системе дифференциальных уравнений.

где - периодическая по вектор-функция.

Периодические решения системы (1) ищутся в виде тригонометрического ряда Фурье. М. Урабе в своей работе дал общие теоремы о взаимосвязях между точным решением и их приближениями по методу Галеркина. Он доказал утверждения, позволяющие на основании существования приближённых периодических решений сделать вывод о существовании точных периодических решений системы (1). Также доказано обратное утверждение о существовании приближений по методу Галеркина в окрестности точного периодического решения системы (1).

**Во второй главе** освещены методология и методы исследования периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. В пункте 2.1 определены объект, предмет и задачи исследования. В пункте 2.2 рассматривается необходимый аппарат для обоснования проекционного метода Галеркина построения периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, как с конечным, так и бесконечным последействием.

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка вида:

где периодическая с периодом функция, представимая в виде ряда Фурье:

На множестве периодических функций введен оператор , такой, что

С учетом (3) уравнение (2) записываем в виде:

**Теорема 1.** Пусть -периодическое решение (4). Если

-периодическое решение представимо в виде формулы

**Теорема 2.** Для разности имеет место оценка

где

Устанавливается критерий разрешимости системы алгебраических уравнений вида

, для которой  и

**Теорема 3.** Предположим, что система (5) имеет приближенное решение и существуют постоянные и для которых выполняются условия:

1. .

.

1. .

тогда система (5) имеет единственное решение в области и имеет место оценка

Рассмотрена система алгебраических уравнений вида

где - вектор-функции одинаковой размерности.

– непрерывно дифференцируемые функции в области , такие, что

и -действительная матрица, для которой малый параметр.

**Теорема 4.** Предположим, что система (6) имеет приближенное решение такое, что и есть постоянные и для которых выполняются условия:

1. .

.

1. .

тогда система (6) имеет единственное решение такое, что в области и имеет место оценка

**Третья глава** посвящена обоснованию проекционно- итерационного метода для исследования периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием вида:

-периодическое решение дифференциального уравнения (7) ищется в виде

коэффициенты которого находятся из системы алгебраических уравнений

или

В пункте 3.1 показана разрешимость уравнения (11) и сходимость при к точному -периодическому решению  уравнения (7), иными словами, существование приближённого -периодического решения в окрестности точного -периодического решения .

**Теорема 5.** Пустьдифференциальное уравнение (7) удовлетворяет следующим условиям:

1) существует -периодическое решение области

2) удовлетворяет требованиям теоремы 3;

3)

4)

Тогда существует достаточно большое , такое, что при всех существуют приближённые -периодические решения Галеркина уравнения (7), равномерно сходящиеся при к точному периодическому решению такое что, справедлива оценка

В пункте 3.2 рассматривается дифференциальное уравнение

функция Грина вида

обладающая свойством

с учетом функции Грина (12) дифференциальное уравнение (7) приводим к интегральному уравнению вида

Доказано обратное утверждение теоремы 5, т.е. существование точного -периодического решения , уравнения (7) в окрестности приближения Галеркина

**Теорема 6.** Пусть функция является решением уравнения (7) и существует функция Грина вида (12), обладающяя свойством (13). Тогда функция также является решением интегрального уравнения (14).

**Теорема 7.** Пусть выполняется условие теоремы 6. Если выполняется условие то существует -периодическое решение интегрального уравнения (14), а вместе с ним и периодическое решение дифференциального уравнения (7) и для разности справедлива оценка

В пунктах 3.3, 3.4, 3.5 результаты пункта 3.2 перенесены в интегро-дифференциальные уравнения вида

)

и вида

где – вещественное число,

– положительное вещественное число, непрерывно-дифференцируемые-периодические по функции,

непрерывная *по* и дифференцируемая пои удовлетворяющая следующему неравенству функция:

Периодическое решение уравнения (15), (16) ищем в виде

Поставим (18) в уравнение (15) получим:

Отсюда имеем

**Теорема 8***.* Пусть интегро-дифференциальное уравнение (15) имеет -периодическое решение и удовлетворяет следующим требованиям:

а) выполняется требование теоремы 2;

б)

в)

Тогда, алгебраическое уравнение (19) имеет единственное решение

такое, что для разности между точным и приближённым решением справедлива оценка

Поставив ряд (18) в (16) уравнение, получим уравнение, аналогичное алгебраическому уравнению (19):

здесь

Для уравнения (16) доказано, что при выполнении условия (17) утверждение аналогично теореме 8, и для разности получена оценка:

Пункт 3.6. посвящен одному из вариантов проекционно-итерационного метода нахождения периодических решений интегро-дифференциального уравнения второго порядка с конечным последействием вида (15), и для разности периодического решения и приближённого решения получена оценка:

содержащий идеи метода последовательных приближений и метода Галеркина.

