**Институт математики Национальной академии наук**

**Кыргызской Pеспублики**

**Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына**

Диссертационный совет Д 01.24.701

На правах рукописи

УДК 517.968

**Бапа кызы Айнура**

**Проекционно – итерационные методы исследований периодических решений интегро – дифференциальных уравнений типа Вольтерра**

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

**Бишкек – 2024**

Работа выполнена на кафедре математики, информатики и информационных технологий Иссык-Кульского государственного университета им. Касыма Тыныстанова.

**Научный руководитель:** **Алымбаев Асангул Темиркулович**, доктор физико-математических наук, профессор факультета математики и технологий обучения Кыргызского государственного университета им. И.Арабаева.

**Официальные оппоненты:**

**Ведущая организация:**

Защита состоится «\_\_» \_\_\_\_\_\_ 202\_года в \_\_ на заседании диссертационного совета Д 01.24.701 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете имени Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374.

Идентификатор защиты – [\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_](https://vc1.vak.kg/b/012-ltf-b7j-lgy).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики (720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265а), и Кыргызском национальном университете имени Ж. Баласагына, (720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547) и на сайте [www.vak.kg](http://www.vak.kg).

Автореферат разослан “\_\_” \_\_\_\_\_\_ 202\_ г.

Ученый секретарь диссертационного совета

кандидат физико-математических наук, доцент Шаршембиева Ф. К.

**ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

**Актуальность темы диссертации.** Исследование многих физических задач сводятся к изучению периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, как с конечными, так и бесконечными последействиями и их систем.

Для исследования периодических решений этих уравнений имеются качественные аналитические и асимптотические методы, созданные А. Пуанкаре (1879-1912 гг.), Н.М. Крыловым (1912-1955 гг.), Н.Н. Боголюбовым (1934-1991), Ю.А. Митропольским (1951-2006 гг.), А.М. Самойленко (1973-1976 гг.) и другими авторами. Эти методы успешно применяются в исследовании слабо - линейных систем, в которых эффект от нелинейности проявляются медленно. Однако, при исследовании нелинейных систем общего вида их применимость ограничивается узкими классами уравнений.

В связи с этим в настоящее время одной из важными и актуальными задачами являются разработка и обоснование методов, которые применимы для исследования решений уравнений общего вида с сильными нелинейностями.

В диссертационной работе рассматриваются вопросы исследования существования и построения периодических решений дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, а также системы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, обладающий свойством автономности. В исследовании применяются и обосновывается проекционно- итерационный метод, сочетающий идеи метода Галеркина и метода последовательных приближений.

**Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими работами, проводимыми образовательными и научными учреждениями.**

Исследования по теме диссертации проводилось в рамках утвержденной ученым советом Иссык-Кульского государственного университета им. К.Тыныстанова по тематике «проекционно – итерационные методы исследований периодических решений интегро – дифференциальных уравнений типа Вольтерра».

**Цели и задачи исследования.** Целью работы является решение следующих задач:

1. Доказательство существования приближений Галеркина дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности точных решений. Доказательство, обратного утверждения о существовании точного решения в окрестности приближений Галеркина;
2. Обоснование применимости метода Галеркина для исследования периодических решений системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром;
3. Построение методом гармонического баланса в первом приближении периодические решения системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-Дер-Поля, дифференциального уравнения Дюффинга с запаздывающим аргументом и дифференциального уравнения Ван-Дер-Поля второго порядка с запаздыванием.

**Научная новизна работы.**

- дано обоснование метода Галеркина для изучения вопросов существования и приближенного построения периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка как конечным, так и бесконечным последействием;

- методом функции Грина задачи об ограниченных решениях на числовой оси, доказано существование точного решения и оценена погрешность разности между приближенным и точным решением дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений;

- показано применимость метода Галеркина для построения периодических решений системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром;

- методом гармонического баланса построены в первом приближении периодические решения системы интегро-дифференциального уравнения Ван-дер-Поля, Дюффинга с запаздывающим аргументом.

