**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**Кыргызский НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**им. Ж.БАЛАСАГЫНА**

На правах рукописи

УДК 517.95

**Жороев Автандил Кемелович**

**Обратные задачи для гипербоЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

**третьего порядка**

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и

оптимальное управление

**Диссертация на соискание ученой степени**

**кандидата физико-математических наук**

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор Аблабеков Б.С.

**Бишкек-2024**

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ** | **4** |
|  | **ВВЕДЕНИЕ** | **5** |
| **ГЛАВА 1** | **ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ** | **5** |
| **1.1.** | **Краткий обзор работ, тесно связанных с задачами данной диссертации** | **9** |
| **1.2.** | **Обзор результатов диссертации** |  |
|  | **Заключение по главе 1** |  |
| **ГЛАВА 2** | **МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ** |  |
| **2.1** | **Объект, предмет и задачи для исследования** |  |
| **2.2.** | **Методы исследования** |  |
|  | **Заключение по главе 2** |  |
| **ГЛАВА 3** | **ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО уравнения с кратными характеристиками** |  |
| **3.1.** | **Задача Коши для гиперболического уравнения третьего порядка** |  |
| **3.2.** | **Об определении источника, зависящего от времени в гиперболическом уравнении третьего порядка** |  |
| **3.3.** | **Обратная задача определения источника, зависящего от пространственных переменных в гиперболическом уравнении третьего порядка** |  |
| **3.4.** | **Об определении зависящего от времени младшего коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка** |  |
|  | **Заключение по главе 3** |  |
| **ГЛАВА 4** | **ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО уравнения с различными характеристиками** |  |
| **4.1.** | **О разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка** |  |
| **4.2.** | **Обратная задача определения источника в одном гиперболическом уравнении третьего порядка** |  |
| **4.3.** | **О корректной разрешимости обратной задачи определения источника в гиперболическом уравнения третьего порядка** |  |
|  | **Заключение по главе 4** |  |
|  | **ЗАКЛЮЧЕНИЕ** |  |
|  | **ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ** |  |
|  | **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ** |  |

**Перечень основных обозначений и определений**

Сначала введем необходимые обозначения и определения:

**ИУ –** интегральное уравнение;

**ИУВ –** интегральное уравнение Вольтерра;

**ОУВ** - операторное уравнение Вольтерра;

**СЛДУ –** система линейных дифференциальных уравнений;

****={1,2,3,…} – множество натуральных чисел;

**** – множество действительных чисел;

,-фиксированное число,







**–** означает “принадлежит”;

**–** означает “для любого”;

∃**–** означает “существует”;

**–** означает “существует единственное**”;**

⇒ – «следует»;

 оператор Лапласа по переменной .

- пространство *l* - раз непрерывно дифференцируемых в области  функций, в частности, 

,

 пространство функций , определенных в ** и таких, что  при ;

**Введение**

Обратные задачи играют важную роль в процессе распознавания природных явлений, а аппарат интегральных уравнений широко используется в физике, механике, теории управления и прикладной математике. Термин «обратная задача» был предложен видными русскими математиками М.М. Лаврентьевым (1969) и В.Г. Романовым (1969).

Под обратными задачами для дифференциальных уравнений понимают задачи нахождения неизвестных коэффициентов, правых частей, а также начальных или граничных условий и решений дифференциальных уравнений по заданной дополнительной информации (переопределении) о решении прямой задачи.

История развития теории обратных задач, ее современное состояние, подробная библиография изложены в монографиях [1,4,9,12,14,30,31,36,44].

Важный исследовательский вклад в теорию обратных задач для уравнений гиперболического типа второго порядка были сделаныВ.Г.Романовым, С.И.Кабанихиным и их учениками [5]- [7].

**Актуальность темы.** Многие задачи, связанные с моделированием процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах [1], процесс влагопереноса в почво-грунтах [3],передачи тепла в гетерогенной среде [3],распространение акустических волн в одномерной изотропной однородной среде с дисперсией и поглощением [4], процесс распространения возмущений в упругой среде [5], приводятся к изучению обратных задач для уравнений в частных производных третьего порядка**.** В частности,распространение акустических волн в однородной среде с дисперсией и поглощением описывается уравнение [3,4]

**** (0.1) ****-давление, , оператор Лапласа по  и положительные постоянные  и  имеют смысл релаксации и предельных фазовых скоростей звука соответственно.Введем безразмерные переменные  сохранив прежние обозначения положим, и .

Тогда уравнение (0.1) для одномерной изотропной среды в новых переменных имеет вид

**** (0.2)

Для реальных сред , следовательно .

Задачи, связанные с моделированием процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах [1], процесс влагопереноса в почво-грунтах [2,3],передачи тепла в гетерогенной среде [4] описываются псевдопараболическими и псевдогиперболическими уравнениям третьего порядка. Распространение акустических волн в слабо неоднородных средах [5] приводятся к краевым задачам для гиперболического уравнения третьего порядка

Диссертация посвящена исследованию вопросов об однозначной разрешимости линейных и нелинейных обратных задач для двух видов гиперболического уравнения третьего порядка.

**Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами.** Исследование по теме диссертации проводилось в рамках утвержденной тематики кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий Кыргызского национального университета им. Ж.Баласагына.

**Объект исследования.** Исследуются линейные и нелинейные обратные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка с кратными и различными характеристиками.

**Цель и задачи исследования. Целью** исследования диссертационной работы является доказательство разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений в частных производных третьего порядка. Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

1) найти достаточные условия однозначной разрешимости решения прямых задач для гиперболических уравнений третьего порядка;

2) найти достаточные условия разрешимости линейных и нелинейных обратных задач для гиперболических уравнений третьего порядка.

**Научная новизна полученных результатов.** Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и имеют строгое доказательство. В теоретическом отношении результаты диссертации продолжают развитие теории обратных задач математической физики и получены следующие результаты:

1) Найдены достаточные условия решения прямых задач для гиперболических уравнений в частных производных третьего порядка;

2) Определены условия существования и единственности решения обратных задач определения источника, коэффициента для гиперболических уравнений в частных производных третьего порядка.

**Практическая значимость полученных результатов. Практическая значимость полученных результатов.** Полученные в диссертации научные результаты носят теоретический характер. Однако, учитывая, что обратные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка широко используются при распространение акустических волн в однородной среде, в механике жидкости и газа, влагопереноса следует, что результаты данной работы могут быть использованы для решения некоторых прикладных задач. Мы надеемся, что полученные в диссертации результаты будут способствовать развитию теории обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными высокого порядка. Полученные результаты также могут быть использованы при исследовании одномерных и многомерных обратных задач для гиперболических уравнений четвертого и более высокого порядков, а также при решении прикладных задач, приводящих к таким уравнениям.

**Основные положения, выносимые на защиту**:

1) Достаточные условия существования и единственности решение задачи Коши гиперболического уравнения с кратными характеристиками;

2) достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения обратной задачи определения источника, зависящее от времени в гиперболическом уравнении с кратными характеристиками;

3) достаточные условия для разрешимости обратной задачи восстановления источника, зависящее от пространственных переменных в гиперболическом уравнении с кратными характеристиками;

4) разрешимость задачи определения зависящее от времени коэффициента при младшем члене в гиперболическом уравнении с кратными характеристиками;

5) Достаточные условия, обеспечивающие однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения с разными характеристиками;

6) разрешимость обратной задачи определения правой части зависящее от времени в гиперболическом уравнении с разными характеристиками, когда сомножитель зависит от пространственных переменных;

7) разрешимость обратной задачи определения правой части зависящее от времени в гиперболическом уравнении с разными характеристиками, когда сомножитель зависит от всех переменных;

**Методы исследования.** Для поставленных задач доказывается соответствующие теоремы существования и единственности решения прямых задач, а также будут построены ее явное решение.Техника доказательства теоремы однозначной разрешимости решения обратных задач основано перехода от исходной обратной задачи к системе ИУ типа Вольтерра второго рода. Для этого используя дополнительные условия (условия переопределения) и явное решение соответствующих прямых задач, исследуемую обратную задачу приводим к системе ИУ типа Вольтерра второго рода. Далее, применяется метод операторных уравнений Вольтерра.

**Личный вклад соискателя.** Результаты исследований диссертации получены автором.В совместных работах [7]-[9] постановка задач и обсуждение полученных результатов проводились при непосредственном участии научного руководителя. Задачи поставлены научным руководителем. В совместной работе [10] обсуждение результатов принадлежит Б.С.Аблабекову и А.Р.Асанову, а научные результаты принадлежат автору.

**Апробация результатов исследования.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и международных научных конференциях:

-Международная научная конференция «Современные проблемы математики», посвященная 70-летию академика А.А.Борубаева. - Бишкек: Институт математики НАН КР, 16-18 июня 2021;

- XV международная молодежная научная школа-конференция. Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач посвященная 85-летию академика РАН В.Г. Романова 30 октябрь- 3 ноябрь 2023;

- Международная научная конференция «V Борубаевские чтения», посвященная 70-летию Национальной академии наук Кыргызской Республики и 40-летию Института математики НАН КР.

