**ИССЫК-КУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ИМ. К.ТЫНЫСТАНОВА**

на правах рукописи

УДК 517.968

**БАПА КЫЗЫ АЙНУРА**

**ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА**

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор Алымбаев А.Т.

**Бишкек – 2025**

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

**СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ** …………... 4

**ВВЕДЕНИЕ** ............................................................................................................. 5

**ГЛАВА 1. ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ** ................................ 11

Заключение по Главе 1 ........................................................................................... 21

**ГЛАВА 2. МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ**

2.1. Объект, предмет и задачи исследования ....................................................... 22

2.2. Вспомогательные утверждения ...................................................................... 24

Заключение по Главе 2 ........................................................................................... 32

**ГЛАВА 3. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТИПА ВОЛЬТЕРРА**

3.1. Существование и сходимость приближения Галеркина .............................. 33

3.2. Существование периодических решений квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. Метод последовательных приближений ........................................................................................................... 38

3.3. Применение проекционно-итерационного метода исследования периодических решений квазилинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с конечным последействием .................................. 44

3.4. Существование периодического решения интегро-дифференциального уравнения с конечным последействием ............................................................... 50

3.5. Периодическое решение квазилинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с бесконечным последействием ............................ 55

3.6. Об одном варианте проекционно-итерационного метода нахождения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечным последействием .................................................................... 58

Заключение по Главе 3 ........................................................................................... 64

**ГЛАВА 4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ АВТОНОМНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

4.1. Приведение автономной системы к неавтономной системе уравнений...... 65

4.2.Сходимость приближений Галеркина ............................................................. 71

4.3. Существование периодического решения. Метод последовательных приближений …………………………………………………………………....... 85

4.4. Построение периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля, дифференциальных уравнений Дюффинга первого порядка и дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля второго порядка. Метод гармонического баланса ......................................................................................... 89

Заключение по главе 4 ........................................................................................... 101

**ВЫВОДЫ** .............................................................................................................. 102

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ** ...................................... 104

**СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ**

1. пространство непрерывных на отрезке функций с нормой
2. пространство раз непрерывно дифференцируемых относительно функций периодических по с периодом ограниченная выпуклая область .
3. дифференциальная норма.
4. матрица столбец.
5. пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций относительно .
6. пространство непрерывно дифференцируемых относительно функций

**ВВЕДЕНИЕ**

**Актуальность темы.** Исследование многих физических задач сводится к изучению периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, как с конечными, так и бесконечными последействиями, и их систем.

Периодические решения характеризуют установившиеся процессы, определяющие эволюционные системы. Практическая значимость этих процессов вызывает повышенный интерес к разработке методов анализа периодических решений. В плане обобщения известных и удобных эффективных методов построения периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с последействием получены значимые результаты. Так, например, известные асимптотические методы, созданные Пуанкаре А., Крыловым Н.Н., Боголюбовым Н.М., Митропольским Ю.А., Самойленко А.М. и другими авторами, обобщены и применяются в исследовании уравнений с последействием, содержащих малый параметр. Однако, при исследовании периодических решений нелинейных уравнений или системы нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений общего вида их применимость ограничивается узкими классами уравнений.

В диссертационной работе изучаются вопросы существования и построения периодических решений квазилинейных дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений с конечными и бесконечными последействиями второго порядка, а также системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром. Основное внимание уделено обоснованию проекционно-итерационного метода, который сочетает идеи метода Галеркина и метода последовательных приближений. Решение этих вопросов определяет актуальность данной работы.

**Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими работами, проводимыми образовательными и научными учреждениями.**

Исследования по теме диссертации проводились в соответствии с утвержденной ученым советом Иссык-Кульского государственного университета им. К. Тыныстанова тематикой «Проекционно-итерационные методы исследования периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра», протокола №2, от 02.11.2021 г.

**Цель и задачи исследования.** Целью исследования диссертационной работы является обоснование применимости проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием второго порядка, а также системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром, обладающей свойством автономности.

Для достижения цели работы были решены следующие задачи:

1. Доказательство существования приближений Галеркина в окрестности точного периодического решения и оценка погрешности между приближенными и точными периодическими решениями.
2. Доказательство обратного утверждения о существовании точного периодического решения в окрестности приближений Галеркина и оценка погрешности между ними.

3. Построение методом гармонического баланса в первом приближении периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля с конечным последействием, дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка с запаздыванием и дифференциального уравнения Ван-дер-Поля второго порядка с членом запаздывающего аргумента. Показать степень влияния параметра запаздывания на амплитудно-частотные характеристики периодических решений.

**Методы исследования.** При обосновании проекционно-итерационного метода применены: метод Галеркина, метод последовательных приближений, функции Грина об ограниченных решениях на числовой оси, метод сведения автономной системы к неавтономной системе уравнений и тригонометрический ряд Фурье.

**Научная новизна**

* дано обоснование проекционно-итерационного метода для изучения вопросов существования и приближенного построения периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечными и бесконечными последействиями;
* доказаны взаимообратные утверждения: теорема о существовании приближений Галеркина в окрестности точного периодического решения и теорема о существовании точного периодического решения в окрестности приближений Галеркина для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка;
* дано обоснование применимости проекционно-итерационного метода для построения периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений малым параметром с конечным последействием;
* построены и анализированы методом гармонического баланса в первом приближении периодические решения: системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля с конечным последействием, дифференциального уравнения Дюффинга с запаздыванием и дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля второго порядка с членом запаздывающего аргумента.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит как теоретический, так и прикладной характер. Результаты диссертации могут быть использованы для исследования периодических решений новых классов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Разработанные алгоритмы позволяют находить решения конкретных модельных уравнений и могут быть адаптированы для применения в различных областях науки и техники.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

* методом проекционного метода Галеркина доказано существование периодических решений в окрестности точных периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечным и бесконечным последействием. Оценена погрешность разности приближённых и точных решений.
* на основе функции Грина в задаче об ограниченных решениях на числовой оси доказано методом последовательных приближений существование точных периодических решений в окрестности приближений Галеркина для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечным и бесконечным последействием. Оценена погрешность их разности.
* обоснована применимость проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром.
* определены методом гармонического баланса первые приближения периодических решений: системы интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием, дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка и дифференциального уравнения Ван-дер-Поля второго порядка с членом запаздывающего аргумента. Определена степень влияния параметра запаздывания на амплитудно-частотные характеристики приближённых периодических решений.

**Апробация результатов исследований.** Результаты настоящей работы были доложены и обсуждены на:

* Международной научно-практической конференции “Эпоха СССР: оценка временем” (г. Каракол, ИГУ им. К. Тыныстанова, 14-15 октября 2021 г.)
* Международной научно-практической конференции «Проблемы и будущее технологий преподавания естественно-математических наук в условиях цифровизации», посвященной 70-летию доктора педагогических наук КГУ имени И. Арабаева, профессора Торогельдиевой Конуржан Макишевны и 70-летию кафедры «Математика и технологии ее преподавания» (г. Бишкек, КНУ им. И. Арабаева, 21-22 мая 2022 г.)
* Международной научно-практической конференции: «Историко-просветительское значение г. Каракол в развитии Кыргызстана» (г. Каракол, ИГУ им. К. Тыныстанова, 10-11 июня 2022 г.)
* Международной научно-практической конференции «Современные цифровые трансформации устойчивого развития общества, образования и науки в эпоху глобализации: опыт прошлого, возможности настоящего, стратегии будущего», посвященной 90-летию общественного и политического деятеля Абсамата Масалиева (г. Баткен, БатГУ, 28-29 апреля 2023 г.)
* Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и образования", посвященной 80-летию д. ф.-м. н., профессора, член-корреспондента НАН КР, почетного академика НАН КР Келдибая Алымкулова (г. Ош, ОшГУ, 12-13 мая 2023 г.)
* Международной научно-практической конференции «VI чтения И. Бекбоева: проблемы современной модели образования: актуальные вопросы, достижения и инновации», посвященной Народному учителю КР, лауреату государственной премии в области науки и техники, член-корреспонденту НАН КР, академику НАН, Бекбоеву Исак Бекбоевичу (г. Бишкек, ТалГУ, 8-9 июня 2023 г.)
* Международной научной конференции «V Борубаевские чтения», посвященной 70-летию НАН КР и 40-летию Института математики НАН КР (г. Бишкек, ИМ НАН КР, 20-21 июня 2024 г.)

**Публикации:** Основное содержание диссертации опубликовано в статьях [13-24], [73]. В совместных работах [13,15-21,23-24] и [73], единоличных работах[14,18,19,22], [65], статья [73] входит в базу данных Veb of Science**.**

**Личный вклад соискателя.**

Постановка задач и анализ полученных результатов осуществлялись под руководством научного руководителя А.Т. Алымбаева. Под его руководством были определены ключевые направления исследования, а также разработаны основные методологические подходы. Доказательство теорем, выведение следствий и создание иллюстративных примеров выполнены соискателем.

Соискатель активно участвовала в апробации результатов исследования на различных международных научно-практических конференциях, где представляла доклады и участвовала в обсуждениях, получив положительные отзывы и предложения по дальнейшему развитию исследований.

**Структура и объём диссертации.** Диссертационная работа состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, четырех глав, содержащих 12 разделов, заключения и списка использованных источников из 73 наименований, 112 стр. компьютерного текста.