**Практическая значимость полученных результатов.**

Работа носит теоретический и прикладной характер. Результаты диссертации могут быть использованы, для исследования периодических решений новых классов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений; алгоритмами работы можно найти решение конкретного модельного уравнения; при разработке спецкурсов для магистрантов и докторантов – математиков и механиков.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

1. Доказательство теоремы существования приближения Галеркина в окрестности точного периодического решения дифференциального и интегро-дифференциального уравнения второго порядка, с конечным и бесконечным последействием.
2. Доказательство теоремы существования точного периодического решения в окрестности приближения Галеркина дифференциального и интегро-дифференциального уравнения второго порядка с конечным и бесконечным последействием.
3. Обоснование применимости метода Галеркина для построения периодического решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром.
4. Применение метода гармонического баланса для построения в первом приближении периодического решения уравнения Ван-дер-Поля и Дюффинга с запаздывающим аргументом и интегральным членом.

**Личный вклад соискателя.** Цели и задачи исследования диссертационной работы поставлены научным руководителем А.Т.Алымбаевым. В диссертацию включены материалы, которые принадлежат автору.

**Апробация результатов исследований.** Результаты настоящей работы были доложены и обсуждены на:

* международной научно-практической конференции “Эпоха СССР: оценка временем”( г.Каракол, ИГУ им.К.Тыныстанова, 14-15 октябрь, 2021 г)
* международной научно-практической конференции «Проблемы и будущее технологий преподавания естественно-математических наук в условиях цифровизации», посвященная 70-летию доктора педагогических наук КГУ имени И.Арабаева, профессора Торогельдиевой Конуржан Макишевны и 70-летию кафедры «Математика и технологии ее преподавания» (г.Бишкек, КНУ им.И.Арабаева, 21-22 май 2022 г.)
* международной научно-практической конференции: «Историко-просветительское значение г. Каракол в развитии Кыргызстана» (г.Каракол, ИГУ им.К.Тыныстанова, 10-11 июнь 2022 г.)
* международной научно-практической конференции «Современные, цифровые трансформации устойчивого развития общества, образования и науки в эпоху глобализации: опыт прошлого, возможности настоящее, стратегии будущего» посв. 90-летию общественного и политического деятеля Абсамат Масалиева (г.Баткен, БатГУ, 28-29 апрель 2023 г.)
* международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и образования", посвященной 80-летию д.ф.-м.н., профессора, членкорреспондента НАН КР, почетного академика НАН КР Келдибая Алымкулова (г.ОШ, ОшГУ, 12-13 май 2023 г.)
* международной научно-практической конференции «VI чтения И. Бекбоева: проблемы современной модели образования: актуальные вопросы, достижения и инновации» посвященной Народному учителю КР, лауреату государственной премии в области науки и техники, член-корр. НАН КР, академик НАН, Бекбоеву Исак Бекбоевичу (г. Бишкек, ТалГУ, 8-9 июнь 2023 г.)
* международной научной конференции «V Борубаевские чтения”, посвященная 70-летию НАН КР и 40-летию Института математики НАН КР. (г.Бишкек, ИМ НАН КР, 20-21 июнь 2024 г. )

**Полнота отражения результатов диссертации в публикациях.** Основное содержание диссертации опубликовано в статьях [12-20], [22-25], [65], [73]. В совместных работах [12-20] и [73], единоличных работах[22-25], [65]. Постановка задач и обсуждение результатов принадлежит научному руководителю А.Т.Алымбаеву, доказательство теорем, следствий и построение иллюстративных примеров – автору.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, четырех глав, содержащих 14 разделов, заключения и списка использованных источников из 73 наименований, 102 стр. компьютерного текста.

В автореферате использована и сохранена система нумерации, принятая в диссертации: двойная сквозная нумерация внутри каждой главы. Например, формула (4.2) – это вторая формула главы 4, теорема 3.5 – это пятая теорема главы 3, пример 3.4 – это четвертый пример главы 3.

**ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

В введении излагаются цель и задачи исследования, обосновывается актуальность темы, научная новизна, практическая и теоретическая ценность работы.