- Обратные и некорректные задачи» (Бишкек, КГМУ, 2018-2022 гг.), руководитель д.ф.-м.н., профессор Аблабеков Б.С.;

- На расширенном семинаре кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий (Бишкек, КНУ им. Ж.Баласагына, 2023гг.).

**Полнота отражения результатов диссертации в публикациях.** По результатам исследований соискателем опубликованы: 7 статей [1]-[7] и трех тезисов доклада [8-10]. В том числе две статьи [5], [6] опубликованы в журналах, индексируемых в базе RSСI. Импакт факторы, трех журналов [5]-[8], в РИНЦе не менее 0,1.

**Структура и объем диссертации**. Работа состоит из оглавления, списка условных обозначений и определений, принятых в работе, введения, четырех глав, разбитых на 11 параграфов, выводов, списка использованной литературы. Список использованной литературы содержит 60 наименований. Объем текста диссертации 90 страниц. Нумерация формул, определений, лемм и теорем обозначается тремя цифрами, т.е. если формула имеет номер (1.2.1), то это означает, что это формула 1 второго раздела первой главы.

Рассматривается задача Коши для одного гиперболического уравнения третьего порядка, которое возникает при распространении акустических волн в однородной среде с дисперсией и поглощением [1,2]. Ставится обратная задача, состоящая в определении неизвестного источника, зависящего от времени. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи задаются значения решения задачи с данными на характеристиках при фиксированном значении одной из независимых переменных. Доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи. Доказательство основано на выводе линейного операторного уравнения типа Вольтерра для неизвестного источника и доказательстве его разрешимости

Обратным задачам для гиперболических уравнений второго порядка изучались многими авторами, более подробную информацию можно найти в монографиях [3,4]. Обратные задачи для псевдопараболических, псевдогиперболических уравнений третьего порядка изучены в работах [5, 6].

Для гиперболических уравнений третьего порядка известны некоторые результаты. Например, в работе [6] исследовались коэффииентные обратные задачи определения коэффициента зависящих от пространственных переменных. Обратные задача определения неизвестного источника, коэффициента зависящего от времени для гиперболического уравнения третьего порядка исследованы в работах [7-9].

**ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ**

**В этой главе** приводятся обзор работ по теме диссертационной работы и формулируются основные задачи, рассматриваемые в данной диссертации.

Обратные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка – сравнительно молодое направление в теории обратных задач. Вопросы разрешимостиразличных обратных задач для гиперболических, псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений третьего порядка изучались в работах [1-4]. Ранее обратные задачи определения коэффициента зависящего от пространственных переменных для гиперболических уравнений третьего порядка, когда области определения искомого коэффициента и условие переопределение не совпадает изучены в [3,4]. В работе [3] построено решение задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка. Получено явное решение, аналогичное формуле Даламбера. В [4] методом операторных уравнений Вольтерра исследована коэффициентная обратная задача для гиперболического уравнения третьего порядка.

**1.1. Краткий обзор работ, тесно связанных с задачами данной диссертации**

**Задача 1.** Для уравнения

**** (1.1.1)

рассмотрим в области  задачу Коши с начальным условием

(1.1.2)

При заданных задача (1.1.1), (1.1.2) является корректной, если подходящим образом подобраны функциональные пространства для данных задачи и пространство решений. Действительно, если   

то эти условия гарантируют существование в  классического решения задачи (1.1.1), (1.12 ) т. е*.*

Прежде чем поставить обратную задачу, докажем существование и единственность решения задачи (1.1.1), (1.1.1) и установим некоторые свойства этого решения.

Обозначим через  треугольник на плоскости *x, t,* ограниченный осью *х* и характеристиками уравнения (1.1.1), проведенными через точку (*x,t).*

**ЛЕММА 1.1.1.** Если для какого- либо ,то в области существует единственное классическое решение задачи(1.1.1), (1.1.2).

**ЗАДАЧА 2.** Найти  если решение задачи (1.1.1), (1.1.2) при заданных функциях известно на множестве *х=*0*,* 0*≤t≤T* вместе со своей производной по *х* до второго порядка:

** (1.1.3)

Заметим, что при выполнении условий леммы 1.1.1 функции  являющиеся данными обратной задачи, должны обладать следующей гладкостью:

 (1.1.4)

Кроме того, функции  должны удовлетворять некоторым условия согласования:



 (1.1.5)



**ТЕОРЕМА 1.1.1**. Если для функций выполнены условия леммы 1.1.1, а также для функций  - условия (1.1.4), (1.1.5) и условия

** (1.1.6)

то для достаточно малых решение обратной задачи 1 существует, единственно и принадлежит классу 

Хорошо известно, что распространение акустических волн в однородной среде с дисперсией и поглощением описывается уравнение [3,4]

**** (1.1.7) ****-давление, , оператор Лапласа по  и положительные постоянные  и  имеют смысл релаксации и предельных фазовых скоростей звука соответственно.Введем безразмерные переменные  сохранив прежние обозначения положим, и .Тогда уравнение (1.1.7) для одномерной изотропной среды в новых переменных имеет вид

**** (1.1.8)

Для реальных сред , следовательно .

В работе [1] изучена задачи Коши для уравнения (1.1.8) при  и и построено явное решение этой задачи.

**Задача 3.** Рассмотрим теперь следующую задачу Коши, связанную с оператором *.* Требуется найти функцию *,*  удовлетворяющую в *,* уравнению

****** (1.1.9)

начальным условиям

 (1.1.10)

Справедлива

**ТЕОРЕМА 1.1.2**. Если то классическое решение задачи (1.1.9), (1.1.10) существует, единственно и выражается формулой



 (1.1.11)

Кроме того, это решение непрерывно зависит от начальных данных  и их производных до второго порядка включительно из *.* Таким образом, задача Коши (1.1.9), (1.1.10) поставлена корректно, причем  *-* класс корректности классической задачи.

**Обратная задача 2.** Для уравнения

******(1.1.12)

рассмотрим задачу определения функции  если известно, что решение уравнения (1.1.10) при условиях

(1.1.13)

принимает при вместе со своей производной по *х* заданные значения

(1.1.14)

Для обратной задачи (1.1.12) -( 1.1.14) условия согласования имеют вид

 (1.1.15)

Справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 1.1.3**. Если для какого-либо  для функций  выполнены условия теоремы 1.1.1 и **условие (1.1.15) и условия  то для достаточно малых  на отрезке  решение обратной задачи (1.1.12) - ( 1.1.14)  и принадлежит классу 

**1.2. Обзор результатов диссертации**

Основные результаты диссертации приведены в главах 3, 4.

В третьей главе исследованы вопрос о существовании и единственности решения прямой и обратных задач для гиперболического уравнения третьего порядка, когда уравнение имеет кратные характеристики.

В пункте 3.1 строится решение задачи Коши с помощью фундаментального решения гиперболического оператора **.**

**Задача Коши.** Рассмотрим следующую задачу Коши, связанную с оператором *.* Требуется найти функцию *,*  удовлетворяющую в *,* уравнению

**** (1.2.1)

и начальными условиями

 (1.2.2)

# При этом предполагается, что



Найти обобщенную функцию удовлетворяющую условиям

**(1.2.3)

 (1.2.4) где



**1.2.1. Фундаментальное решение оператора .**

**Определение 1.2.1.** Обобщенная функция  называется фундаментальным решением задачи Коши для оператора **, если она удовлетворяет равенствам

** (1.2.5)

**ТЕОРЕМА 1.2.1.** Фундаментальное решение задачи Коши для оператора ** имеет вид

** (1.2.6)

**Теорема 1.2.2.** Решение задачи обобщенной Коши (1.2.3), (1.2.4) представимо в виде

 (1.2.7)

Здесь функция  фундаментальное решение оператора .

**Теорема 1.2.3.** Для обобщенного решения задачи Коши (1.2.3), (1.2.4) имеют место формулы

 (1.2.8)

**Определение 1.2.2.** Классическим решением задачи Коши (1.2.1), (1.2.2) называется функция , имеющая все непрерывные производные входящие в уравнении (1.2.1) и удовлетворяющая уравнению (1.2.1), и начальным условиям (1.2.2).

**Теорема 1.2.4.** Если  то классическое решение задачи (1.2.1), (1.2.2) существует, единственно и выражается формулой (1.2.8). Кроме того, это решение непрерывно зависит от исходных данных   *.*

В пункте 3.2 изучается обратная задача определения источника, зависящее от времени**.**

Рассмотрим задачу Коши для функции :

**** (1.2.9)

 (1.2.10)

где



В прямой задаче требуется определить функцию  по известным функциям  и 

**Обратная задача.** Найти функцию если о решении прямой задачи (1.2.9), (1.2.10) известна дополнительная информация

** (1.2.11)

Другими словами, требуется по известным функциям   найти пару функций  удовлетворяющих (1.2.9)-(1.2.11).