**ГЛАВА 1. ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

Периодические краевые задачи для неавтономных, автономных и различных классов интегро-дифференциальных уравнений изучены Н.М. Крыловым, Н.Н. Боголюбовым, А.М. Самойленко, Д.И. Мартынюком, М. Урабе, Е.Н. Розенвассером, А.А. Кондратьевой, А.И. Боташевым и другими авторами [3, 37, 41, 43, 44, 45, 56, 57, 73].

Вопросы построения периодических решений автономных и неавтономных систем дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений с запаздыванием и системы интегро-дифференциальных уравнений по методу Галеркина были изучены в работах М. Урабе [62, 69, 70], А.В. Кибенко [35], С.О. Стрыгина [59], О.Д. Нуржанова [94, 95], А.М. Самойленко, О.Д. Нуржанова [116], Б. Вуйтовича [120], П.П. Забрейко, С.О. Стрыгина [60] и других авторов.

В этих работах был представлен анализ применимости метода Галеркина для нахождения периодических решений таких систем, а также оценка погрешности полученных приближений. Результаты данных исследований оказались значимыми для дальнейшего развития теории периодических решений дифференциальных уравнений.

Следует выделить работы М.Урабе [62], посвященные вопросам обоснования метода Галеркина применительно к периодической системе дифференциальных уравнений вида

где -периодическая по вектор-функция.

Периодические решения системы (1.1.1) ищутся в виде ряда Фурье. М. Урабе в своей работе дал общие теоремы о взаимосвязях между точными решениями и их приближениями Галеркина. В ней также установлены утверждения, позволяющие на основании существования приближенных периодических решений, найденных методом Галеркина, сделать заключение о существовании точных периодических решений системы (1.1.1). Доказаны обратные утверждения о существовании приближений Галеркина в окрестности точного периодического решения системы (1.1.1).

Применимость метода Галеркина к системам с запаздыванием рассмотрена в работах [41, 44]. В них авторы изучили систему дифференциальных уравнений с запаздыванием вида:

где -мерный вектор; -периодическая по

-мерная вектор-функция; постоянная величина.

Обоснование применимости метода Галеркина к системам с запаздыванием связано с принципиальными трудностями. Эти трудности заключаются в том, что для линейной системы с запаздыванием не определено понятие функции Грина для ограниченных решений. В работе [41] эта проблема решена следующим образом: дана система линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием вида:

где -мерный вектор; -мерная вектор-функция; -мерные матричные функции.

Матричную функцию будем называть функцией Грина, если при она определена, непрерывна по переменным , удовлетворяет системе уравнений

условию

и неравенству

а также условию

гдеединичная матрица, положительные постоянные.

Введенная таким образом функция Грина позволяет записать 2πi-периодическое решение системы (1.1.3) в виде:

В работе [55] А.Н. Самойленко и О.Д. Нуржанова метод Галеркина применен для отыскания периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений с 2π-периодической правой частью вида:

где -периодические по *n*-мерные вектор-функции,

Доказано утверждение о том, что если система уравнений в вариациях, соответствующая точному периодическому решению системы (1.1.6), имеет функцию Грина, удовлетворяющую условию (1.1.5), то для всех достаточно больших приближения Галеркина существуют и равномерно сходятся при к точному периодическому решению

Идеи, разработанные для системы (1.1.6) в работе [54], применены для исследования периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последействием вида:

где -соответственно -мерные -периодические по вектор-функции; ядро является кусочно-непрерывной вектор-функцией, удовлетворяющей неравенству вида

для всех действительных значений ;положительные постоянные.

В работе А.Т.Алымбаева [7] рассматривается возмущенная система автономных дифференциальных уравнений вида

где малый параметр, мерные вектор-функции.

Периодическое решение находится согласно алгоритму метода Галеркина, исходя из допущения, что невозмущенная система при имеет однопараметрическое семейство периодических решений.

А.А. Кондратьева в работе [36] предлагает итерационный метод построения периодических решений системы дифференциальных уравнений с полиномиальными относительно правыми частями, уравнений Ван-дер-Поля, модели Лотка-Вольтерра, модели периодического движения спутника, модели неравновесного экономического роста и неравномерного научно-технического прогресса, а также дифференциального уравнения, описывающего динамику клеточных процессов.

В работе А.Т.Алымбаева и Бапа кызы Айнуры [20] рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка вида:

c периодом и разлагающиеся в ряд Фурье вида

**Теорема 2.1.1.** Пусть периодическое решение уравнения (1.1.10). Если

решение представимо в виде формулы

Обозначим через оператор срезки т.е.

**Теорема 2.1.2.** Для разности имеет место оценка

где

Далее, в работах [18-20] рассматриваются квазилинейные дифференциальные уравнения с периодической правой частью вида:

вещественное число.

Периодическое решение ищется согласно алгоритму метода Галеркина:

коэффициенты, которого определяются из системы алгебраических уравнений

Допустим, что существует периодическое решение (1.1.11) представимое в виде ряда Фурье:

Дано обоснование метода Галеркина для исследования периодических решений уравнения (1.1.10):

1. Показано существование периодического приближенного решения (1.1.12) в окрестности точного решения (1.1.13), и определена оценка разности:

2. Доказано методом функции Грина обратное утверждение: существование точного периодического решения в окрестности приближения Галеркина (1.1.2), и определена оценка:

В работах [14,23] рассмотрены интегро-дифференциальные уравнения с конечным последействием вида:

где А-вещественное число, непрервно-дифференцируемые по и периодические по функции,

Для уравнения (1.1.14) дается обоснование применимости метода Галеркина. Доказаны взаимообратные утверждения:

1. Существование точного периодического решения в окрестности приближения Галеркина Для их разности получена оценка:

где

1. Существование приближения Галеркина в окрестности точного решения . Для их разности получена оценка:

Для интегро-дифференциального уравнения второго порядка с бесконечным последействием вида:

где непрерывная по и дифференцируемая по , удовлетворяющая неравенству

функция, результаты интегро-дифференциального уравнения (1.1.14) перенесены на интегро-дифференциальное уравнение (1.1.15).

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение (1.1.14). 2π-периодическое решение уравнения определяется согласно алгоритму проекционно-итерационного метода [73]. В результате получен следующий алгоритм:

где A — положительная, такая, что . Такой вариант всегда возможен, если постоянная A не является целым положительным числом.

Доказано оценка погрешности разности между периодическим решением и его приближениями равна:

где

периодическая функция начального приближения.

Далее, в работе [14] рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, обладающая свойством автономности.

Предполагается, что возмущенная система

имеет периодическое по решение

Заменой переменных

система (1.1.16) сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений с периодической правой частью

где

периодическое решение определяется согласно алгоритму метода Галеркина. Дано математическое обоснование этого метода.

В работе [16] методом гармонического баланса [36], который является разновидностью метода Галеркина, в первом приближении построены предельные циклы системы уравнений Ван-дер-Поля вида:

положительный параметр, член определяет величину «затухания». Затухание положительно при и отрицательно при . Другими словами, колебания малой амплитуды будет раскачиваться, а колебания большой амплитуды будут затухать. На фазовой плоскости существует замкнутая кривая, называемая устойчивым циклом, которая описывается уравнением эллипса, зависящим от параметров и

При периодическое решение системы (1.1.17) хорошо согласуется с решением работы [16] в первом приближении.

Далее, в работе [22] рассмотрено дифференциальное уравнение Дюффинга с запаздывающим аргументом

Определено первое приближение периодического решения уравнения:

Теперь обратимся к работам, где отражены методы последовательных приближений для исследования периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений общего вида.

где Т-периодическая вектор-функция, для евклидова пространства и

В работах [52, 53] разработан численно-аналитический метод для исследования периодических решений системы (1.1.19). Этот метод, являясь методом последовательных приближений, позволяет находить периодические решения системы в виде равномерно сходящейся последовательности периодических функций, а также, исходя из этих функций, устанавливать существование точного периодического решения. В дальнейшем численно-аналитический метод получил развитие для исследования периодических решений системы с запаздывающим аргументом [43, 44, 46, 47, 56, 57], системы нейтрального типа [61], различных классов системы интегро-дифференциальных уравнений [5, 6, 8, 9, 10], системы автономных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений [1, 3, 7]. А также численно-аналитический метод получил развитие в плане объединения с другими методами, такими как метод Чаплыгина, метод коллокации, метод Галеркина, метод касательных Ньютона [11, 31, 32, 38, 39, 40-50].

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ГЛАВЕ 1**

Из обзора следует, что задача применимости проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка почти не рассматривалась. Не рассматривалась задача построения периодических решений проекционно-итерационным методом для системы интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием, содержащих малый параметр.

В работах [14, 23] исследованы интегро-дифференциальные уравнения с конечным последействием, где для приближенных и точных решений определены оценки разности. В работе [16] методом гармонического баланса, являющимся разновидностью метода Галеркина, в первом приближении построены предельные циклы системы уравнений Ван-дер-Поля. Также разработаны численно-аналитические методы для исследования периодических решений систем дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений [52, 53]. Эти методы позволяют находить решения в виде равномерно сходящихся последовательностей периодических функций и устанавливать существование точных решений.

Вопросы, связанные с обоснованием и применением проекционно-итерационного метода к периодическим краевым задачам, являются актуальными и представляют практический и теоретический интерес.