В первой главе, «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ» представлен краткий анализ научных работ, посвящённых проекционно-итерационным методам исследования периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, а также близких по содержанию задач, рассматриваемых задачам в данной диссертационной работе

Основы проекционного метода Галеркина заложены в работах В. Ритца, Б.Г.Галеркина, Л.В.Канторовича, М.В.Келдыша, И.В. Сварского, Н.И. Польского и других авторов.

Вопросы построения периодических решений автономных и неавтономных систем дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, различных типов интегро-дифференциальных уравнений по методу Галеркина были изучены в трудах М.Урабе, А.М.Самойленко, О.Д. Нуржанова , Б.Вуйтовича, О.Д. Нуржанова, Б.Вуйтовича, А.Б. Кибенко , П.П. Забрейко, С.О.Стрыгина, A.Stokes, Yamamoto Norio и других авторов.

Метод гармонического баланса, которое относится семейству метода Галеркина разработан и обоснован Н.М. Крыловым и Н.Н.Боголюбовым. Широкий круг вопросов, связанных с методом гармонического баланса, его обобщениями и приложениями, рассмотрен Е.Н. Розенвассером, Л.Чезари, Дж.Хейлом. Один из наиболее эффективных вариантов метода гармонического баланса для определения предельных циклов в математических моделях нелинейной динамики предложен А.А.Кондратьева, S.Zelik, B.Delamotte.

Следует выделить работу М.Урабе, посвященные вопросам обоснования метода Галеркина применительно к периодической системе дифференциальных уравнений вида

где - периодическая по вектор-функция.

Периодические решения системы (1) ищется в виде тригонометрического ряда Фурье. М.Урабе в своей работе дал общие теоремы о взаимосвязях между точным решением и их приближениями Галеркина. Он доказал утверждения, позволяющие на основании существования приближенных периодических решений, сделать вывод о существовании точных периодических решений системы (1). Доказано, обратное утверждение о существовании приближения Галеркина в окрестности точного периодического решения системы (1).

**Вторая глава посвящена** методологию и методу исследования периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. В пункте 2.1 определены объект, предмет и задачи исследования. В пункте 2.2 рассматривается необходимый аппарат, для обоснования проекционного метода Галеркина построения периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, как с конечным, так и бесконечным последействием.

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка вида

где периодическая с периодом функция, представимая в ряд Фурье

На множестве периодических функций введен оператор , такое, что

С учетом (6-3) уравнение (5-2) записываем в виде

**Теорема 1.** Пусть -периодическое решение (4). Если

-периодическое решение представимо в виде формулы

**Теорема 2.** Для разности имеет место оценка

где

Устанавливается критерий разрешимости системы алгебраических уравнений вида

, для которой  и

**Теорема 3.** Предположим, что система (5) имеет приближенное решение и существует постоянные и для которых выполняются условия:

1. .

.

1. .

тогда система (5) имеет единственное решение в области и имеет место оценка

Рассмотрена система алгебраических уравнений вида

где - вектор-функции одинаковой размерности.

– непрерывно дифференцируемые функции в области , такие, что

и -действительная матрица, для которой малый параметр.

**Теорема 4.** Предположим, что система (6) имеет приближенное решение такое, что и есть постоянные и для которых выполняются условия:

1. .

.

1. .

тогда система (6) имеет единственное решение такое, что в области и имеет место оценка

**Третья глава посвящена обоснованию метода Галеркина для исследования периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием вида**

Согласно алгоритму метода Галеркина -периодическое решение дифференциального уравнения (7) ищется в виде

коэффициенты которого находим из системы алгебраических уравнений

или

В пункте 3.1 показано разрешимость уравнения (11) и сходимость при к точному -периодическому решению  уравнении (7), иными словами, существование приближенного -периодического решения (10) в окрестности точного -периодического решения .