Пусть 

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения задачи (1.2.9), (1.2.10).

**ТЕОРЕМА 1.2.5.** Если для какого - либо  функции  ,то в области  существует единственная функция  такая, что   и удовлетворяет задаче (1.2.9), (1.2.10).

**ТЕОРЕМА 1.2.6**. Пусть для функций   выполнены условия теоремы 1.2.5, идля функций  выполнены условия согласования . Тогда, если **, то для любого решение обратной задачи (1.2.9) -(1.2.11) на отрезке  существует, единственно и принадлежит классу .

В разделе 3.3 рассматривается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи определения пары функций , удовлетворяющих в  гиперболическому уравнению третьего порядка

, , (1.2.12)

удовлетворяющего начальным условиям

(1.2.13)

и условиям переопределения

, , , . (1.2.14)

Здесь , ,   – заданные функции.

Другими словами, требуется по известным функциям    найти пару функций удовлетворяющих (1.2.12)-(1.2.14).

Отметим, что в обратной задаче (1.2.12) - (1.2.14) области определения искомой функции и заданных дополнительных информаций не совпадают.

**Определение 1.2.3.** Решением обратной задачи (1.2.12) -(1.2.14) называется пара функций  таких, что  и функции  удовлетворяют (1.2.12)-(1.2.14) в области , а также условию (1.2.14) для .

Сформулируем и докажем теорему о существовании и единственности решения прямой задачи (1.2.12), (1.2.13).

**ТЕОРЕМА 1.2.7.** Пусть . Тогда в области  существует единственная функция  такая, что  и удовлетворяет задаче (1.2.12), (1.2.13).

В разделе 3.4 рассматривается вопрос об однозначной разрешимости следующей коэффициентной обратной задачи:

Рассмотрим задачу Коши для функции 

**** (1.2.15)

(1.2.16)

**Обратная задача.** Найти функцию если о решении прямой задачи (1.2.15) , (1.2.16) известна дополнительная информация

** (1.2.17)

Другими словами, требуется по известным функциям   найти пару функций удовлетворяющих (1.2.15) -(1.2.16).

В прямой задаче требуется определить функцию  по известным функциям  и 

Пусть 

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения задачи (1.2.15), (1.2.16).

**ТЕОРЕМА 1.2.8.** Если для какого - либо  функции   ,то в области  существует единственная функция такая, что   и удовлетворяет задаче (1.2.15), (1.2.16).

В четвертой главе исследованы вопрос о существовании и единственности решения прямой и обратных задач для гиперболического уравнения третьего порядка, когда уравнение имеет различные действительные характеристики.

В разделе 4.1 рассматривается задача Коши

**** (1.2.18)

**** (1.2.19)

Обозначим через  треугольник на плоскости *,* ограниченный осью *х* и характеристиками уравнения (1.2.18), проведенными через точку *.*

**ТЕОРЕМА 1.2.9.** Если **** и ****, то существует единственное классическое решение задачи (1.2.18), (1.2.19), принадлежащее классу . Кроме того, это решение непрерывно, зависит от начальных данных **** и их производных до второго порядка включительно.

Вразделе 4**.**2. изучается обратная задача определения источника в одном гиперболическом уравнении третьего порядка

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения третьего порядка

**** (1.2.20)

**** (1.2.21)

где функции  заданные функции,  заданное число. Обозначим через .

Для прямой задачи (1.2.20) -(1.2.21) справедлива

**Лемма 1.2.1.** Пусть ****, ****, Тогда существует единственное классическое решение задачи (1.2.20), (1.2.21), принадлежащее классу . Кроме того, это решение непрерывно, зависит от начальных данных **** и их производных до второго порядка включительно.

Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть функции ,  и постоянная  заданы, а функция  неизвестна. Требуется найти пару функций  из условий (4.2.1)-(4.2.2) по дополнительной информации

 (1.2.22)

**Определение 1.2.4.** Решением обратной задачи (1.2.20) -(1.2.22) называется пара функций  удовлетворящее условиям (1.2.20) -(1.2.22).

Для обратной задачи (1.2.20) -(1.2.22) справедлива

**ТЕОРЕМА 1.2.10.** Если ,  , и выполнены условия согласования  **** то в области  существует единственное решение обратной задачи (1.2.20) -(1.2.22).

В разделе 4.3 исследована обратная задача нахождения решения и неизвестного источника, зависящей от времени для линейного гиперболического уравнения третьего порядка.

Рассмотрим задачу Коши для

**** (1.2.23)

**** (1.2.24)

где заданное число.

В прямой задаче требуется определить функцию  по известным функциям , 

**Обратная задача.** Пусть функция  имеет следующую структурыгде неизвестные и заданные функции соответственно. Требуется найти пару функций , если о решении прямой задачи (1.2.23), (1.2.24) известна дополнительная информация

 (1.2.25)

Обозначим через  и

**Определение.** Решением обратной задачи (1.2.23)-(1.2.25) называется пара функций  удовлетворящее условиям (1.2.23)-(1.2.25) .

Для обратной задачи (1.2.23)-(1.2.25)) справедлива

**ТЕОРЕМА 1.2.11.** Если ,  , и выполнены условия согласования **** то в области  существует единственное решение обратной задачи (1.2.23)-(1.2.25).

**Заключение по главе 1**

Выше приведенный обзор результатов работ дает основание поставить следующие задачи:

- с помощью фундаментального решения построить решение задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

- не изучены обратные задачи восстановления источника, зависящего от времени по переопределению во внутренней точке;

- не изучены обратные задачи восстановления источника, зависящего от пространственных переменных, когда области определения источника и область определения дополнительной информации не совпадает;

- не исследованы обратные задачи определения коэффициента при младшем члене, зависящего от времени по переопределению во внутренней точке;

Для решения выше поставленных задач по исследованию прямых задач для гиперболических уравнений третьего порядка используется метод сведения к линейному интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода с использованием соответствующих явных решений. Исследование поставленных обратных задач основано на использование результатов соответствующих прямых задач и на сведении к системе линейных или нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода.

**ГЛАВА 2. МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ**

**2.1. Объект, предмет и задачи для исследования**

**Объект исследования**. Объектом исследования диссертационной работы являются постановка и исследование корректности прямых и обратных задач для следующих гиперболических уравнений третьего порядка:

 (2.1.1)

**** (2.1.2)

**Предметом исследования** является изучение вопросов однозначной разрешимости, а также устойчивости решений прямых и обратных задач для гиперболических уравнений третьего порядка вида (2.1.1), (2.1.2).

**Задачи исследований.** В диссертационной работе решаются следующие задачи:

- установить достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка с кратными характеристиками и построить явное решение задачи;

- установить достаточные условия однозначной разрешимости обратной задачи определения источника, зависящего от времени в гиперболическом уравнении третьего порядка с кратными характеристиками;

- найти достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи определения источника, зависящего от пространственных переменных в гиперболическом уравнении третьего порядка с кратными характеристиками;

- установить достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка с различными характеристиками;

- найти достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи определения источника, зависящего от времени в гиперболическом уравнении третьего порядка с различными характеристиками.

**2.2. Методы исследования**

**2.2.1. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода**

Приводим некоторые сведения из работы [2], необходимые для дальнейшего исследования.

**2.2.1. Свойства оператора Вольтерра и его степени**

I. Вспомним определение норм в пространствах  и скалярного произведения в



Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго

 (2.2.1)

с непрерывным ядром *.*

Введем обозначение

 (2.2.2)

**ЛЕММА 2.2.1***.* Интегральный оператор с непрерывным ядром переводит  в (и, следовательно,  в и  в и ограничен, причем

 (2.2.3)

 (2.2.4)

 (2.2.5)

где



**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** а) Пусть  Тогда  - абсолютно интегрируемая функция на  и поскольку  непрерывно на функция  непрерывна на Поэтому оператор  переводит в и, в силу неравенства Коши-Буняковского, ограничен:



б) Пусть . Тогда ** и ограничен:

 Отсюда следует, что оператор ограничен как оператор из  в .

в) Пусть  Тогда действует из в и поэтому в силу неравенства Коши-Буняковского, имеем



откуда



Интегрируя и затем, возводя в степень ½, из последнего неравенство получим



Таким образом,  ограничен и как оператор из в .

1. В этом пункте рассмотрим оператор



и найдем его спектральный радиус  По определению, спектральным радиусом оператора К называется число, определяемой формулой



Положим *М=* и рассмотрим последовательность:





…………………………..



где ***.* Отсюда последовательно получаем оценки



Так как  то из последнего неравенства получаем



т.е.



Следовательно,



Таким образом, единственная точка спектра оператора  Отсюда можно сделать замечательный вывод, что при  уравнение  всегда имеет единственное решение, которое можно получить непосредственным разложением в ряд Неймана.