Таким образом, дальнейшее развитие проекционно-итерационного метода для исследования квазилинейных систем, включая системы с последействием и малым параметром, является важным направлением исследований, которое сочетает теоретическую значимость и практическое применение.

**ГЛАВА 2. МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ**

**2.1. Объект, предмет и задачи исследования**

**Объект исследования.** В работе рассматриваются:

1. Квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодической правой частью вида

2. Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра второго порядка с конечным последействием

где – вещественное число, непрерывно-дифференцируемые-периодические по функции,

3. Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра второго порядка с бесконечным последействием

где – вещественное число, -периодическое по функция, непрерывная *по* и дифференцируемая пофункция, удовлетворяющая неравенству

4. Система интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием содержащий малый параметр, обладающий свойством автономности

где *x* – *n*-мерный вектор, *n*-мерные вектор-функции, малый параметр, фиксированное положительное число.

5. Система интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля с конечным последействием

(2.1.5)

где – параметр, принимающий положительные значения.

6. Дифференциальное уравнение Дюффинга первого порядка с запаздывающим аргументом

где – малый параметр, - численный параметр, – величина запаздывания.

7. Дифференциальное уравнение Ван-дер-Поля второго порядка с запаздывающим аргументом

где – величина запаздывания и

**Предмет исследования.** Обоснование проекционно-итерационного метода исследования периодических решений уравнений (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) и системы уравнений (2.1.4). Определение в первом приближении периодических решений уравнений (2.1.5), (2.1.6), (2.1.7).

**Задачи исследования.**

* Доказательство существования приближенных решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности точных решений, а также доказательство обратного утверждения существования точных решений в окрестности приближенных решений;
* Теоретическое обоснование применимости проекционно-итерационного метода исследования периодических решений автономных систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр;
* Построение периодических решений методом гармонического баланса в первом приближении системы интегро-дифференциальных уравнений второго порядка Ван-дер-Поля с конечным последействием, дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка с запаздывающим аргументом и дифференциальных уравнений второго порядка Ван-дер-Поля с запаздывающим аргументом.

**2.2. Вспомогательные утверждения**

Рассмотрим непрерывную, периодическую, разлагаемую в ряд Фурье функцию :

Введем на множестве периодических функций оператор , такой что

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

где периодическая функция с периодом, представимая в виде ряда Фурье (2.1.1). С учетом (2.2.1) запишем его в виде

**Теорема 2.2.1.** Пусть -периодическое решение (2.2.3). Если

-периодическое решение представимо в виде формулы

**Доказательство.** Интегрируем обе части равенства (2.2.3) два раза

или

С учетом условий теоремы, мы получим

Теорема доказана.

Оценим разность между точным решением и приближенным решением уравнения (2.2.2).

**Теорема 2.2.2.** Для разности имеет место оценка

где

**Доказательство.** Из разложения (2.2.4.) получим

из которого, применяя неравенство Буняковского-Шварца, имеем

С учетом неравенства Бесселя-Парсеваля из (2.2.6) получим

Так как

то, с учетом (2.2.6) и (2.2.7) следует оценка

Отсюда находим

Применяя к соотношению (2.2.5) формулу Парсеваля, получим

Исходя из этого, получаем:

Теорема доказана.

Докажем утверждение, устанавливающее критерий разрешимости системы алгебраических уравнений вида:

, для которой  и

**Теорема 2.2.3.** Предположим, что система (2.2.8) имеет приближенное решение и существует постоянные и для которых выполняются условия:

1. .

.

1. .

тогда система (2.2.8) имеет единственное решение в области и имеет место оценка

**Доказательство.** Представим систему (2.2.8) в виде

и рассмотрим итерационный процесс

Докажем сходимость последовательности (2.2.9), представив разность

в виде

и, оценив с учетом условия теоремы (2.2.3), получим:

(2.2.10)

Так как

то, учитывая условие 2 теоремы 2.2.3, получим

Поэтому

для всех

Далее, для любых целых имеем

Согласно условию теоремы , следовательно

а также

Соотношения (2.2.12), (2.2.13), (2.2.14) обеспечивают равномерную сходимость последовательности (2.2.9) в области , т.е.

Отсюда при получим

для всех .

Положив в (2.2.15) находим

Предположим, что система (2.2.8) имеет два различных решения:

. Тогда из представления

получим оценку

из которого следует

Из (2.2.16) при получим. Отсюда следует что доказывает единственность решения системы алгебраических уравнений (2.2.8).

Теорема доказана.

Рассмотрим системы алгебраических уравнений вида

где - вектор-функции одинаковой размерности.

– непрерывно дифференцируемые функции в области , такие, что

и -действительная матрица, для которой малый параметр.

**Теорема 2.2.4.** Предположим, что система (2.2.17) имеет приближенное решение такое, что и есть постоянные и для которых выполняются условия:

1. .

.

1. .

Тогда система (2.2.17) имеет единственное решение , такое что в области и имеет место оценка

**Доказательство.** Представим систему (2.2.17) в виде

и рассмотрим итерационный процесс

Докажем сходимость последовательности (2.2.18), представив разность

в виде

и оценив с учетом условия теоремы (2.2.17) получим

Так, как

то учитывая условие 2 теоремы 2.2.4 получим

Поэтому

для всех

Далее, для любых целых имеем

Согласно условию теоремы , следовательно

а также

Соотношения (2.2.21), (2.2.22), (2.2.23) обеспечивают равномерную сходимость последовательности (2.2.18) в области , т.е.

Отсюда при получим

для всех .

Положив в (2.2.24) находим

Предположим, что система (3.2.1) имеет два различных решения

, тогда из представления

получим оценку

из которого следует

Из (3.2.9) при получим. Отсюда следует что доказывает единственность решения системы (3.2.1). По условиям теоремы

Следовательно, при Далее при поэтому решение системы (3.2.1) обладает свойством Теорема доказана.

**Заключение по главе 2**

Данная глава носит содержательный характер. В ней рассматриваются объекты и задачи исследования, а также вспомогательные утверждения и теоремы, необходимые для обоснования применимости проекционно-итерационного метода к изучению периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений как с конечным, так и с бесконечным последействием.

Анализируется квазилинейная система алгебраических уравнений, содержащая малый параметр (2.2.17), а также её разрешимость (теорема 2.2.4). Это, в свою очередь, позволяет исследовать периодические решения системы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, обладающей свойством автономности. В результате приведённые в главе методы и результаты могут быть использованы не только для анализа конкретных задач, но и для дальнейшего развития теории квазилинейных систем с запаздыванием и их приложений в прикладной математике, физике и инженерных науках.

**ГЛАВА 3. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТИПА ВОЛЬТЕРРА.**

**3.1. Существование и сходимость приближения Галеркина**

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

где - вещественное число, -периодическая по функция.

Периодическое решение уравнения (3.1.1) ищем в виде

коэффициенты которого находим из системы алгебраических уравнений

Отсюда имеем

где

Из (3.1.4) для коэффициентов разложения (3.1.2) получим систему уравнений

(3.1.5)

или

Обозначим через -периодическое решение уравнения (3.1.1) и представим его в виде ряда Фурье:

Поставляя эту функцию в уравнение (3.1.1) и с учитывая свойства оператора получим следующее равенство:

Отсюда получим алгебраическое уравнение вида

Представим разность в виде

и оценим разность

Далее, с учётом результатов теоремы 2.2.2, из (3.1.7), получим:

Так как

то из (2.2.6) следует

причём, если то из (3.1.10) следует

Решаем уравнение (3.1.10) методом последовательных приближений согласно

алгоритму теоремы 2.2.3.

взяв за начальное приближение число

Покажем сходимость последовательности (3.1.12) и оценим разность

:

С учётом оценок (3.1.8) и (3.1.9) из (3.1.13) получим

или

Представим разность в виде

Предположим, что для достаточно большего при выполняется условие

Тогда из (3.1.14) получим оценку:

Отсюда по индукции получим:

Далее, при с учётом (3.1.15) имеем

Отсюда при получим оценку

При из (3.1.16) получим

Из неравенства следует равномерная сходимость последовательности (3.1.12) к решению уравнения при

Оценим разность

Отсюда, с учётом (3.1.16) следует оценка

Оценим разность

Поскольку, согласно теореме 2.2.2

то из с учётом неравенства (3.1.17) получим оценку

Далее, так как,

тогда из (3.1.20) получим

Таким образом, доказано основное утверждение:

**Теорема 3.1.1.** Пустьдифференциальное уравнение (3.1.1), такое что, удовлетворяет следующим условиям:

1) существует -периодическое решение области

2) удовлетворяет требованиям теоремы 2.2.2;

3)

4)

Тогда существует достаточно большое , такое, что при всех существуют приближенные -периодические решения Галеркина равномерно сходящиеся при к точному периодическому решению . Это означает, что и справедливо

**3.2. Существование периодических решений квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. Метод последовательных приближений**

Построим функцию Грина, такую, что решение уравнения (3.1.1) было ограниченным при всех . Находим частные решения уравнения

Образуем характеристическое уравнение и решая его, находим характеристические числа

Отсюда следуют два частных решения

из которых, следует при , и при .