**Теорема 5.** Пустьдифференциальное уравнение (7), такое что, удовлетворяет следующим условиям:

1) существует -периодическое решение области

2) удовлетворяет требованиям теоремы (2 туура);

3)

4)

Тогда, существует достаточно большое , такое, что при всех существуют приближенные -периодические решения Галеркина равномерно сходящиеся при к точному периодическому решению , такое что, справедливо оценка

**В 3.2 рассматривается д**ифференциальное уравнение  функцией Грина вида

обладающая свойством

с помощью функции Грина (12) дифференциальное уравнение (7) приводим к интегральному уравнению на числовой оси вида

В пункте 3.2 методом функции Грина на числовой оси доказано обратное утверждение теоремы 5, т.е. существование точного -периодического решения , в окрестности приближения Галеркина

**Теорема 6.** Пусть функция является решением уравнения (7) и существует функция Грина вида (12) задачи об ограниченных решениях, обладающяя свойством (13). Тогда функция также является решением интегрального уравнения (14).

**Теорема 7.** Пусть выполняется условие теоремы (6). Если выполняется условие то тогда существует -периодическое решение интегрального уравнения (14), а вместе с ним периодическое решение дифференциального уравнения (7).

Для разности справедливо оценка

В пунктах 3.3, 3.4, 3.5 результаты пункта 3.2 перенесены в интегро-дифференциальные уравнения

)

где – вещественное число, непрерывно-дифференцируемые-периодические по функции,

– вещественное число, -периодическое по функция, непрерывная *по* и дифференцируемая пофункция, удовлетворяющая неравенству

Периодическое решение уравнения (15), (16) ищем в виде

Поставим (18) в уравнение (15) получим:

Отсюда имеем

**Теорема 8***.* Пусть интегро-дифференциальное уравнение (15) имеет -периодическое решение и удовлетворяет следующим требованиям:

а) выполняется требование теоремы 2;

б)

в)

Тогда, алгебраическое уравнение (19) имеет единственное решение

такое, что для разности между точным и приближенным решением справедлива оценка

Поставив ряд (18) в (16) уравнение, получим уравнение аналогичное к (19) алгебраическому уравнению:

здесь

Для уравнения (16), доказано при выполнении условии (17) утверждение аналогичной теореме 8 и для разности получена оценка

Пункт 3.6. посвящена проекционно-итерационному методу нахождения периодических решений интегро-дифференциального уравнения второго порядка с конечным последействием вида

содержащий идеи метода последовательных приближений и метода Галеркина.

В четвертой главе рассматривается задачи исследования периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием обладающей свойством автономности.

предположим, что для невозмущенной системы () найдено периодическое решение , периода .

В пункте 4.1 заменой переменных

где – -мерная -периодическая матрица, система (22) сведена к -периодической системе уравнений

В качестве примера рассматривается задача приводимости к неавтономной системе уравнений, уравнения Дюффинга с интегральным членом вида

где достаточно малое число, малый параметр,

В пункте 4.2 представив систему (24) в виде

показана применимость метода Галеркина для исследования периодических решений.

Решение системы (25) будем находить в виде тригонометрического полинома

коэффициенты определяем из системы алгебраических уравнений вида

, (24-27)

где ,

Обозначим через функцию Грина задачи об ограниченных решениях на числовой оси обладающей свойствами:

1. единичная матрица;

которая удовлетворяет систему уравнений

**Теорема 9.** Пусть система (27), такая, что имеет функцию Грина обладающую свойствами а) и б), тогда и систему (26) можно записывать в виде

Решаем систему алгебраических уравнений (29) методом последовательных приближений

**Теорема 10.** Пусть система (25) имеет -периодическое по решение в области и удовлетворяют условиям

в) Линейная система имеет функцию Грина обладающую свойством

1)

2)

где положительные постоянные;

3) при

Тогда в окрестности точного решения существуют приближения Галеркина , для разности верна оценка

.

В пункте 4.4 доказано обратное утверждение теоремы 10, т.е. существование точного решения системы (25) в окрестности приближения Галеркина .

**Теорема 11.** Пусть система интегро-дифференциальных уравнений (25) такова, что выполняются условия:

а) существуют приближения Галеркина всех порядков , принадлежащие области ;

б) Линейная система имеет функцию Грина обладающую свойством 1), 2) теоремы **10**.