**2.2.2. Линейные интегральные неравенства**

**Лемма** 2.2.1. Если , то из неравенства

 (2.2.6)

следует, что

 (2.2.7)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (2.2.7) получаем

.

Интегрируя обе части этого неравенства от *0* до *х*  по *s* и умножая на , находим



или учитывая неравенство (2.2.6), приходим к неравенству (2.2.7).

**Лемма 2.2.2**. Если и, то из неравенства

, *x≥0,* (2.2.8)

следует, что

, (2.2.9)

а если, кроме того , то

, (2.2.10)

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Введем обозначение

 (2.2.11)

Очевидно, что . (2.2.12)

Учитывая принятое обозначение (2.2.11) и соотношение (2.2.12), получим

. (2.2.13)

Введя функцию *ξ(х)* равенством

, (2.2.14)

из (2.2.14) получаем



или

. (2.2.15)

Из (2.2.13), (2.2.14) и (2.2.15) получаем

.

При этом если , то из (2.2.8) следует (2.2.10).

# **2.2.3. Теорема о существовании и единственности решения** **интегрального уравнения Вольтерра второго**

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода

 (2.2.16)

в котором -неизвестная непрерывная функция;  - заданная непрерывная на сегменте функция;  -действительный параметр; *-* ядро интегрального уравнения -заданная непрерывная на квадрате функция.

Вместе с интегральным уравнением (2.2.16) рассмотрим соответствующий интегральный оператор

,

действующий в пространстве непрерывных функций  с нормой в нем:



Пусть  Тогда

 (2.2.17)

Сначала докажем, что справедлив обобщающий принцип сжимающих отображений.

**ТЕОРЕМА 2.2.1.** (***Обобщение принципа сжатых отображений***). Если некоторая степень  оператора , действующего в полном метрическом пространстве , является оператором сжатия, то уравнение

**  (2.2.18)

имеет единственное решение и это решение можно найти методом последовательных приближений.

Действительно, уравнение

** (2.2.19)

в силу принципа сжатых отображений имеет единственное решение, которое обозначим через  В силу единственности решения уравнения (2.2.18)  т.е. мы доказали, что уравнение (2.2.18) имеет решение  Допустим, что  –какое-либо решение уравнения (2.2.18) . Тогда *,* и поэтому  т.е. решение уравнения (2.2.18) единственно.

Так как оператор  является оператором сжатия, то решение уравнения (2.2.18) можно находить методом последовательных приближений.

**ТЕОРЕМА 2.2.2**(***Существование и единственность решения интегрального******уравнения Вольтерра***). Пусть правая часть  и ядро  интегрального уравнения (2.2.16) непрерывны в области их определения. Тогда уравнение (2.2.16) имеет единственное непрерывное на сегменте  решение.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Рассмотрим оператор

, (2.2.20)

действующий в пространстве . Тогда уравнение (2.2.16) можно записать в виде  Покажем, что некоторая степень оператора  при любом фиксированном значении параметра является оператором сжатия. А из этого и из теоремы 2.2.1 будет вытекать утверждение теоремы 2.2.2.

Пусть и  * –* какие- либо элементы пространства . Тогда  (2.2.21)

Предположим, что  тогда 

Так как ядро  непрерывно в замкнутой ограниченной области, то оно ограничено в этой области: 

# В силу неравенства (2.2.21) получим

 (2.2.22)

Обозначим через расстояние между и  тогда из неравенств (2.2.17) следует:

. (2.2.23)

Так как отношение



стремится к нулю при  то и выражение



при любом фиксированном стремится к нулю при .А это означает, что при любых фиксированных значениях  и достаточно больших  оператор будет оператором сжатия.

Будем находить решение уравнения (2.2.16) методом последовательных приближений, принимая за начальное приближение Тогда



где



Здесь мы пользовались формулой Дирихле перемены порядка интегрирования



которую легко вывести.

По определению **- й итерацией ядра называется ядро

. (2.2.24)

Методом полной математической индукции легко доказать, что

.(2.5.25)

В силу теорем 2.2.1 и2.2.2  есть решение уравнения (2.2.16).

Поэтому

. (2.2.26)

Исследуем теперь функциональный ряд

 . (2.2.27)

Так как



то методом полной математической индукции можно доказать, что

.

По признаку Даламбера убедимся, что при любом значении параметра  числовой ряд

 (2.2.28)

сходится. Поэтому при любом фиксированном значении  функциональный ряд (2.2.27) сходится равномерно и абсолютно в областях  и  к своей сумме 

 (2.2.29)

Функция называется резольвентой интегрального уравнения (2.2.16). Резольвента  является непрерывной функцией точки и при фиксированных значениях  и - аналитической функцией параметра во всей комплексной плоскости или целой функцией параметра.

На основании известной теоремы о предельном переходе под знаком интеграла формулу (2.2.26) можно записать в виде

 (2.2.30)

Из тождества (2.2.26) следует

.

Таким образом, резольвента  удовлетворяет уравнению

, (2.2.31)

которое называется интегральным уравнением резольвенты.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.1***.* Если функция *-* непрерывное решение интегрального уравнения (2.2.31), то 

Действительно, тогда



и потому 

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.2.** Однозначная разрешимость интегральных уравнений Вольтерра второго рода имеет место при более слабых предположениях относительно функций  и ядра , нежели их непрерывности.

Справедлива

**ТЕОРЕМА 2.2.3.** Пусть правая часть  и ядра  интегрального уравнение (1) принадлежит соответственно пространством  и  Тогда уравнение (2.2.16) имеет единственное решение из пространства 

***Пример 1****.* Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром 

***Решение****.* Имеем  Далее, согласно формулам (2.5.) получим



Тогда согласно формулу (2.2.29) получаем



**Заключение по главе 2**

Определены объекты, предмет и поставлены задачи для исследований, дан краткий обзор применямых методов, связанных с решениями задач настоящей диссертационной работы.

**ГЛАВА 3. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО уравнения с кратными характеристиками**

В этом разделе с помощью фундаментального решение построены явное решение задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка. ****

**3.1.1. Решение задачи Коши с помощью фундаментального решения оператора **

В этом пункте строится решение задачи Коши с помощью фундаментального решения гиперболического оператора

**Задача Коши.** Рассмотрим следующую задачу Коши, связанную с оператором *.* Требуется найти функцию *,*  удовлетворяющую в *,* уравнению

**** (3.1.1)

и начальными условиями

 (3.1.2)

# При этом предполагается, что



**3.1.1. Фундаментальное решение оператора .**

**Определение 3.1.1.** Обобщенная функция  называется фундаментальным решением задачи Коши для оператора **, если она удовлетворяет равенствам

** (3.1.3)

**ТЕОРЕМА 3.1.1.** Фундаментальное решение задачи Коши для оператора ** имеет вид

** (3.1.4)

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Применяя к равенству (3.1.3) преобразование Фурье *Fx* , получим

****

Пользуясь фундаментальным решением оператора **,** имеем

,

где  удовлетворяют условиям

 (3.1.5)

Общим решение задачи (3.1.5) является

,

Отсюда, используачальные условия, найдем

.

Следовательно, фундаментальное решение имеет вид

.

Отсюда, применяя обратное преобразование Фурье  и учитывая следующие формулы (см.[6]):

 

приходим к формуле (3.1.4). Теорема 3.1.1 доказана.

**3.1.2. Решение обобщенной задачи Коши**

Теперь заменим задачу (3.1.1), (3.1.2) на обобщенную задачу Коши, сформулированную в терминах обобщенных функций.

Она формулируется следующим образом: найти обобщенную функцию удовлетворяющую условиям

**(3.1.6)

 (3.1.7) шарттарын канатандырган  жалпыланган функциясын табуу керек .

Связь между задачами (3.1.1), (3.1.2) и (3.1.6), (3.1.7) дается в следующей лемме.

**Лемма 3.1.1.** Пусть  является решением задачи (3.1.6), (3.1.7). Тогда функция

 (3.1.8)

является решением задачи (3.1.6), (3.1.7).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Используя равенство (3.1.8) и свойства и функции, находим







**

**.

Отсюда получаем

 Равенства (3.1.7) является прямым следствием равенства (3.1.8). Лемма 3.1.1 доказана.

**Теорема 3.1.2.** Решение задачи обобщенной Коши (3.1.6), (3.1.7) представимо в виде

 (3.1.9)

Здесь функция  фундаментальное решение оператора .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Используя решение задачи Коши (3.1.6), (3.1.7), которое представимо в виде свертки, получим

**(3.1.10)

Так как из формулы (3.1.8) следует, что  при *,* то из полученного выше представления для вытекает равенство (3.1.9). Теорема 3.1.2 доказана.

**Теорема 3.1.3.** Для обобщенного решения задачи Коши (3.1.6), (3.1.7) имеют место формулы

 (3.1.11)

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для получения формулы (3.1.11) используем представление (3.1.9) и фундаментальное решение оператора

****

Введем следующие потенциалы:



**  (3.1.12)

**

**

где \* - обозначает свертку, - прямое произведение обобщенных функций,  обобщенные функции из .