Построим функцию Грина в виде

определяя функции из условий:

Отсюда имеем

Решив эту систему, получим

Подставляя (3.2.3) в (3.2.1), получим функцию Грина

Покажем, что функция Грина удовлетворяет уравнению

Вычислим:

Отсюда имеем

Пусть функция решение интегрального уравнения вида

Покажем, что функция является решением уравнения (3.1.1). Представим (3.2.5) в виде

Отсюда, получим с учетом свойств фу нкции Грина (3.2.2).

Подставляя (3.2.5) - (3.2.7) в уравнение (3.1.1), получим

Таким образом, доказано утверждение:

**Теорема 3.2.1.** Пусть функция является решением уравнения (3.1.1) и существует функция Грина вида (3.2.1) задачи об ограниченных решениях, обладающая свойством (3.2.2). Тогда функция также является решением интегрального уравнения (3.2.5).

Покажем, что уравнение (3.2.5) имеет периодическое решение. Решаем уравнение (3.2.5) методом последовательных приближений, приняв за начальное приближение т.е. приближение Галеркина при достаточно большем

Из представления (3.2.4) следует оценка

где

Оценим разность , учитывая, что

Из соотношений (3.3.8), (3.3.10) получаем равенство

Так как, согласно равенству Парсеваля справедливо равенство

где коэффициенты ряда Фурье разложения функции

Из (3.2.12), с учётом неравенства Буняковского-Шварца, получим оценку:

где

вычислим интеграл:

Из равенства (3.2.11) получим:

Отсюда, с учетом (3.2.13), получим оценку:

Оценим разность:

Отсюда, получим

Таким образом, получим оценку

Оценим разность :

Отсюда, имеем

Предположим, что тогда

Переходя к пределу из () при , получим оценку точности вида

Положив в (3.2.16), получим оценку погрешности между точным решением интегрального уравнения (3.2.5) и приближённым решением дифференциального уравнения, найденного по методу Галеркина

С учётом, что получим оценку

Отсюда, при , следует

Так, как

Тогда из интегрального уравнения (3.2.5) имеем

Отсюда, следует, что

Таким образом доказано следующее утверждение:

**Теорема 3.2.2.** Пусть выполняется условие теоремы 3.2.1. Если выполняется условие тогда существует -периодическое решение интегрального уравнения (3.2.5), а вместе с ним периодическое решение дифференциального уравнения (3.1.1).

**3.3. Применение метода Галеркина для исследования периодических решений квазилинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с конечным последействием**

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение второго порядка вида:

)

где – вещественное число, непрерывно-дифференцируемые-периодические по функции,

Периодические решения уравнения (.1) ищем в виде

Подставив (.2) в (.1), получим равенство

где

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках функций , получим из (.3) систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (.2)

где

Обозначим через -периодическое решение уравнения (.1) и представим его в виде ряда Фурье

Подставляя (.5) в уравнение (.1) и учитывая свойства оператора , получим следующее равенство

Отсюда имеем

где

Представим разность

в виде

Оценим:

Так как, согласно теореме 2.2.2 для разности имеют место оценки:

,

С учетом этих оценок, из (.6) получим

или

Представим уравнение (3.1.6) в виде

и положив , имеем

из которого следует оценка

или

где

Решаем уравнение (.9) методом последовательных приближений

За начальное приближение берем число , т.е. коэффициенты частной суммы ряда (.5)

Докажем равномерную сходимость итерационного процесса (.12). Представим разность в виде

Предположим, что существует достаточно большое число выполняется условие

Тогда из (.13) следует оценка

.

Отсюда имеем

(.15)

Оценим разность , положив . Из (2.4.12) при имеем

Отсюда с учетом неравенства (.10) или (2.4.11) получим

или

С учётом неравенства (.16) или неравенства (.17), получим из (.15) оценку

для

Нетрудно показать справедливость выполнения неравенства

Отсюда, при получим оценку

которая обеспечивает равномерную сходимость последовательности (.12) к решению уравнения (.9) т.е. *.* Так как то приближенное решение интегро-дифференциального уравнения (.1) согласно методу Галеркина записывается в виде

Из (.18) при получим

Оценим разность

Следовательно,

С учетом неравенства (.19) получим оценку

Так как, согласно теореме (2.2.2)

а также

тогда для разности справедлива оценка:

Поскольку то из (.20) следует неравенство

Таким образом доказано утверждение.

**Теорема .1***.* Пусть интегро-дифференциальное уравнение (.1) имеет -периодическое решение и удовлетворяет следующим требованиям:

а) выполняется требование теоремы 2.2.2;

б)

в)

Тогда, алгебраическое уравнение (.9) имеет единственное решение

такое, что между точным и приближенным решением справедлива оценка

**3.4. Существование периодического решения интегро-дифференциального уравнения с конечным последействием**

Докажем, что, если линейная часть интегро-дифференциального уравнения (.1) имеет функцию Грина вида (3.2.4), то в окрестности приближения Галеркина при достаточно больших существует периодическое решение интегро-дифференциального уравнения (.1)

С учетом функции Грина (3.2.4), интегро-дифференциальное уравнение (.1) записываем в виде интегрального уравнения

Решаем интегральное уравнение (.1) методом последовательных приближений, приняв за начальное приближение приближение Галеркина с достаточно большим Заметим, что для функции Грина справедлива оценка

где .

Оценим разность учитывая, что

Так, как

тогда, с учётом оценки (3.3.9) и неравенства Буняковского-Шварца, получим оценку

Оценим разность

Рассмотрим разность в виде

Предположим, что выполняется условие

Тогда для разности , согласно (.4) имеем

Далее, с учётом (.5) получим оценку

Таким образом,

Отсюда следует равномерная сходимость при последовательности (.3) к периодическому решению интегрального уравнения (.1), удовлетворяющей неравенству

Отсюда, при получим оценку погрешности между точным - периодическим решением и приближениями Галеркина

Покажем единственность периодического решения . Предположим, обратное, т.е. что существует, кроме решения также решение , удовлетворяющее интегральному уравнению (.1).

Оценим разность

Отсюда, с учётом условия (.5), получаем оценку

(.6)

Переходя в (.6) к пределу при , с учётом условия (.5), получим что . Это равенство справедливо только при , что противоречит допущению о существовании двух периодических решений.

Таким образом, доказано утверждение.

**Теорема 3.4.1.** Пусть интегро-дифференциальное уравнение (3.3.1) имеет -периодическое приближённое решение построенное методом Галеркина, и удовлетворяет условиям:

а) существует функция Грина задачи об ограниченных решениях дифференциального уравненияудовлетворяющая неравенству

б) выполняется условие

Тогда существует -периодическое решение интегрального уравнения (.1), а следовательно, и уравнения (3.3.1). Это решение является единственным в окрестности приближённого решения и удовлетворяет неравенству:

**3.5. Периодическое решение квазилинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с бесконечным последействием**

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение вида

где – вещественное число, -периодическое по функция, непрерывная *по* и дифференцируемая пофункция, удовлетворяющая неравенству

Периодическое решение уравнения (.1) ищем в виде

Подставляя (.3) в (.1) получим

где

Обозначим через -периодическое решение уравнения (.1) и представим его в виде ряда Фурье:

Подставив (.5) в (.1) и с учётом свойства оператора, относительно получим уравнение

Оценим

Из (.5), с учётом оценок

и неравенства (.2), получим оценку

или

Решаем алгебраическое уравнение (.4) методом последовательных приближений

Допуская выполнение условия:

можем доказать равномерную сходимость (.9) к решению , уравнения (.4) и оценку

Отсюда, получим

Так как

то с учётом неравенства (.10) получим оценку

Далее, так как , то на основании неравенств (.6), (.10) получим оценку

Таким образом доказана следующая теорема.

**Теорема 3.5.1.** Предположим, что интегро-дифференциальное уравнение (.1) имеет -периодическое решение и удовлетворяет условиям:

а) выполняются условия теоремы 2.2.2;

б) , ;

в)

Тогда, алгебраическое уравнение (.4) имеет единственное решение

такое, что между точным и приближенным решением найденного методом Галеркина, имеет место оценка

В работе [19], аналогично теореме 3.4.1, доказано существование периодического решения уравнения (.1) в окрестности приближения Галеркина.

**Теорема 3.5.2.** Пусть интегро-дифференциальное уравнение (.1) имеет -периодическое приближенное решение и удовлетворяет условиям:

а) выполняются условие а) теоремы (3.4.1) и неравенство (.2);

б) выполняется условие

Тогда существует 2-периодическое решение интегро-дифференциального уравнения (.1)

**3.6. Об одном варианте проекционно-итерационного метода нахождения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечным последействием**

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

где А- положительное, нецелое число, непрерывная периодическая функция, представимая в виде ряда Фурье

Обозначим

Пусть периодическое решение уравнения (.1) и функция функция Грина

удовлетворяющий условиям:

Тогда периодическое решение уравнения (.1) представимо в виде:

и для разности имеет место оценка при для некоторого целого

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

периодическое решение интегро-дифференциального уравнения (.6) ищем методом последовательных приближений

За начальное приближение примем -периодическую функцию .

Уравнение (.7) для каждого фиксированного значения представляет дифференциальное уравнение вида (.1) с непрерывной -периодической функцией

представимое в виде ряда Фурье вида:

Тогда согласно лемме дифференциальное уравнение

имеет -периодическое решение, представимое в виде

и для разности справедлива оценка

Подставив (.8) в (.9) получим

Заметим, что

Докажем сходимость последовательности к точному решению интегро-дифференциального уравнения (.6).