в)

Тогда система (25) имеет в окрестности приближения Галеркина точное -периодическое решение .

Для разности справедлива оценка

В пункте 4.4 рассматривается построение периодических решений, в первом приближении:

* системы уравнений Ван-Дер-Поля:

(31)

где параметр;

* дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка с запаздывающим аргументом:

где – малый параметр, - численный параметр, – величина запаздывания

* дифференциального уравнения Ван-дер-Поля второго порядка с запаздывающим аргументом:

где – величина запаздывания и

Периодическое решение системы (28) в первом приближении ищется в виде

где частота колебания, подлежащее к выборам коэффициенты.

Вычисление показывает, что

и

На фазовой плоскости получено периодическое решение системы (31) которое образует семейство эллипсов вида

Далее периодическое решение в первом приближении уравнении Дюффинга (32) ищется в виде

Получены следующие значения частоты и коэффициентов

при

В первом приближении периодическое решение уравнения (32) имеет вид

Приближенное периодическое решение уравнения Ван-дер-Поля (33) ищется согласно формуле

Вычислив частоту и коэффициентов , найдены числовые значения:

В первом приближении периодическое решение уравнении записывается согласно выражениям

отсюда

На фазовой плоскости () получим:

уравнение эллипса.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Ван-дер-Поля с запаздыванием вида

где – величина запаздывания и

Находим периодическое решение в первом приближении в виде

где коэффициенты подлежат к выбору. Вычисление показывает, что в первом приближении:

(36)

Так как

Возведя в квадрат обоих частей равенства (38) и сложив, получим уравнение кривой на плоскости ():

В системе координат плоскости () кривая уравнении образует эллипс с центром О (0,0) и полуосями

**Заключение**

В диссертации излагается проекционный метод Галеркина, для исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием второго порядка.

Доказаны теоремы существования приближенных периодических решений в окрестности точного периодического решения, и методом функции Грина доказано обратное утверждение о существовании точного периодического решения в окрестности приближенного решения, полученного методом Галеркина.

Получены оценки погрешности разностей между приближенными и точными решениями рассматриваемых уравнений. В первом приближении получен алгоритм периодических решений дифференциального уравнения Ван-дер-Поля с интегральным членом с конечным последействием, системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием, а также дифференциального уравнения Дюффинга.

Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами. Полученные результаты являются новыми. Алгоритмы, полученные в работе, можно использовать для исследования периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений более высокого порядка.

Список опубликованных работ по теме диссертации:

1. **Alymbaev A.T., Myrzakylova M.T. Bapa kyzy A**. Application of the summary-difference method with a regularizer to construct an asymptotic solution to the boundary value problem of a system of nonlinear difference equations. / Вестник Института математики НАН КР. [Herald of institute mathematics of the national academy of sciences of the kyrgyz republic](https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=49308072" \o "Содержание выпусков этого журнала). №2 Бишкек-2021. ISSN 1694-8173. DOI: 19290/2021. 74-80 стр./ <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49308086>
2. **Алымбаев А.Т. Бапа кызы А.** Периодическое решение системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием. // Вестник науки и образования № 1-1 (121), г. Иваново 2022. ГОСТ 7.56-2002. ISSN 2312-8089. 5-12 стр. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48007904>
3. **Бапа кызы А.** О существовании периодического решения системы нелинейных автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием. // Вестник науки и образования № 1 (121), г. Иваново 2022. ГОСТ 7.56-2002. ISSN 2312-8089. 16-21стр/ <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48007906>
4. **Алымбаев А.Т. Бапа кызы А.** Влияние интегрального члена к решению системы уравнений Ван-дер-Поля. // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, №1, Бишкек 2022. ISSN 1694-8483. DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557. 3-7 стр. // <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48408348>
5. **Алымбаев А.Т. Бапа кызы А.** Квазисызыктуу дифференциалдык теңдемелердин системасынын мезгилдик чыгарылышы. // Известия ВУЗов Кыргызстана, №2, Бишкек-2022. ISSN 1694-7681. DOI: 10/26104/IVK.2019.45.557. 21-26 стр.// <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48485758>
6. **Bapa kyzy A.** The Galerkin method for constructing solutions to a quasilinear differential equation of the second order. // Вестник Института математики НАН КР. [Herald of institute mathematics of the national academy of sciences of the kyrgyz republic](https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=49308072). №1 Бишкек-2022. ISSN 1694-8173. DOI: 19290/2022. 99-108 стр. // <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49328828>
7. **Алымбаев А.Т. Бапа кызы А.** О методе гармонического баланса построения периодического решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием. // Alatoo academic studies. №2-2022 г. ISSN 1694-5263. DOI: https: doi.org/10.17015/aas.2022.222.58. 459-463 стр. // <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49469587>
8. **Бапа кызы А.** Построение решения системы квазилинейных уравнений методом простой итерации.// Alatoo academic studies №3-2022 г. ISSN 1694-5263. DOI: https: doi.org/10.17015/aas.2022.223.49. 402-406 стр. // <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49822432>
9. **Алымбаев А.Т. Бапа кызы А.** Периодическое решение квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. // Вестник Иссык-Кульского университета № 53. 2022. ISSN 1561 – 9516. 28-33 стр. // <https://libraryiksu.kg/vestnik/arhiv/72>
10. **Бапа кызы А.** Периодическое решение дифференциального уравнения Ван-дер-Поля с запаздыванием. // Вестник Баткенского государственного университета № 1. 2023. ISSN 1694-8726. 3-6 стр.//
11. **Алымбаев А.Т. Бапа кызы А.** О методе Галеркина построения периодических решений квазилинейной интегро-дифференциальной уравнении второго порядка.// Материалы МНК «актуальные проблемы математики и образования» посвященной 80-летию заслуженного деятеля науки КР, члена-корр. НАН КР, д.ф.-м.н., проф., акад. НАН КР К. Алымкулова, г.Ош. 13-21 стр.//
12. **Алымбаев А.Т. Бапа кызы А.** Дюффингдин кечиккен аргументтүү мүчөнү кармаган экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемесинин мезгилдик чыгарылышы.// Вестник Кыргызстана №2 (1) 2023. ISSN 1694-7711. DOI: [10.33514](https://apps.crossref.org/myCrossref/?report=missingmetadata&datatype=j&prefix=10.33514). 307-310 стр.

<http://vestnik.kg/admin-admin/fotogalere/1708050168_%20%D0%9A%D1%8B%D1%80%D0%B3%D1%8B%D0%B7%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D0%B0%202(1)%202023..%20(1).pdf>

1. **Алымбаев А.Т. Бапа кызы А.** Существование периодического решения дифференциального уравнения второго порядка. Метод функции Грина. // Вестник ИГУ №55 2023. 7-14 стр. <https://libraryiksu.kg/vestnik/arhiv/75>
2. **A.T. Alymbaev, A. Bapa kyzy , F.K.Sharshembieva** Periodic solutions of a second-order nonlinear volterra integro-differential equation. Advances in Differential Equations and Control Processes **P-ISSN:** 0974-3243 **E-ISSN:** 3048-734X **Издатель:** Pushpa Publishing House Prayagraj, India Volume 31, Number 2, 2024.// <https://pphmjopenaccess.com/index.php/adecp/issue/view/219>
3. **Алымбаев А.Т. Бапа кызы А**. Периодическое решение квазилинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с бесконечным последействием.// Тезисы докладов. Международная научная конференция «V Борубаевские чтения”, посвященная 70-летиюНациональной академии наук Кыргызской Республики и 40-летию Института математики НАН КР. 2024г.-52-стр.

РЕЗЮМЕ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико- математических наук по специальности 01.01.02- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальные упавления.

Ключевые слова: Периодическое решение, квазилинейные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения второго порядка, система интегро-дифференциального уравнения с малым параметром, метод Галеркина, метод функции Грина.