Тогда решение задачи (3.1.6), (3.1.7) можно представить в виде

**

Вычислив свертку для и  приходим к формуле (3.1.11). ). Из (3.1.11) вытекает, что обобщенная функция  удовлетворяет начальным условиям (3.1.7) при  в смысле сходимости в пространстве 

**3.1.3.Классическое решение задачи Коши**

**Определение 3.1.2.** Классическим решением задачи Коши (3.1.1), (3.1.2) называется функция , имеющая все непрерывные производные входящие в уравнении (3.1.1) и удовлетворяющая уравнению (3.1.1), и начальным условиям (3.1.2).

**Теорема 3.1.4.** Если  то классическое решение задачи (3.1.1), (3.1.2) существует, единственно и выражается формулой (3.1.11). Кроме того, это решение непрерывно зависит от исходных данных  *.*

Доказательство следует из теоремы 3.1.2, 3.1.3 и леммы 6.3.1 из [4].

Таким образом, задача Коши (3.1.1), (3.1.2) поставлена корректно, причем   ** класс корректности классической задачи, и класс корректности обобщенной задачи Коши.

**Замечание 3.1.1.** Формула (3.1.11) представляет собой аналог формулы Даламбера.

**3.2. Об определении источника, зависящего от времени в гиперболическом уравнении третьего порядка**

В этом разделе исследуется обратная задача, состоящая в определении источника, зависящего от времени в линейном гиперболическом уравнении третьего порядка по дополнительной информации о решении этого уравнения. Доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи. Доказательство основано на сведении обратной задачи к линейному операторному уравнению, которое представляет собой систему линейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода относительно неизвестных функций, и последующем применении принципа сжимающих отображений.

**2.Постановка задачи и основные результаты**

Рассмотрим задачу Коши для функции :

**** (3.2.1)

(3.2.2)

где



В прямой задаче требуется определить функцию  по известным функциям  и 

**Обратная задача.** Найти функцию если о решении прямой задачи (3.2.1), (3.2.2) известна дополнительная информация

** (3.2.3)

Другими словами, требуется по известным функциям   найти пару функций  удовлетворяющих (1)-(4).

Пусть 

Сначала докажем теорему о существовании и единственности решения задачи (3.2.1), (3.2.2).

**ТЕОРЕМА 3.2.1.** Если для какого - либо  функции  ,то в области  существует единственная функция  такая, что   и удовлетворяет задаче (3.2.1), (3.2.2).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  есть решение задачи (3.2.1), (3.2.2), при  и это решение определяется формулой [6]:

 (3.2.4)

Тогда решение задачи (3.2.1) (3.2.2) можно записать в явном виде:

. (3.2.5)

Как и в работе [4], покажем , что это решение в области  имеет непрерывные частные производные до третьего порядка и определяет классическое решение задачи (3.2.1), (3.2.2). С этой целью перепишем двойной интеграл по области  в (3.2.5) в виде повторного

 (3.2.6)

Так как , то выражение, справа в формуле (3.2.4) имеет частные производные первого порядка:

 (3.2.7).(3.2.8)

Полученные равенства показывают, что функции ,  являются непрерывными в . Следовательно, правые части равенств (3.2.7), (3.2.8) в области  имеют непрерывные частные производные второго и третьего порядков:

 (3.2.9) (3.2.10) (3.2.11)(3.2.12)

 (3.2.13)

(3.2.14 (3.2.15)

Из формул (3.2.9)-(3.2.15) следует, что   ,   являются непрерывными функциями в , а функция  определяет классическое решение задачи (3.2.1), (3.2.2). Теорема 3.2.1 доказана.

Перейдем к исследованию обратной задачи. Справедлива

**ТЕОРЕМА 3.2.2**. Пусть для функций   выполнены условия теоремы 3.2.1, идля функций  выполнены условия согласования . Тогда, если **, то для любого решение обратной задачи (3.2.1)-(3.2.3) на отрезке  существует, единственно и принадлежит классу .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Положив в формуле (3.2.13) ,воспользуемся переопределением (3.2.3). Тогда получим



Введем обозначение

 

Тогда последнее соотношение имеет вид

. (3.2.16)

Уравнение (3.2.16) является линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода относительно функции . При выполнении условий теоремы, имеем что правая часть и ядро являются непрерывными функциями. Решение уравнения (19) имеет вид

 (3.2.17)

где резольвента ядра .

Подставляя найденную функцию  в (3.2.6), однозначно находим функцию 

 (3.2.18)

где

**.**

Тем самым однозначно определили функцию  на отрезке . Подставляя найденную функцию  в (3.2.6) однозначно находим функцию . Теорема 3.2.2 доказана.

Получимоценки устойчивости решения обратной задачи (3.2.1) -(3.2.3).

**ТЕОРЕМА 3.2.3.** Пусть данные обратной задачи  ,  и  ,  удовлетворяют условиям теоремы 3.2.2. Тогда, если решения обратной задачи (3.2.1)-(3.2.3) с данными  ,  соответственно, то  (3.2.19)

, (3.2.20)

где постоянная *С* не зависит от функций , .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из формулы (3.2.4), следует, что  (3.2.21)

Так как

,

то из (3.2.17) передем к норме, принимая во внимание неравенство (3.2.21). Далее, применив к полученному неравенству лемму Гронуолла-Беллмана, получим оценки (3.2.19), (3.2.20). Теорема 3.2.3 доказана.

**3.3. Обратная задача определения источника, зависящего от пространственных переменных в гиперболическом уравнении**

**третьего порядка**

В этом разделе рассматривается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи определения пары функций , удовлетворяющих в  гиперболическому уравнению третьего порядка

, , (3.3.1)

удовлетворяющего начальным условиям

 (3.3.2)

и условиям переопределения

, , , . (3.3.3)

Здесь , ,   – заданные функции.

Другими словами, требуется по известным функциям    найти пару функций удовлетворяющих (3.3.1)-(3.3.3).

Отметим, что в обратной задаче (3.3.1) - (3.3.3) области определения искомой функции и заданных дополнительных информаций не совпадают. Обратные задачи для гиперболического уравнения второго порядка в аналогичной постановке изучались в работах В.Г. Романова (см. [6]).

**Определение 3.3.1.** Решением обратной задачи (3.3.1)-(3.3.3) называется пара функций  таких, что  и функции  удовлетворяют (3.3.1)-(3.3.2) в области , а также условию (3.3.3) для .

Сформулируем и докажем теорему о существовании и единственности решения прямой задачи (3.3.1), (3.3.2).

**ТЕОРЕМА 3.3.1.** Пусть . Тогда в области  существует единственная функция  такая, что , , , , , , , ,  и удовлетворяет задаче (3.3.1), (3.3.2).

**Доказательство**. Пусть  есть решение задачи (3.3.1), (3.3.2), при  и это решение определяется формулой [5]:



. (3.3.4)

Тогда решение задачи (3.3.1) -(3.3.2) имеет вид

, . (3.3.5)

Покажем, что полученное решение в области  имеет непрерывные частные производные до третьего порядка и является классическим решением задачи (3.3.1), (3.3.2).

В силу условий наложенных на функции **, функция . Тогда выражение, стоящее справа в формуле (3.3.5) имеет частные производные первого порядка:

, (3.3.6)

. (3.3.7)

Равенства (3.3.6), (3.3.7) показывают, что функции ,  являются непрерывными функциями в области . Покажем, что из свойств заданных функций  также следует существование и непрерывность частных производных второго и третьего порядков:





Далее, обращая оператор , и используя данные задачи Коши, из (3.3.1), (3.3.2) получим

 (3.3.8)

где выражается через функции *.*

Дифференцируя(3.3.8) по *x* и *t,* получим

, (3.3.9). (3.3.10)

С помощью замены  из равенств (3.3.9), (3.3.10) приходим к системе

 (3.3.11) (3.3.12) Дифференцируя (3.3.11), (3.3.12) по *t,* а затем (3.3.12) по , получим



, (3.3.13)



, (3.3.14)



. (3.3.15)

Из формул (3.3.11) - (3.3.15) следует, что   ,   являются непрерывными функциями в , а функция  является классическим решением задачи (3.3.1), (3.3.2). Теорема 3.3.1 доказана.

Перейдем к исследованию обратной задачи.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 3.3.1 функции   являющиеся данными обратной задачи, должны обладать следующей гладкостью:

. (3.3.16)

Кроме того, функции   должны удовлетворять некоторым условиям согласования:

, , ,

, , , (3.3.17)

, , .

**ТЕОРЕМА 3.3.2**. Пусть для функций   выполнены условия теоремы 1, , а для функций   - условия гладкости (3.3.16) и условия согласования (3.3.17). Тогда для любого  на отрезке  существует единственное решение обратной задачи (3.3.1)-(3.3.3) и принадлежит классу 

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Положим в формулах (3.3.13), (3.3.14) и воспользуемся дополнительной информацией (3.3.3). Тогда



,



.