**В четвертой главе** рассматриваются задачи исследования периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием, обладающей свойством автономности.

Предположим, что для невозмущенной системы () найдено периодическое решение , периода .

В пункте 4.1 заменой переменных

где – -мерная -периодическая матрица, система (22) сведена к -периодической системе уравнений

В качестве примера рассматривается задача приводимости к неавтономной системе уравнений, уравнения Дюффинга с интегральным членом вида:

где достаточно малое число, малый параметр,

В пункте 4.2 представив систему (24) в виде

показана применимость проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений. Решение системы (25) будем находить в виде тригонометрического полинома

коэффициенты определяем из системы алгебраических уравнений вида

, (27)

где ,

Обозначим через функцию Грина задачи об ограниченных решениях на числовой оси обладающей свойствами:

1. единичная матрица;

которая удовлетворяет систему уравнений

**Теорема 9.** Пусть система (27) имеет функцию Грина обладающую свойствами а) и б), тогда и систему (25) можно записывать в виде:

Решаем систему алгебраических уравнений (29) методом последовательных приближений

**Теорема 10.** Пусть система (25) имеет -периодическое по решение в области и удовлетворяют условиям

в) Линейная система имеет функцию Грина обладающую свойством

1)

2)

где положительные постоянные;

3) при

Тогда в окрестности точного решения существуют приближения Галеркина , для разности верна оценка

В пункте 4.3доказано обратное утверждение теоремы 10, т.е. существование точного решения системы (25) в окрестности приближения Галеркина .

**Теорема 11.** Пусть система интегро-дифференциальных уравнений (25) такова, что выполняются условия:

а) существуют приближения Галеркина всех порядков , принадлежащие области ;

б) Линейная система имеет функцию Грина обладающую свойством 1), 2) теоремы **10**.

в)

Тогда система (25) имеет в окрестности приближения Галеркина точное -периодическое решение .

Для разности справедлива оценка

Далее в пункте 4.4 рассматривается задача построения периодических решений в первом приближении:

* системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-Дер-Поля:

(31)

где параметр;

* дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка с запаздывающим аргументом:

где – малый параметр, - численный параметр, – величина запаздывания

* дифференциального уравнения Ван-дер-Поля второго порядка с запаздывающим аргументом:

где – величина запаздывания и

Периодическое решение системы (31) в первом приближении ищется в виде:

где частота колебания, подлежащее к выборам коэффициенты.

Вычисление показывает, что

и

На фазовой плоскости получено периодическое решение системы (31) которое образует семейство эллипсов вида

Далее периодическое решение в первом приближении уравнении Дюффинга (32) ищется в виде

Получены следующие значения частоты и коэффициентов

при

В первом приближении периодическое решение уравнения (32) имеет вид

Приближенное периодическое решение уравнения Ван-дер-Поля (33) ищется согласно формуле

Вычислив частоту и коэффициентов , найдены числовые значения:

В первом приближении периодическое решение уравнении записывается согласно выражениям

отсюда

На фазовой плоскости () получим:

уравнение эллипса.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Ван-дер-Поля с запаздыванием вида

где – величина запаздывания и

Находим периодическое решение в первом приближении в виде

где коэффициенты подлежат к выбору. Вычисление показывает, что в первом приближении:

(36)

Так как

Возведя в квадрат обоих частей равенства (38) и сложив, получим уравнение кривой на плоскости ():

В системе координат плоскости () кривая уравнении образует эллипс с центром О (0,0) и полуосями

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В диссертации излагаются вопросы существования и отыскания периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием второго порядка, а также системы интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием первого порядка с малым параметром, обладающим свойством автономности. Для исследования периодических решений дается обоснование применимости проекционно-итерационного метода, сочетающего идеи проекционного метода Галеркина и метода последовательных приближений с применением функции Грина.

Получены следующие результаты:

1. Дано обоснование применимости проекционно-итерационного метода исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием второго порядка, а также системы интегро-дифференциального уравнения с конечным последействием первого порядка с малым параметром, обладающим свойством автономности.
2. Доказана теорема о существовании приближения Галеркина в окрестности точного периодического решения и оценена величина разности приближенных и точных периодических решений.
3. Доказаны обратные теоремы существования точных периодических решений в окрестности приближений Галеркина и оценена их разность.
4. В первом приближении методом гармонического баланса, который относится к типу метода Галеркина, построены периодические решения системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля с конечным последействием, дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка с запаздыванием и дифференциального уравнения второго порядка Ван-дер-Поля с членом запаздывающего аргумента. Показано, что величина параметра запаздывания существенно влияет на амплитудно-частотные характеристики периодических решений.

Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами. Полученные результаты являются новыми. Алгоритмы, полученные в работе, можно использовать для исследования периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений более высокого порядка, а также для разработки методов численного моделирования и анализа в различных приложениях, связанных с нелинейными динамическими системами.

**СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

1. **Бапа к.А.** Влияние интегрального члена к решению системы уравнений Ван-дер-Поля. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. /**/ Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. -Бишкек, 2022. - №1. - С3-7. <http://www.science-journal.kg/media/Papers/nntiik/2022/1/%D0%9D%D0%9D%D0%A2_-_1_2022%D0%B3_pdf_3-7.pdf>
2. **Бапа к.А.** Дюффингдин кечиккен аргументтүү мүчөнү кармаган экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемесинин мезгилдик чыгарылышы. [Текст] / А.Бапа к. // Вестник Кыргызстана. – Бишкек, 2023. - №2 (1). – С312-316. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=60061648>
3. **Бапа к.А.** Квазисызыктуу дифференциалдык теңдемелердин системасынын мезгилдик чыгарылышы. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. //** Известия ВУЗов Кыргызстана. - Бишкек, 2022. - №2. – С.21-26. <http://www.science-journal.kg/media/Papers/ivk/2022/1/%D0%98%D0%92%D0%9A-_2_2022%D0%B3_pdf_21-26.pdf>
4. **Бапа к.А.** О методе Галеркина построения периодических решений квазилинейной интегро-дифференциальной уравнении второго порядка. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. /**/ Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и образования» посвященной 80- летию заслуженного деятеля науки КР, члена-корр. НАН КР, д.ф.-м.н., профессора, почетного академика НАН КР К.Алымкулова. - Ош, 2023. - №1. – С13-21. <http://alymkulov-0.oshsu.kg/uploads/1_.pdf>
5. **Бапа к.А.** О методе гармонического баланса построения периодического решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. //**ALATOO ACADEMIC STUDIES. - Бишкек, 2022. - №2. -С**. 459-463.** <https://drive.google.com/file/d/1osM-H1KlKYqaH9v1Ki_qt2bOdk9Osf2i/view>
6. **Бапа к.А.** О существовании периодического решения системы нелинейных автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием.[Текст] / А.Бапа к.  **/**/ Вестник науки и образования. - Иваново, 2022. - № 1 (121). – С16-21 стр. [Электронный ресурс]. URL:<http://scientificjournal.ru/images/PDF/2022/121/o-sushchestvovanii-.pdf>
7. **Бапа к.А.** Периодическое решение дифференциального уравнения Ван-дер-Поля с запаздыванием. [Текст] / А.Бапа к.  **/**/ Вестник БатМУ. -Баткен, 2023. - №1. – С3-6.
8. **Бапа к.А.** Периодическое решение квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. /**/ Вестник Иссык-Кульского университета. – Каракол, 2022. - № 53. -С28-33 <http://libraryiksu.kg/vestnik>
9. **Бапа к.А.** Периодическое решение системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. /**/ Вестник науки и образования. - Иваново, 2022. - № 1 (121). - С5-12 стр. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48007904>
10. **Бапа к.А.** Построение решения системы квазилинейных уравнений методом простой итерации. [Текст] / А.Бапа к.  **/**/ ALATOO ACADEMIC STUDIES. - Бишкек, 2022. - №3. -С402-406 . https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49822432
11. **Бапа к.А.** Существование периодического решения дифференциального уравнения второго порядка. Метод функции Грина. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. /**/ Вестник Иссык-Кульского университета. – Каракол, 2023. - № 55. -С7-14 [https ://libraryiksu.kg/vestnik/arhiv/75](https://libraryiksu.kg/vestnik/arhiv/75)
12. **Bapa kyzy A.** Application of the summary-difference method with a regularizer to construct an asymptotic solution to the boundary value problem of a system of nonlinear difference equations. [Текст] / **A.T. Alymbaev.,** Myrzakylova M.T., **А.Bapa k. /**/Herald of institute mathematics of the national academy of sciences of the Kyrgyz republic. №2, 2021. - 74-80 стр. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49308086>
13. **Bapa kyzy A**. Periodic solutions of a second- order nonlinear Volterra

integro-differential equation [Текст]. / A.T Alymbaev, A. Bapa kyzy, F.K. Sharshembieva /Advances in Differential Equations and Control Processes, Volume 31, Number 2, 2024, p. 285-297.

1. **Bapa kyzy A.** The Galerkin method for constructing solutions to a quasilinear differential equation of the second order. Herald of institute mathematics of the national academy of sciences of the Kyrgyz republic №1 2022. -99-108 c

**РЕЗЮМЕ**

**диссертации Бапа кызы Айнуры на тему : “Проекционно – итерационные методы исследования периодических решений интегро – дифференциальных уравнений типа Вольтерра” на соискание учёной степени кандидата физико- математических наук по специальности 01.01.02- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление**

**Ключевые слова:** Периодическое решение, квазилинейные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения второго порядка, система интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, проекционно-итерационный метод, метод Галеркина, метод последовательных приближений, функция Грина.