Рассмотрим последовательность -периодических функций вида

Оценим разность

Отсюда получим

Положим

тогда из (.12) получим

Оценим разность

Отсюда с учетом леммы, получим оценку

Таким образом

Далее, так как

.

Тогда с учетом (.14), получим оценку

Отсюда, с учетом условии сжатия (2.7.13), получим оценку

Таким образом доказана теорема:

**Теорема 3.6.1.** Предположим, что интегро-дифференциальное уравнение (3.6.6.) такое, что выполняются следующие условия:

а) существует функция Грина (.3) ограниченно решённая на числовой оси удовлетворяющая (.4);

б) выполняется условие сжатия (.13 )для и тогда -периодическое решение интегро-дифференциального уравнения (.6) определяется как предел последовательности функций, определённых согласно алгоритму (.11), и для разности имеет место оценка

Заметим, что для -периодической функции возможен случай резонанса, т.е. разность достаточно мала. Поэтому, чтобы избежать явления резонанса следует выбрать число А таким образом, чтобы

Такой вариант всегда возможен, если постоянная А не является целым положительным числом.

**Заключение по главе 3**

Результаты данной главы показывают применимость проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, как с конечным, так и с бесконечным последействием второго порядка.

Дано доказательство теоремы, указывающее условия существования приближений Галеркина в окрестности точного периодического решения квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Методом функции Грина установлено существование точного решения в окрестности приближения Галеркина, что позволяет находить решения, учитывающие начальные условия и внешние воздействия, обеспечивая более точные и применимые результаты. Результаты, полученные для квазилинейных дифференциальных уравнений, перенесены на квазилинейные интегро-дифференциальные уравнения второго порядка с конечным и бесконечным последействием. Получены оценки для разности точных и приближенных решений рассматриваемых уравнений.

Проекционно-итерационный метод позволяет не только доказать взаимообратные теоремы существования точных и приближенных периодических решений, но и обеспечить алгоритмами их отыскания. Этот метод показал свою эффективность и универсальность, что позволяет отнести его к конструктивным методам исследования периодических решений и периодических краевых задач дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Таким образом, рассмотренные методы и подходы обеспечивают надежные инструменты для анализа и построения периодических решений сложных систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, что расширяет возможности их практического применения в науке и технике.

**ГЛАВА 4.** **ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ АВТОНОМНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**4.1. Приведение автономной системы к неавтономной системе**

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием вида:

где *x* – *n*-мерный вектор, *n*-мерные вектор-функции, малый параметр, фиксированное положительное число.

Относительно вектор-функций предполагается, что

где ограниченная выпуклая область евклидового пространства шар евклидового пространства , , фиксированное малое число.

Система (4.1.1) обладает свойством автономности. Действительно, предположим, что решение системы (4.1.1), тогда для любой

постоянной *С* имеем:

Отсюда следует, что функция является решением системы (4.1.1).

Предположим, что невозмущенная система

имеет - периодическое по решение Следуя работе [57], введем в системе (4.1.1) замену переменных вида

где – некоторая -мерная матрица с непрерывно дифференцируемыми и -периодическими по функциями,

С переменными систему уравнений (4.1.1) можно записывать в виде

Отсюда имеем

Заметим, что

Полагая

из (4.1.4) получим систему уравнений

где ,

На основании сделанных предположений относительно системы (4.1.1) и замены (4.1.3) получаем, что функции определены и непрерывны в области вместе со своими частными производными первого порядка по , периодичны по с периодом и для них выполняются условия

Наряду с системой (4.1.5), в малой окрестности при достаточно малых , вместо системы (4.1.5) можно рассматривать неавтономную систему с периодической по периода правой частью вида

Если система (4.1.6) имеет -периодическое по решение , то из первого уравнения (4.1.5) можем определить функцию , следовательно, и само периодическое по с периодом - периодическое решение системы (4.1.6). Причем частота

такова, что

С учетом замены (4.1.3) находим периодическое по с периодом решение возмущенной системы (4.1.1) согласно формуле

Таким образом, в дальнейшем задача будет заключаться в отыскании периодического решения системы (4.1.6).

Рассмотрим задачу приводимости к неавтономной системе уравнения Дюффинга с интегральным членом вида

где достаточно малое число, малый параметр,

Представим (4.1.8) в виде системы, положив , тогда

)

За периодическое решение невозмущенного уравнения Дюффинга здесь принимается найденное в [63] по методу малого параметра решение вида

В качестве - выбираем матрицу вида

то замена переменных (4.1.3)принимает вид

В новых переменных система интегро-дифференциальных уравнений (4.1.9) записывается в виде

Эту систему записываем в виде

Решая систему (4.1.10) относительно получим систему неавтономных интегро-дифференциальных уравнений:

Отсюда получим

Рассмотрим невозмущенную систему ()

Образуем функцию

Представим эту функцию в виде

Таким образом, с точностью порядка получим

С учётом (4.1.13) из (4.1.12) получим

Так как

то система (4.1.13) записывается в виде

где

-периодическое решение системы (4.1.14) можем найти по методу Галеркина. При достаточно малых в окрестности решения системы (4.1.14) можем построить -периодическое решение возмущённой системы (4.1.11).

**4.2. Сходимость приближений Галеркина**

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

(4.2.1)

Образуем функцию

Представим функцию в виде

где

Отсюда с точностью порядка получим

Обозначим через функцию

Представим в виде

Так как

Далее

Отсюда, имеем

Таким образом, с точностью , получим

(4.2.4)

С учетом (4.2.3), (4.2.4) систему (4.2.3) записываем в виде

(4.2.5)

Так как

то из (4.2.5) следует

Образуем функцию

и представим её в виде

Таким образом,

С учётом (4.2.6) систему (4.2.5) записываем в виде

в области

При этом

Если система (4.2.7) допускает -периодическое решение , то из первого уравнения системы (4.1.5), можем определить решение

, и следовательно, можем получить - периодическое решение системы (4.2.7). Заметим, что

Таким образом, в дальнейшем задача будет заключаться в отыскании -периодического решения системы (4.2.7).

Пусть непрерывная -периодическая вектор-функция и соответствующий ей ряд Фурье имеет вид

Введем оператор срезки , такой что

Согласно теореме 2.2.2для функции справедливы оценки

,

где

Приближенные -периодические решения системы (4.2.7) будем искать в виде тригонометрического полинома

коэффициенты которого находятся из системы алгебраических уравнений

Полином (4.3.9), удовлетворяющий системе (4.3.10), называется приближением Галеркина -го порядка. Систему уравнений (4.3.10) записываем в виде

, (4.2.11)

где -мерный вектор коэффициентов полинома (3.3.9):

,

где

Вычислим значения нормы

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида

где

Матричную функцию будем называть функцией Грина задачи об ограниченных решениях на числовой оси системы (4.2.12), если при она определена, непрерывна по переменным удовлетворяет системе уравнений

и обладает свойствами:

а)

б) ,

Здесь , положительная постоянная. Тогда система уравнений (3.1.12) имеет единственное - периодическое решение которое можно записать в виде

и удовлетворяет неравенству

**Теорема 4.2.1.** Пусть система (4.2.13), такая, что имеет функцию Грина обладающую свойствами а) и б), тогда и систему (4.2.11) можно записывать в виде

**Доказательство.** Систему алгебраических уравнений запишем в виде

Представим эту систему в виде

Отсюда получим

С учётом неравенств (4.2.8) и (4.2.14) получим

Отсюда имеем

или

Так как Такое возможно, если коэффициенты разложения тригонометрического полинома (4.2.9) равны нулю, т.е. . Из этого следует, что уравнение имеет нулевое решение, если для достаточно больших значений . Теорема доказана.

Для доказательства разрешимости системы (4.2.11) применяем результаты теоремы 2.2.4, представив систему в виде

Предположим, что система (4.2.7) имеет -периодическое решение

, такое, что при -периодическое решение невозмущенной системы

Допустим, что

и т.е.

Заметим, что

Из системы уравнений (4.2.7), для имеем

Эта система эквивалентна следующему алгебраическому уравнению

где величиныявляются векторами, образованными из коэффициентов ряда Фурье функций

.

Так как тогда согласно неравенству Шварца и оценки (3.3.8) получим

(4.2.17)

Теперь используя неравенство

и представление

получим

Для оценки величины будем пользоваться представлением

С учётом неравенства Шварца и оценки (4.2.8) получим

Записываем в виде

Отсюда на основании неравенств (4.2.16), (4.2.17) и (4.2.18) получим оценку

где

Решаем систему алгебраических уравнений (4.2.15) методом последовательных приближений:

где Покажем сходимость последовательности (4.2.20) при

Представим разность в виде

Предположим, что выполняется следующее условие:

при , достаточно большое целое число. Тогда из (4.2.21) получим оценку

Оценим разность Из (4.2.20) при имеем

Далее, для разности получим

.