Складывая и вычитая эти равенства, c учетом ** получаем

 (3.3.18)

 (3.3.19)

где





Система (3.3.18), (3.3.19) представляет собой систему линейных интегральных уравнений Вольтерpа второго рода относительно функций ,  В силу условий теоремы функции ,, а также ядра   являются непрерывными функциями. Следовательно, система (3.3.18), (3.3.19) для любого имеет единственное решение на отрезке . Подставляя найденную функцию  в (3.3.5) однозначно находим функцию . Теорема 3.3.2 доказана.

**3.4. Об определении зависящего от времени младшего коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка**

**Прямая задача.** Рассмотрим задачу Коши для функции 

**** (3.4.1)

(3.4.2)

В прямой задаче требуется определить функцию  по известным функциям  и 

**Обратная задача.** Найти функцию если о решении прямой задачи (3.4.1), (3.4.2) известна дополнительная информация

** (3.4.3)

Другими словами, требуется по известным функциям   найти пару функций удовлетворяющих (3.4.1)-(3.4.4).

Пусть 

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения задачи (3.4.1), (3.4.2).

**ТЕОРЕМА 3.4.1.** Если для какого - либо  функции   ,то в области  существует единственная функция такая, что   и удовлетворяет задаче (3.4.1), (3.4.2).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Пусть  есть решение задачи (3.4.1), (3.4.2), при  и это решение определяется формулой [6]:

 (3.4.4)

Перенося в уравнении (3.4.1) функцию  в правую часть равенства, и используя формулу (3.4.4), получим линейное интегральное уравнение типа Вольтерра для функции :

 (3.4.5)

Из уравнения (3.4.5), условий теоремы 3.4.1 и выражения (3.4.4) следует, что для доказательства теоремы 3.4.1 достаточно доказать существование единственной функции , удовлетворяющей (3.4.5).

Докажем существование непрерывного решения уравнения (3.4.5). Для этого определим последовательность  равенствами

, . (3.4.6)

Из условий теоремы 3.4.1 следует, что . Как и в работе [6,12], используя метод математической индукции, несложно показать, что

** (3.4.7)

где

, .

Из оценки (3.4.7) следует, что последовательность функций , непрерывных в , равномерно сходится к функции , непрерывной в . Переходя в равенстве (3.4.6) к пределу при , получаем, что является решением уравнения (3.4.5). Таким образом, существование непрерывного решения уравнения (3.4.5) доказана.

Докажем единственность решения уравнения (3.4.5). Пусть функции являются решением уравнения (3.4.5). Тогда для их разности имеем однородное уравнение

, (3.4.8)

которое имеет только нулевое решение в классе непрерывных функций в области  Действительно, если



то из (3.4.8) вытекает

 (3.4.9)

И, значит,  и, следовательно, в .

Таким образом, мы показали существование единственного непрерывного решения интегрального уравнения (3.4.5). Покажем теперь, что это решение в области  имеет непрерывные частные производные до третьего порядка и определяет классическое решение задачи (3.4.1), (3.4.2). С этой целью перепишем двойной интеграл по области  в (3.4.6) в виде повторного:



Так как , то выражение, справа в формуле (3.4.4) имеет частные производные первого порядка:

 (3.4.10)

 (3.4.11)

Полученные равенства показывают, что ,  являются непрерывными функциями в .Следовательно, правые части равенств (3.4.10), (3.4.11) в области  имеют непрерывные частные производные второго и третьего порядков:

 (3.4.12)

 (3.4.13)

 (3.4.14)

 (3.4.15)

(3.4.16)

 (3.4.17)

 (3.4.18)

Из формул (3.4.12) - (3.4.18) следует, что   ,   являются непрерывными функциями в , а функция  определяет классическое решение задачи (3.4.1), (3.4.2). Теорема 3.4.1 доказана.

Перейдем к исследованию обратной задачи. Справедлива

**ТЕОРЕМА 3.4.2**. Пусть для функций   выполнены условия теоремы 3.4.1, идля функций  выполнены условия согласования . Тогда если **, то для достаточно малых решение обратной задачи (3.4.1)-(3.4.3) на отрезке  существует, единственно и принадлежит классу 

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Положив в формуле (3.4.16) ,воспользуемся переопределением (3.4.4). Тогда получим



Отсюда, учитывая ** получим

 (3.4.19)

где



Система уравнений (3.4.5), (3.4.11), (3.4.14), (3.4.19) является замкнутой системой нелинейных интегральных уравнений второго рода относительно функций Нетрудно убедиться, что для достаточно малых  для этой системы уравнений в области  имеет место принцип сжатых отображений. Для этого запишем эту систему уравнений в виде операторного уравнения

 (3.4.20)

где векторная функция переменных  с компонентами , причем



а оператор *А* определен на множестве функций и в соответствии с равенствами (3.4.5), (3.4.11), (3.4.14), (3.4.19) имеет вид :



 (3.4.21)





Покажем, что при достаточно малых *Т* оператор *А* осуществляет сжатое отображение шара радиуса  с центром в точке :



на себя.Тем самым мы покажем, что уравнение (3.4.20) имеет в области при достаточно малом *Т* единственное решение, удовлетворяющее неравенству

 (3.4.22)

Норму  определим равенством



Очевидно, что для элементов , принадлежащих шару имеет место неравенство

 (3.4.23)

С другой стороны непосредственно оценивая интегралы, входящие в (3.4.21), находим









Отсюда следует, что



Поэтому, при  оператор *А* переводит  в себя, где  определяется равенством

. (3.4.24)

Пусть теперь любые два элемента из множества .Тогда, используя вспомогательные неравенства вида



получим



Отсюда следует, что



и оператор *А* осуществляет сжатое отображение шара на себя.

Тогда, согласно теореме С.Банаха уравнение (3.4.23) имеет единственное решение, принадлежащее этому шару. Следовательно, решая систему уравнений (3.4.5), (3.4.11), (3.4.14), (3.4.19) методом последовательных приближений, мы однозначно построим в области  для функции Тем самым однозначно определяем функцию  на отрезке . Теорема 3.4.2 доказана.

**ГЛАВА 4. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

**4.1. О разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка**

Основным вопросом, изучаемым в этом пункте, является вопрос о разрешимости (в классическом смысле) задачи Коши для гиперболического уравнения с разными характеристиками.

Рассмотрим задачу Коши

**** (4.1.1)

**** (4.1.2)

Обозначим через  треугольник на плоскости *,* ограниченный осью *х* и характеристиками уравнения (4.4.1), проведенными через точку *.*

**ТЕОРЕМА 4.1.1.** Если **** и ****, то существует единственное классическое решение задачи (4.1.1), (4.1.2), принадлежащее классу . Кроме того, это решение непрерывно, зависит от начальных данных **** и их производных до второго порядка включительно.

**Доказательство.** Перепишем уравнение (1) в виде

**** (4.1.3)

Принимая во внимание условие  из задачи (2), (3) имеем

****(4.1.4)

Проинтегрировав по частям интеграл стоящей в правой части (4.1.4), получим задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения:

****(4.1.5)

**** (4.1.6)

где

****Из (4.1.5), (4.1.6), после применения формулы Даламбера, получим

 (4.1.7)

где  решение следующей задачи:



которая дается формулой

 (4.1.8)

Здесь

.

Введем обозначение

.

Тогда уравнение (4.1.7) можно переписать в виде

 (4.1.9)

Покажем теперь, что уравнение (4.1.9) определяет единственное непрерывное в области  решение. Используем для этого метод последовательных приближений, представив  в виде ряда

 (4.1.10)

где *,* находятся по формулам

 (4.1.11)

Легко показать, что в условиях теоремы . Формула (4.1.11) показывает, что все .Обозначим





Оценим ядро . Тогда



где .

Тогда из (4.1.10) вытекает оценка

 (4.1.12)

Применяя ее последовательно для получим

**

**

**

(4.1.13)

**

Оценка (4.1.13) показывает, что ряд (4.1.10) сходится равномерно в области  так как этот ряд мажорируется в сходящимся числовым рядом



и определяет непрерывную в области  функцию , которая является решением уравнения (4.1.9).

Рассмотрим однородное уравнение

 (4.1.14)

Очевидно, что уравнение (4.1.14) имеет в классе непрерывных в  функций только нулевое решение. Действительно, если



то из (4.1.14) вытекает

 (4.1.15)

Известно, что решение этого неравенства может быть только одно:  и, следовательно,

Таким образом, мы показали существование единственного решения уравнения (4.1.7). Как и в работах [1,2] можно показать, что это решение имеет в  непрерывные производные до третьего порядка и определяет классическое решение задачи (4.1.1), (4.1.2).Теорема 4.1.1 доказана.

**4.2. Обратная задача определения источника в одном гиперболическом уравнении третьего порядка**

**1.Постановка задачи и основные результаты**

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения третьего порядка

**** (4.2.1)

**** (4.2.2)

где функции  заданные функции,  заданное число. Обозначим через .