**Объекты исследования:** Квазилинейные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения второго порядка типа Вольтерра, система интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, обладающий свойством автономности.

**Цели работы:** Обоснование применимости проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием второго порядка, а также системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром, обладающей свойством автономности.

**Методы исследования:** при обосновании проекционно-итерационного метода применены: метод Галеркина, метод последовательных приближений, функция Грина, метод сведения автономной системы к неавтономной системе уравнений и тригонометрический ряд Фурье.

**Научная новизна работы.** Обоснован проекционно-итерационный метод для изучения вопросов существования и приближённого построения периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра. Доказаны взаимообратные утверждения: теорема о существовании приближений Галеркина в окрестности точного периодического решения и теорема о существовании точного периодического решения в окрестности приближений Галеркина для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. Обоснована применимость проекционно-итерационного метода для построения периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром конечным и бесконечным последействием.

**Бапа кызы Айнуранын «Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарын изилдөөнүн проекциялык-итерациялык ыкмалары» деген темада 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн жазылган диссертациясынын**

**РЕЗЮМЕСИ**

**Негизги сөздөр:** мезгилдик чыгарылыш, квазисызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер, автономдук касиетке ээ кичине параметрлүү интегро-дифференциалдык теңдемелер системасы, проекциялык-итерациялык ыкма, Галеркин ыкмасы, удаалаш жакындатуу ыкмасы, Грин функциясы.

**Изилдөө объектиси:** Квазисызыктуу дифференциалдык жана экинчи тартиптеги Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер, автономдук касиетке ээ кичине параметрди кармаган интегро-дифференциалдык теңдемелер системасы.

**Иштин максаты:** Кичине параметрлүү, автономдук касиетке ээ болгон биринчи тартиптеги интегро-дифференциалдык теңдемелер системасынын жана чексиз же чектелген кечиккен аргументтүү квазсызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарын изилдөөдө проекциялык-итерациялык ыкманын колдонулушун негиздөө.

**Изилдөө ыкмалары:** проекциялык-итерациялык ыкманы негиздөөнүн алкагында төмөнкү ыкмалар колдонулган: Галеркин ыкмасы, удаалаш жакындаштыуу ыкмасы, Грин функциясы, автономдук системаны автономдук эмес системага келтирүү ыкмасы жана Фурьенин тригонометриялык катарлары.

**Илимий жаңылыгы:** квазисызыктуу дифференциалдык жана экинчи тартиптеги Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарынын жашашын изилдөө жана жакындаштырып тургузуу боюнча проекциялык-итерациялык ыкманын негиздемеси берилген. Экинчи тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теӊдемелер үчүн өз ара тескери ырастоолор: так мезгилдик чыгарылыштын аймагында Галеркиндин жакындаштырууларынын жана, тескерисинче, Галеркиндин жакындаштырууларынын аймагында так мезгилдик чыгарылыштын жашашы тууралуу теоремалар далилденген. Кичине параметрлүү, чектүү таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелер системасынын мезгилдик чыгарылыштарын тургузуу үчүн проекциялык-итерациялык ыкманын колдонулуу мүмкүнчүлүктөрү негизделген.

**RESUME**

**of the dissertation by Bapa kyzy Ainura on the topic: “Projection-iteration methods for studying periodic solutions of integro-differential equations of Volterra type” for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control**

**Key words**: Periodic solution, quasilinear differential and integro-differential equations of the second order, system of integro-differential equations with a small parameter, projection-iteration method, Galerkin method, method of successive approximations, Green's function.

**Objects of research:** Quasilinear differential and second-order integro-differential equations of Volterra type, a system of integro-differential equations with a small parameter, which has the property of autonomy.

**Objectives of the work:** Justification of the applicability of the projection-iteration method for studying periodic solutions of quasilinear differential and integro-differential equations with finite and infinite second-order aftereffects, as well as a system of first-order integro-differential equations with a small parameter, which has the property of autonomy.

**Research methods:** when justifying the projection-iteration method, the following were used: the Galerkin method, the method of successive approximations, the Green's function, the method of reducing an autonomous system to a non-autonomous system of equations and the Fourier trigonometric series.

**Scientific novelty of the work.** The projection-iteration method is substantiated for studying questions of the existence and approximate construction of periodic solutions of quasi-linear differential and second-order integro-differential equations of Volterra type.Reciprocal statements are proved: a theorem on the existence of Galerkin approximations in the neighborhood of an exact periodic solution and a theorem on the existence of an exact periodic solution in the neighborhood of Galerkin approximations for second-order differential and integro-differential equations.

The applicability of the projection-iteration method for constructing periodic solutions of a system of integro-differential equations with a small parameter of finite and infinite aftereffect is substantiated.