Отсюда при получим

С учётом неравенства (4.2.19), из (4.2.24) имеем

Образуем область множество точек такое, что

Отсюда следует, что

На основании неравенства (4.2.25), из оценки (4.2.23) получим

Оценим разность

Так как

то с учётом (4.2.27) получим

Предположим, что для достаточно большого при выполняется условие

Тогда, для любого целого положительного

В силу соотношений (4.2.22), (4.2.26), (4.2.28) следует, что выполняются все условия теоремы 2.2.4, а следовательно, уравнение (4.2.11) имеет в области единственное решение , для которого справедливо неравенство

Таким образом, существует приближение Галеркина, которое определяется согласно формуле

Далее, так как , то из (4.2.29) следует оценка

Оценим разность

Отсюда получим

(4.2.31)

Далее, с учётом неравенств (4.2.30), (4.2.31) и оценку

имеем

Так как

следует из (4.2.32) оценка

Таким образом доказана следующая теорема.

**Теорема 4.2.3.** Пусть система (4.2.7) имеет -периодическое по решение в области и удовлетворяют условиям

в) Линейная система имеет функцию Грина обладающую свойством

1)

2)

где положительные постоянные;

3) при

Тогда в окрестности точного решения существуют приближения Галеркина , для разности верна оценка

.

**4.3. Существование периодического решения. Метод последовательных приближений**

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида

(4.3.1)

Выясним условия, при выполнении которых из существования приближений Галеркина любого порядка следует существование периодического решения системы интегро-дифференциальных уравнений (4.3.1.)

**Теорема 4.3.1.** Пусть система интегро-дифференциальных уравнений (4.3.1) такова, что выполняются условия:

а) существуют приближения Галеркина всех порядков , принадлежащие области ;

б) Линейная система имеет функцию Грина обладающую свойством а), б) теоремы 3.4.1.

в)

Тогда система (4.3.1) имеет в окрестности приближения Галеркина точное -периодическое решение .

Для разности справедлива оценка

**Доказательство**. С учётом условия б) систему (4.3.1) записываем в виде интегрального уравнения:

Решаем интегральное уравнение (4.3.2) методом последовательных приближений:

где

При из (4.3.3) получим

Так как

то с учётом неравенства (4.2.8), для разности получим оценку

Представим разности и разность

в виде

С учётом этих представлений, для разности получим оценку

Отсюда с учётом условии в) теоремы 3.4.1 получим оценку

На основании неравенства (4.3.6) из (4.3.7) получим

Так как

Таким образом, при , из (4.3.9) получаем сходимость последовательности

к точному решению интегрального уравнения (4.3.2). Из (4.3.8) при получаем оценку:

для всех

При из (4.3.10) получим оценку

Теорема доказана.

**4.4.** **Построение периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля, дифференциальных уравнений Дюффинга первого порядка и дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля второго порядка. Метод гармонического баланса**

Рассмотрим систему уравнений Ван-дер-Поля вида:

(4.4.1)

где – параметр, принимающий положительные значения, член определяет величину «затухания». «Затухание» положительно при и отрицательно при . Другими словами, колебания малой амплитуды будут раскачиваться, а большой – затухать. На фазовой плоскости существует замкнутая кривая, называемая устойчивым циклом т.е. периодические решения системы (4.4.1). Для построения периодического решения применяем метод гармонического баланса [27, 36], который является разновидностью метода Галеркина.

Решение системы в первом приближении ищем в виде:

где -частота, -коэффициенты разложения, подлежащие к определению.

Находим производные

Положим тогда Отсюда Следовательно,

Подставляя (4.4.2) в систему (4.4.1), получим

(4.4.3)

Из равенства (4.4.3) получим:

Представим (4.4.4) в виде

Поскольку,

то равенство (4.4.5) имеет вид

(4.4.6)

Ограничиваясь гармоникой из (4.5.6) получим равенство

Отсюда получим

Поскольку

и

и

при малых то

Таким образом для малых значений имеем

Отсюда получим

Далее, поскольку , то

Учитывая, что то из (4.4.2) получим приближенное решение системы (4.4.1) в виде

Так как

Возведя в квадрат обе части этих равенств и сложив, получим уравнение траекторий решений, то есть предельного цикла системы (4.4.1).

Это уравнение, семейство уравнений эллипса зависящее от параметров , с полуосями:

При получим периодическое решение системы (4.4.1) вида:

,

которое хорошо согласуется с решением работы[36] в первом приближении. Неявный вид образует уравнение окружности с радиусом R=2.

При эллипс вырождается в точку, т.е. цикл разрушается с влиянием интегрального члена в первом приближении.

При эллипс преобразуется к мнимому эллипсу, что равносильно разрушению цикла в первом приближении.

Положим . Вычислим :

Далее пусть , тогда

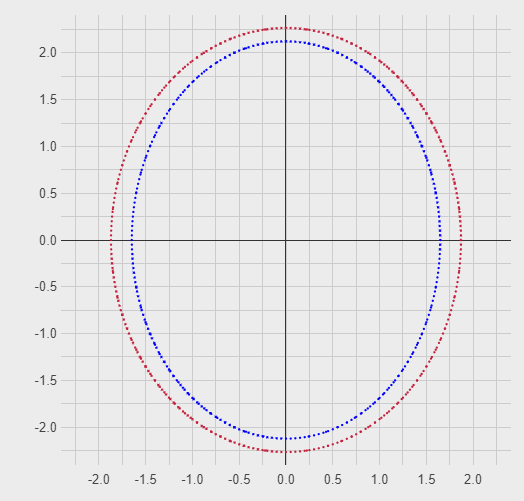
Согласно вычислениям при приближенное периодическое решение имеет вид

При получим

Соответственно на фазовой плоскости при уравнение эллипса имеет вид:

При получаем уравнение эллипса

Эти кривые изображены на рис.1



**Рис.1. Изображение эллипса при и**

Рассмотрим дифференциальное уравнение Дюффинга с запаздывающим аргументом вида

где – малый параметр, - численный параметр, – величина запаздывания.

Периодическое решение уравнения (4.5.8) в первом приближении ищем в виде

(4.4.9)

где подлежащие к выборам числа.

С учётом (4.4.9) находим выражения относительно

(4.4.10)

(4)

анда Мындан

3

(4.4.11)

анда Отсюда

Из выражений (4.4.9), (4.4.10), (4.4.11) получим

(4.4.12)

(4.4.13)

Подставляя выражения (4.4.12) и (4.4.13) в уравнение (4.4.8), находим

(4.4.14)

(4.4.16)

С учётом (4.4.15), (4.4.16) из (4.4.14) получим

Ограничиваясь членами, содержащими гармоники из (4.4.17) находим

(4.4.18)

Так как

то из системы (4.4.18) следует

Отсюда имеем

Решая эту систему, получим

Так как для параметра справедливо неравенство то.

Выбираем параметр λ так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

Из первого неравенства следует .

Таким образом

, если ,

Из равенства (4.4.19) получим

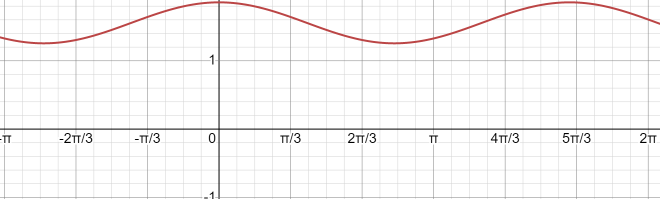
С учётом (4.4.19) периодическое решение уравнения Дюффинга (4.4.8) в первом приближении записывается в виде

Период периодического решения равен T=

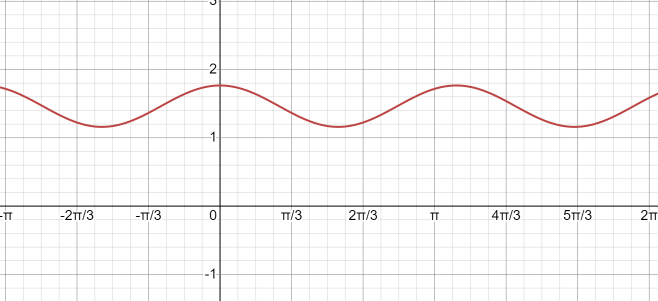
При имеем значения Из (4.4.21) получим выражение для периодического решения в первом приближении в виде

(4.4.22)

Для значений имеем следовательно



**Рис.2.Графическое изображение функции (4.4.23)**



**Рис.3. Графическое изображение функции (4.4.22)**

Рассмотрим дифференциальное уравнение Ван-дер-Поля с запаздыванием вида

где – величина запаздывания и

Решение будем искать в виде

Известно, что предельный цикл уравнения Ван-дер-Поля расположено симметрично относительно начала системы координат плоскости  поэтому будем пользоваться нечетными гармониками ряда Фурье.