**2. Свойства решения задачи Коши (4.2.1), (4.2.2).**

В этом разделе мы рассмотрим некоторые свойства решения задачи

(4.2.1) -(4.2.2). Начнем с доказательства леммы 4.2.1, которое устанавливает однозначную разрешимость задачи (4.2.1) -(4.2.2). В процессе доказательства будут выведены интегральные уравнения, которые будут использованы в дальнейшем

**Лемма 4.2.1.** Пусть ****, ****, Тогда существует единственное классическое решение задачи (4.2.1), (4.2.2), принадлежащее классу . Кроме того, это решение непрерывно, зависит от начальных данных **** и их производных до второго порядка включительно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Уравнение (4.2.1) перепишем в виде

**** (4.2.3)

Из (4.2.3), обращая оператор и учитывая, то, что



имеем

**** (4.2.4) Проинтегрировав два раза по частям интеграл стоящей в правой части (4.2.4), получим задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения:

**** (4.2.5)

**** (4.2.6)

где

****

Из задачи (4.2.5), (4.2.6), после применения формулы Даламбера, получим

 (4.2.7)

где



В равенство (4.2.7) входит неивестная функция . Продифференцировав (4.2.7) по переменной , получим

(4.2.8)

Таким образом, относительно функций ,  получили линейную систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода с непрерывными ядрами и правых частей. Эта система имеет единственное непрерывное в области  решение, которое можно найти методом последовательных приближений.

Следовательно, если функция  является решением задачи (4.2.1) -(4.2.2), то функции ,  удовлетворяет систему линейных интегральных уравнений (4.2.7), (4.2.8).

Справедливо и обратное утверждение. Пусть функции , являются непрерывным решением системы уравнений (4.2.7), (4.2.8). Тогда из этой ситемы уравнений и условий леммы 4.2.1 следует, что что эти функции имеют в  непрерывные производные до третьего порядка и это решение является классическим решением задачи (4.2.1), (4.2.2). Единственность непрерывного решения системы уравнений (4.2.7), (4.2.8) следует из леммы Гронуолла-Беллмана. Лемма 4.2.1 доказана

**3. Существование решения обратной задачи.**

Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть функции ,  и постоянная  заданы, а функция  неизвестна. Требуется найти пару функций  из условий (4.2.1)-(4.2.2) по дополнительной информации

 (4.2.9)

**Определение 4.2.1.** Решением обратной задачи (4.2.1)-(4.2.2),(4.2.9) называется пара функций  удовлетворящее условиям (4.2.1)-(4.2.2), (4.2.9).

Для обратной задачи (4.2.1) -(4.2.2), (4.2.9) справедлива

**ТЕОРЕМА 4.2.1.** Если ,  , и выполнены условия согласования  **** то в области  существует единственное решение обратной задачи (4.2.1)-(4.2.2), (4.2.9).

**Доказательство.** Пусть функция  является решением обратной задачи (4.2.3), (4.2.2), (4.2.9).

Обращая оператор , из задачи (4.2.3), (4.2.2) имеем,

 (4.2.10)

где  решение следующей задачи:



Дифференцируя (4.2.10) по переменной *t*, имеем

 (4.2.11)

Положим в формуле (4.2.11)  и воспользуемся данными (4.2.9). При этом получим равенства

 (4.2.12)

Еще раз дифференцируя уравнение (4.2.12), имеем



или

 (4.2.13)

где

.

Чтобы получить замкнутую систем уравнений продифференцируем уравнение (4.2.12) по переменной *х*:

(4.2.14)

Таким образом, получили замкнутую систему линейных интегральных типа Вольтерра (4.2.7), (4.2.13), (4.2.14) относительно функций ,,. Следовательно, эта система имеет единственное решение. Теорема 4.2.1 доказана.

**4.3.О корректной разрешимости обратной задачи определения источника в гиперболическом уравнения третьего порядка**

В этом разделе исследована обратная задача нахождения решения и неизвестного источника, зависящей от времени для линейного гиперболического уравнения третьего порядка. Такие обратные задачи возникают при моделировании некоторых физических процессов в том случае, когда кроме решения уравнения требуется восстановить действие внешних источников. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи задаются значения решения задачи во внутренней точке.

**1.Постановка задачи иформулировка основных результатов.** Обозначим **** и рассмотрим задачу Коши для

**** (4.3.1)

**** (4.3.2)

где заданное число.

В прямой задаче требуется определить функцию  по известным функциям , 

**Обратная задача.** Пусть функция  имеет следующую структурыгде неизвестные и заданные функции соответственно. Требуется найти пару функций , если о решении прямой задачи (1),(2) известна дополнительная информация

 (4.3.3)

Обозначим через  и

**Определение.** Решением обратной задачи (4.3.1)-(4.3.3) называется пара функций  удовлетворящее условиям (4.3.1)-(4.3.3).

Для обратной задачи (4.3.1) -(4.3.3) справедлива

**ТЕОРЕМА 4.3.1.** Если ,  , и выполнены условия согласования **** то в области  существует единственное решение обратной задачи (4.3.1)-(4.3.3).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть функция  является решением обратной задачи (4.3.1)-(4.3.3). Введем в рассмотрение вспомогательную функцию . Эта функция удовлетворяет условиям

**** (4.3.4)

 (4.3.5)

 (4.3.6)

 (4.3.7)

Используя формулу Даламбера, из задачи Коши (4.3.4)-(4.3.6) , получим

, (4.3.8)

где



Так как  то выражение в правой части (4.3.8) имеет по переменным х и т частные производные первого и второго порядков.

 (4.3.9)

**** (4.3.10)

 (4.3.11)

 (4.3.12)

Сравнивая  и , получим ****Следовательно, функция (4.3.8) является решением задачи (4.3.4)-(4.3.6).

Положим в формуле (4.3.9)  и воспользуемся данными (4.3.7). При этом получим равенства

**** (4.3.13)

где

****

Уравнение (4.3.13) представляет собой линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода относительно функции неизвестного источника  с непрерывным ядром  и непрерывной правой частью . Решение этого уравнения имеет вид

 (4.3.14)

где резольвента ядра .

С другой стороны, интегрируя уравнение (4.3.8) с условием ****получим линейное интегральное уравнение для функции :

 (4.3.15)

Подставляя найденную функцию  в (4.3.15), однозначно находим функцию 

 (4.3.16)

где





Таким образом, мы по формулам (4.3.14), (4.3.16) однозначно находили функцию  на отрезке  и  в области  соответственно. Теорема 4.3.1 доказана.

Получимоценки устойчивости решения обратной задачи (4.3.1) -(4.3.3).

**ТЕОРЕМА 4.3.2.** Пусть ,  два решения обратной задачи (4.3.1)-(4.3.3) с данными   и   соответственно. Кроме того эти данные удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда, имеет место оценка

 (4.4.17)

 (4.3.18)

где постоянная *С* не зависит от функций.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим два решения задачи ,. Введем обозначения:,  Тогда функции ,  являются решением интегральных уравнений (4.3.13) и (4.3.15) соответственно.

Обозначим: .

Из уравнения (4.3.13), имеем

**** (4.3.19)

Оценим функцию :

****(4.3.20)

Тогда из (4.3.19), следует, что

**** (4.3.21)

где



Из (4.3.19) перейдя к норме, принимая во внимание неравенство (4.3.20) и применив к полученному неравенству лемму Гронуолла-Беллмана, получим оценки (4.3.17). А из (4.3.15), с учетом (4.3.17) получим оценку (4.3.18). Теорема 4.3.2 доказана.

**Заключение по главе 4**

В четвертой главе исследованы обратные задачи для гиперболического уравнения с частными производными третьего порядка с различными действительными характеристиками. В первом пункте этой главы доказана однозначная разрешимость задачи Коши для гиперболического уравнения с частными производными третьего порядка с различными действительными характеристиками.

В пункте 4.2 найдены достаточные условия разрешимости обратной задачи определения, зависящего от времени источника для гиперболического уравнения с частными производными третьего порядка.

В пункте 4.3 определены достаточные условия разрешимости обратной задачи нахождения источника, зависящего от времени, когда сомножитель зависит от переменных (*x, t*).

**Заключение**

В диссертационной работе исследованы вопросы однозначной разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений в частных производных третьего порядка и получены следующие результаты:

1. С помощью фундаментального решения построены решение задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка с кратными действительными характеристиками;
2. Найдены достаточные условия однозначной разрешимости определения зависящее от времени источника для гиперболического уравнения с частными производными третьего порядка;
3. Изучены обратные задачи восстановления источника, зависящего от пространственных переменных, когда области определения источника и область определения дополнительной информации не совпадает;
4. Исследована обратная задача определения коэффициента при младшем члене, зависящего от времени по переопределению во внутренней точке;
5. доказана однозначная разрешимость задачи Коши для гиперболического уравнения с частными производными третьего порядка с различными действительными характеристиками.
6. найдены достаточные условия разрешимости обратной задачи определения, зависящего от времени источника для гиперболического уравнения с частными производными третьего порядка.
7. определены достаточные условия разрешимости обратной задачи нахождения источника, зависящего от времени, когда сомножитель зависит от переменных (*x, t*).