Находим периодическое решение в первом приближении, положив тогда из (4.4.25) следует

где коэффициенты подлежат к выбору. Вычислим:

(4.4.27)

Так как

С учетом (4.4.26), (4.4.27) положим тогда Отсюда

Следовательно, из (4.4.26), (4.4.27), (4.4.28) имеем

С учётом этих выражений из уравнения (4.4.24) получим

Поскольку

тогда

Представим в виде

Выразим положим тогда

Положим тогда

Ограничиваясь гармоникой получим

Отсюда находим

Представим в виде

Выразим , положим

Тогда

Далее, положив в (4.5.30), имеем

Таким образом, вышеуказанные вычисления дают нам следующие значения коэффициентов и частоты периодического решения в первом приближении:

Итак, в первом приближении:

(4.4.32)

Положим тогда:

Что согласуется результатом работы [4]

Из находим

Возведя в квадрат обоих частей равенства и сложив, получим уравнение кривой на плоскости ():

В системе координат плоскости () кривая уравнении образует эллипс с центром О (0,0) и полуосями

**Заключение по главе 4**

В данной главе излагаются вопросы обоснования проекционно-итерационного метода для исследования периодического решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием, содержащих малый параметр. Предполагается существование периодического решения невозмущенной системы автономных дифференциальных уравнений. Введением угловой и нормальной переменной в окрестности периодического решения невозмущенной системы исходная система сведена к неавтономной квазилинейной системе интегро-дифференциальных уравнений с 2π-периодической правой частью, содержащей малый параметр. 2π-периодическое решение системы интегро-дифференциальных уравнений ищется согласно алгоритму проекционно-итерационного метода. На основе результатов главы 3 доказаны взаимообратные теоремы существования в окрестности точного периодического решения приближенного периодического решения, названного приближением Галеркина, и методом последовательных приближений доказано утверждение о существовании точного периодического решения в окрестности приближений Галеркина. Получены оценки погрешности разности между точным и приближенными периодическими решениями по равномерной и интегральной норме. Построены методом гармонического баланса в первом приближении периодические решения системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля, дифференциального уравнения Дюффинга с запаздывающим аргументом и дифференциального уравнения Ван-дер-Поля второго порядка с запаздыванием. Анализ показал, что величина запаздывания существенно влияет на амплитудно-частотные характеристики решений. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего анализа нелинейных динамических систем, а также для разработки новых методов численного моделирования и управления процессами в различных областях науки и техники.

**ВЫВОДЫ**

В диссертации излагаются вопросы существования и отыскания периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием второго порядка, а также системы интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием первого порядка с малым параметром, обладающим свойством автономности. Для исследования периодических решений дается обоснование применимости проекционно-итерационного метода, сочетающего идеи проекционного метода Галеркина и метода последовательных приближений с применением функции Грина.

Получены следующие результаты:

1. Дано обоснование применимости проекционно-итерационного метода исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием второго порядка, а также системы интегро-дифференциального уравнения с конечным последействием первого порядка с малым параметром, обладающим свойством автономности.
2. Доказана теорема о существовании приближения Галеркина в окрестности точного периодического решения и оценена величина разности приближенных и точных периодических решений.
3. Доказаны обратные теоремы существования точных периодических решений в окрестности приближений Галеркина и оценена их разность.
4. В первом приближении методом гармонического баланса, который относится к типу метода Галеркина, построены периодические решения системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля с конечным последействием, дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка с запаздыванием и дифференциального уравнения второго порядка Ван-дер-Поля с членом запаздывающего аргумента. Показано, что величина параметра запаздывания существенно влияет на амплитудно-частотные характеристики периодических решений.

Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами. Полученные результаты являются новыми. Алгоритмы, полученные в работе, можно использовать для исследования периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений более высокого порядка, а также для разработки методов численного моделирования и анализа в различных приложениях, связанных с нелинейными динамическими системами.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. **Аблабеков Б.С.** Обратные задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Б.С. Аблабеков // - Бишкек: Илим. -2001. -180 с.
2. **Алиев Ф.М.** Применение метода Галеркина к решению уравнений с запаздывающим аргументом [Текст] / Ф.М. Алиев // Изв.АН АзССР, -серия физ.-тех. и мат. наук. – 1964. - №1. - С.3-6.
3. **Алымбаев А.Т.** О нахождении периодических решений автономных систем интегро-дифференциальных уравнений //Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1983, вып.16,-С.226-233.
4. **Алымбаев А.Т.** Метод Бубнова-Галеркина построения периодических решений автономных систем интегро-дифференциальных уравнений // Математическая физика. – Киев:1983, вып.22, -С.3-7.
5. **Алымбаев А.Т.** О периодических решениях нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка //Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984, вып.17, -С.85-93.
6. **Алымбаев А.Т.** Периодические решения одного класса интегральных и интегро-дифференциальных уравнений //Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1985, вып.18, -С.219-226.
7. **Алымбаев А.Т.** Периодические решения системы автономных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений //Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1987, вып.20, -С.15-23.
8. **Алымбаев А.Т.** О периодических решениях дифференциальных уравнений //Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988, вып.21, -С.190-198.
9. **Алымбаев А.Т.** Периодические решения системы нелинейных дифференциальных уравнений //Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1989, вып.22, -С.139-143.
10. **Алымбаев А.Т.** Интегральные уравнения численно-аналитического метода //Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Бишкек: Илим, 1997, вып.26, -С.20-26.
11. **Алымбаев** А.Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач.– Бишкек: 2004, -175 с.
12. **Байзаков А.Б.** Особые точки интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / А.Б.Байзаков. – Бишкек: Илим. - 2007. -134 с.
13. **Бапа к.А.** Влияние интегрального члена к решению системы уравнений Ван-дер-Поля. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. /**/ Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. -Бишкек, 2022. - №1. - С3-7. <http://www.science-journal.kg/media/Papers/nntiik/2022/1/%D0%9D%D0%9D%D0%A2_-_1_2022%D0%B3_pdf_3-7.pdf>
14. **Бапа к.А.** Дюффингдин кечиккен аргументтүү мүчөнү кармаган экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемесинин мезгилдик чыгарылышы. [Текст] / А.Бапа к. // Вестник Кыргызстана. – Бишкек, 2023. - №2 (1). – С312-316. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=60061648>
15. **Бапа к.А.** Квазисызыктуу дифференциалдык теңдемелердин системасынын мезгилдик чыгарылышы. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. //** Известия ВУЗов Кыргызстана. - Бишкек, 2022. - №2. – С.21-26. <http://www.science-journal.kg/media/Papers/ivk/2022/1/%D0%98%D0%92%D0%9A-_2_2022%D0%B3_pdf_21-26.pdf>
16. **Бапа к.А.** О методе Галеркина построения периодических решений квазилинейной интегро-дифференциальной уравнении второго порядка. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. /**/ Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и образования» посвященной 80- летию заслуженного деятеля науки КР, члена-корр. НАН КР, д.ф.-м.н., профессора, почетного академика НАН КР К.Алымкулова. - Ош, 2023. - №1. – С13-21. <http://alymkulov-0.oshsu.kg/uploads/1_.pdf>
17. **Бапа к.А.** О методе гармонического баланса построения периодического решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. //**ALATOO ACADEMIC STUDIES. - Бишкек, 2022. - №2. -С**. 459-463.** <https://drive.google.com/file/d/1osM-H1KlKYqaH9v1Ki_qt2bOdk9Osf2i/view>
18. **Бапа к.А.** О существовании периодического решения системы нелинейных автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием.[Текст] / А.Бапа к.  **/**/ Вестник науки и образования. - Иваново, 2022. - № 1 (121). – С16-21 стр. [Электронный ресурс]. URL:<http://scientificjournal.ru/images/PDF/2022/121/o-sushchestvovanii-.pdf>
19. **Бапа к.А.** Периодическое решение дифференциального уравнения Ван-дер-Поля с запаздыванием. [Текст] / А.Бапа к.  **/**/ Вестник БатМУ. -Баткен, 2023. - №1. – С3-6.
20. **Бапа к.А.** Периодическое решение квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. /**/ Вестник Иссык-Кульского университета. – Каракол, 2022. - № 53. -С28-33 <http://libraryiksu.kg/vestnik>
21. **Бапа к.А.** Периодическое решение системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. /**/ Вестник науки и образования. - Иваново, 2022. - № 1 (121). - С5-12 стр. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48007904>
22. **Бапа к.А.** Построение решения системы квазилинейных уравнений методом простой итерации. [Текст] / А.Бапа к.  **/**/ ALATOO ACADEMIC STUDIES. - Бишкек, 2022. - №3. -С402-406 . https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49822432
23. **Бапа к.А.** Существование периодического решения дифференциального уравнения второго порядка. Метод функции Грина. [Текст] / **А.Т. Алымбаев, А.Бапа к. /**/ Вестник Иссык-Кульского университета. – Каракол, 2023. - № 55. -С7-14 [https ://libraryiksu.kg/vestnik/arhiv/75](https://libraryiksu.kg/vestnik/arhiv/75)
24. **Бапа кызы А**. Application of the summary-difference method with a regularizer to construct an asymptotic solution to the boundary value problem of a system of nonlinear difference equations. [Текст] / **А.Т. Алымбаев,** К.М.Мурзакулова, **А.Бапа к. /**/Вестник Института математики НАН КР. – Бишкек, 2021. - №2. - 74-80 стр. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49308086>
25. **Вайнико Г.М., Мийдла П.Х.** О сходимости приближенных методов отыскания автоколебания [Текст] / Г.М. Вайнико, П.Х. Мийдла // Учен.зал. Тарт.ун-та. -1977. -вып.430. -С.75-88.
26. **Ван-дер-Поль.** Нелинейная теория электрических колебаний [Текст] / Ван-дер-Поль. –М.: Связьиздат. -1936.-129 с.
27. **Вуйтович Б., Нуржанов О.Д.** Метод Бубнова-Галеркина для нелинейных периодических систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последействием [Текст] / Б.Вуйтович., О.Д. Нуржанов / Киев. -1982. -36с. – (Преприат / АН УССР. Ин-т.математики. -№82.50).
28. **Галеркин Б.Г.** Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластин [Текст] / Б.Г.Галеркин // Вестник инженеров, 1915, - Вып.19. -С.897-908.
29. **Гребенников Е.А., Рябов Ю.А.** Конструктивные методы анализа нелинейных систем [Текст] / Е.А. Гребенников., Ю.А. Рябов. –М.: Наука. – 1979. -431с.
30. **Гречко В.Н.** Об одном проекционно-итеративном методе [Текст] / В.Н. Гречко. // укр.мат.журн.-1974. - Т.26. -№4. -С. 534-539.
31. **Гулька С.С.** Проекционно-итеративный метод нахождения периодических решений нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с импульсивным воздействием [Текст] / С.С.Гулька // Аналит.методы исслед.нелинейн.колебаний. – Киев. -1980. -С.26-34.
32. **Канторович Л.В**. Функциональный анализ и прикладная математика [Текст] / Л.В. Канторович // Успехи мат.наук. – 1949. –Т.3. -№6. – С. 89-185.
33. **Келдыш М.В.** О методе Б.Г. Галеркина для решения краевых задач [Текст] М.В. Келдыш // Изв.АН СССР. -Серия мат.-1942. -Т.6. -№6. -С.309-330.
34. **Кибенко А.В.** Приближенное решение нелинейной периодической системы методом Галеркина [Текст] / А.В. Кибенко// Граничные задачи для дифференциальных уравнений. Киев. - 1990. - С. 87-94.
35. **Кондратьева А.А.** Численно-аналитические методы локализации предельных циклов в математических моделях нелинейной динамики [Текст] / А.А. Кондратьева / -М.: Доброе слово. -2019. -48 с.
36. **Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.** Введение в нелинейную механику [Текст] / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов // -Киев: Изд-во АН УССР, -1937, -363 с.
37. **Курпель Н.С.** Проекционно-итеративные методы решений операторных уравнений [Текст] / Н.С. Курпель. – Киев: Наукова думка. - 1968. - 244 с.
38. **Кучеренко Э.Н.** Об одном видоизменении метода Галеркина для краевой задачи обыкновенного нелинейного дифференциального уравнений [Текст] / Укр.мат.журн.-1981,33. -№5. -С.597-603.
39. **Лучка А.**Ю. Ярнуш Я.Н. Быстрота сходимости проекционно-итеративного метода построения периодических решений дифференциальных уравнений. / Труды междунар.симпозиума по нелиней.колебаниях.-Киев: Тезисы докл.-1981.-с 204-205.
40. **Митропольский Ю.А., Самойленко А.Н., Мартынюк Д.Н.** Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами [Текст] / Ю.А. Митропольский, А.Н. Самойленко, Д.Н. Мартынюк // Киев: Наукова думка. – 1984. -216 с.
41. **Нуржанов О.Д. Алымбаев А.Т.** Численно-аналитический метод исследования периодических решений автономных систем интегро-дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн., -1981, -Т.33, №4,- с.540-547.
42. **Мартынюк Д.И. Козубовская** **И.Г**. К вопросу о периодических решениях квазилинейных автономных систем с запаздыванием. / Укр.мат.журн., -1968, -Т.20, №2,- с.263-265.
43. **Мартынюк Д.И.** Лекции по теории устойчивом решении систем с последействием. – Киев: Ин-т.матем.АН УССР, - 1970, -177с.
44. **Розенвассер Е.Н.** Колебания нелинейных систем [Текст] / Е.Н. Розенвассер // - М.: Наука, -1969. -576 с.
45. **Рубаник В.П.** Колебания квазилинейных систем с запазыванием [Текст] / Рубаник В.П. // – М.: Наука, 1969, -287 с.
46. **Ронто Н.И.** О методе коллокации для линейных периодических систем с запаздывающим аргументом [текст]/ Ронто Н.И.// Электрон.моделирование, 1980, №3, -с.48-52.
47. **Ронто Н.И.** Метод тригонометрических полиномиальных приближений при исследовании периодических решений [текст]/ Ронто Н.И.// Докл. АН УССР.Сер.А, 1984, №2, -с.16-19.
48. **Ронто Н.И.** Тригонометрическое приближение причисленно-аналитическом методе исследования периодических решений [текст]/ Ронто Н.И.// Тез.IX Междунар. конф.по нелинейным колебаниям. -Киев, 1981, -с.279-280.
49. **Ронто Н.И.** О нахождении периодических решений квадратурно-разностным методом. [текст]/ Ронто Н.И.// Тезисы докл.Респ.науч.-техн. «Интегральные уравнения в прикладном моделировании». -Киев: Наук.думка, часть 2, 1983, -с.1989-190.
50. **Польский Н.Н**. Проекционные методы в прикладной математике [Текст] / Польский Н.Н./ ДАН СССР, 1963 , Т.143, №4, -с.787-790.
51. **Самойленко А.М.** Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. 1. [Текст] / Самойленко А.М. / Укр. мат. журн., -1965, т.17, №4,- с. 82-93.
52. **Самойленко А.М.** Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. 2. [Текст] / Самойленко А.М. / Укр. мат. журн., -1966, т.18, №2,- с. 50-59.
53. **Самойленко А.М., Вуйтович Б.** Метод Галеркiна на решуку периодичных разв'язкив для iнтегро-дифференцийных рiвнянь типу Вольтерра [Текст] / А.К. Самойленко, Б. Вуйтович // Вестник Киев.ун-а.- Математика и механика. -1933, - №:25. -С.128-138.
54. **Самойленко А.Н., Нуржанов О.Д**. Метод Бубнова-Галеркина построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра [Текст] / А.Н. Самойленко., О.Д. Нуржанов // Дифференц.уравнения. -1979, 15. -№8, -С. 1503-1507.
55. **Самойленко А.Н., Ронто Н.Н.** Численно-аналитические методы исследования периодических решений [Текст] / А.Н. Самойленко, Н.Н. Ронто – Киев: Вица школа. – 1976. -130 с.
56. **Самойленко А.Н., Ронто Н.Н.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач [Текст] / А.Н. Самойленко, Н.Н. Ронто // -Киев: Наукова Думка, -1986. -215 с.
57. **Свирский Н.В.** Методы типа Бубнова-Галеркина и последовательных приближений [Текст] / Н.В. Свирский. – М.: Наука, - 1968, -198 с.
58. **Стрыгин В.В.** Применение метода Бубнова-Галеркина к задаче отыскания автоколебаний [Текст] / В.В.Стрыгин // Прикл.математика и механика. -1973, 36. - №6. -С.1015-1019.
59. **Стрыгина С.О., Забрейко П.П.** О периодических решениях эволюционных уравнений [Текст]/ Стрыгина С.О., Забрейко П.П./-Мат.заметки, - 1971, 9, №6, -с.651-662.
60. **Ткач Б.П.** О периодических решениях счетной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа [Текст] / Ткач Б.П. / Укр.мат. журн., -1965, 17, №4, -с.73-85.
61. **Урабе М.** Метод Галеркина для нелинейных периодических систем [Текст] / М.Урабе // Сбор.переводов. –Механика. -1966. –T.97. -№3.

-С.3-34.

1. **Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах** [Текст] / **Хейл Дж.** /- М.: Мир, -1966, -230с.
2. **Чезари Л. Асимптотические поведения и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений**[Текст] / **Чезари Л.** /- М.: Мир, -1964, -477 с.
3. **Bapa kyzy A.** The Galerkin method for constructing solutions to a quasilinear differential equation of the second order. Вестник Института математики НАН КР №1 2022.
4. **Delamotte B.** Nonperturbative (but approximate) method for solving differential equations and finding limit cycles [Текст] / B. Delamotte // Physical Review Letters. -1993. –V.70. -№22.-P.  314-348
5. **Neuman C.P., Sen A.** Galerkin’s procedure, quasilinearization and nonlinear boundary-value problems [Текст] / C.P. Neuman., A. Sen / Journ.Opt.Theory and Appl.-1972,9.-№6.- P.433-437.
6. **Stokes A.** On the approximations of nonlinear oscillations [Текст] // Journal. Differential Equations. -1972.-V.12, -№3.-p.515-538.
7. **Urabe M.** Galerkin’s procedure for nonlinear periodic systems [Текст] / M.Urabe // Arch.Ration.Menh.and Anal. -1965, 20.-№2.-P.120-152.
8. **Urabe M. Reiter A.** Numerical computation of nonlinear forced oscillations by Galerkin’s procedure [Текст] / M.Urabe. A. Reiter // Journal Math.Anal.Appl.-1966, 14.-№1.-P.107-140.
9. **Yamomoto Norio.** An error analytic of Galerkin approximations differential system. [Текст] / Yamomoto Norio // Journal Math.Tokushima Univ.-1979. –Vol.13.-p.53-77.
10. **Zelik S.** Inertial manifold and finite-dimensional redaction for dissipative PDE s [Текст] / S. Zelik //Proc. ROY.Soc. Edinburgh, Ser.A. -2014. – V. 144.-NE.-P.1245-1327.
11. **Alymbaev A.T.** Periodic solutions of a second- order nonlinear Volterra

integro-differential equation [Текст]. / A.T Alymbaev, A. Bapa kyzy, F.K. Sharshembieva /Advances in Differential Equations and Control Processes, Volume 31, Number 2, 2024, p. 285-297.