Для решения выше поставленных задач по исследованию прямых задач для гиперболических уравнений третьего порядка используется метод сведения к линейному интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода с использованием соответствующих явных решений. Исследование поставленных обратных задач основано на использование результатов соответствующих прямых задач и на сведении к системе линейных или нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода.

**ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Все результаты диссертации являются новыми и имеют теоретический характер, но эти результаты можно применить в конкретных задачах физики и техники.

Мы рекомендуем использовать полученные в диссертации научные результаты при исследовании решения обратных задач для гиперболических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений высших порядков и при построении решении обратных задач

**Список литературы**

1. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] /Б.С.Аблабеков. - Бишкек: Илим, 2001. –183 с.
2. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст] /Б.С.Аблабеков, А.Р.Асанов, А.К.Курманбаева. - Бишкек: Илим, 2011. – 156 с.
3. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики [Текст]: учеб. пособие /Б.С.Аблабеков. –Бишкек: КГНУ, 1997. - 184 с.
4. Аблабеков, Б.С. Интегральные уравнения Вольтерра и их приложения [Текст] / Б.С.Аблабеков. - Бишкек: КГТУ, 2009. - 148 с.
5. Аблабеков, Б.С. О задаче Коши для одного гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, Н.О. Осмонова // ВЕСТНИК КГНУ сер ЕТН. - 1998. -вып.1. – С. 199-203.
6. Аблабеков, Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи [Текст] / Б.С.Аблабеков // Наука и новые технологии. –1999.- №4. – С. 12– 19.
7. Аниконов, Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений [Текст] /Ю.Е.Аниконов. - Новосибирск: Наука, 1978. – 118с.
8. Атаманов, Э.Р. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] /Э.Р.Атаманов, О.Ш.Мамаюсупов. – Фрунзе: Илим, 1990. –101с.
9. Балкизов, Ж. А. Локальные краевые задачи для модельного уравнения третьего порядка гиперболического типа [Текст] / Ж.А.Балкизов // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2022. № 5 (109). С. 11–18. DOI: 10.35330**/**1991-6639-2022-5-109-11-18.
10. Баренблатт, Г.И. О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации жидкости в трещиноватых породах [Текст] /Г.И.Баренблатт // Прикл. математика и механика. -1963. – Т. 27, №2. – С. 348– 350.
11. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах [Текст] /Г.И.Баренблатт, Ю.П.Желтов, И.Н.Кочина // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24, №5. – С. 852– 864.
12. Бухгейм, А.Л. Введение в теорию обратных задач [Текст] /А.Л.Бухгейм.- Новосибирск: Наука, 1988. –183с.
13. Варламов, В.В. Об одной начально-краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / В.В. Варламов //Дифференц.уравнения. 1990. Т.26. №8. -С.1455-1457.
14. Варламов, В.В. Энергетические оценки для интегродифференциального уравнения, описывающего акустические волны в среде с памятью [Текст] / В.В. Варламов //Журн. вычислит. математики и матем.физ., 1993.Т.33, №1. С.146-150.
15. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики [Текст] /В.С.Владимиров. – М.: Наука, 1988. -528 с.
16. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач [Текст] /А.М.Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208с.
17. Денисов ,А.М. Интегро-функциональные уравнения для задачи определения источника в волновом уравнении [Текст] /А.М.Денисов. //Дифференц. уравнения, 2006, том 42, номер 9, C.1155–1165.
18. Дзекцер, Е.С. Уравнения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах //Докл.АН СССР.1975.Т.220, №3.С.540-543.
19. Дурдиев, Д.К. К вопросу о разрешимости одной обратной задачи для гиперболического интегро-дифференциального уравнения [Текст] /Д.К.Дурдиев // Сиб. мат. журн. –1992. -Т.33, №3. -С. 69-77.
20. Дурдиев, Д.К. Обратные задачи для сред с последствием [Текст] /Д.К.Дурдиев. –Бухара: Изд-во Бухарского ГУ, 2021. -232с.
21. Зикиров О. С.Локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений третьего порядка [Текст] / О.С.Зикиров // Современная математика и ее приложения. 2011. T. 68.C. 101–120.
22. Зикиров, О.С.О краевых задачах для гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / О.С.Зикиров //Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2007. Т. 9, №1.-С.45-48.
23. Зикиров, О.С. Об одной граничной задаче для уравнения в частных производных третьего порядка [Текст] /О.С.Зикиров //Мат. журн. /Ин-т математики НАН Респ. Казахстан.- 2006. -Т.6, №1(19). –С.96-102.
24. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и их приложения [Текст] /В.К.Иванов, В.В.Васин, В.П.Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
25. Жороев, А.К. үчүнчү тартиптеги гиперболалык тендеме үчүн Коши маселеси [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019, №3. С.35-40.
26. Жороев, А.К. О разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев // Евразийское Научное Объединение. 2019.Т. 1. № 5 (51), C.1-4.
27. Joroev А.К. The inverse problem of determining the source in a third-order hyperbolic equation [Text] / B.S. Ablabekov, A.K. Joroev // Problems of Modern Mathematics 70th anniversary of A.A. Borubaev, June 16-18, 2021.- Р. 97.
28. Жороев, А. К. Об определении зависящего от времени младшего коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев //Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 34. № 1. C. 9-18.
29. Жороев, А. К. Об определении источника, зависящего от времени в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев // Евразийское Научное Объединение. 2021.Т. 1. № 7 (77),

C.1-3.

1. Joroev А.К. Inverse problems for third-order hyperbolic equations [Text] /

B.S. Ablabekov, A.K. Joroev // XV международная молодежная научная школа-конференция. Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач посвященная 85-летию академика РАН В.Г. Романова, октябрь-ноябрь 30-3, 2023. С.1.

1. Жороев, А. К. Обратная задача определения источника в гиперболическом уравнении третьего порядка / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев //Вестник Ошского государственного университета. 2022, №1(38), С.30-46.
2. Жороев, А. К.Обратная задача определения источника, зависящего

от пространственных переменных в гиперболическом уравнении

третьего порядка / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев // Известия Кабардино-

Балкарского научного центра РАН. 2022. № 4(108). С. 11–18. DOI: 10.35330**/**1991-6639-2022-4-108-11-18.

1. Жороев, А. К. О корректной разрешимости обратной задачи определения источника в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев, А.А.Касымалиева //Известия КГТУ № 1 (65), 2023.С.646-651.
2. Жороев, А. К. Метод полуобрашения для решения задачи Коши гиперболического уравнения третьего порядка[Текст] / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев // Международная научная конференция «V Борубаевские чтения», посвященная 70-летию Национальной академии наук Кыргызской Республики и 40-летию Института математики НАН КР.-С.3.
3. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и их приложения [Текст] /В.К.Иванов, В.В.Васин, В.П.Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
4. Иманалиев, М.И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения [Текст] /М.И.Иманалиев. - Фрунзе: Илим, 1977. –347с.
5. Кабанихин, С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений [Текст] /С.И.Кабанихин. - Новосибирск: Наука, 1988. – 166с.
6. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи [Текст] /С.И.Кабанихин.– Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457с.
7. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений [Текст] /С.И.Кабанихин, К.Т. Искаков. - Казахский нац. педгог. ун-т им. Абая, Алматы, 2007. – 330 с.
8. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст] /М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов, С.П.Шишатский.- М.: Наука, 1980. –288с.
9. Лаврентьев, М.М. Линейные операторы и некорректные задачи [Текст] /М.М.Лаврентьев, Л.Я.Савельев. – М.: Наука 1991. –330с.
10. Романов, В.Г. Обратные задачи математической физики [Текст] / В.Г. Романов. - М.: Наука, 1984. -264с.
11. Романов, В.Г. Устойчивость в обратных задачах [Текст] / В.Г. Романов. - М.: Научный Мир, 2005. -295с.
12. Руденко, О. В. Теоретические основы нелинейной акустики [Текст] / О. В.Руденко, С. И.Солуян. - М.: Наука,1975.
13. Тихонов, А.Н. Об устойчивости обратных задач [Текст] /А.Н.Тихонов// Докл. АН СССР. -1943. -Т.39, №5. -С. 195-198.
14. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач [Текст] /А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин.-М.: Наука, 1986. –287с.
15. Чудновский, А.Ф. Теплофизика почвы [Текст] /А.Ф.Чудновский. –М.: Наука, 1976. - 352с.
16. Яхно, В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости задач [Текст] / Яхно В.Г. – Новосибирск: Наука, 1990. –301с.
17. Anikonov, Yu. E. Multidimensional inverse and ill – posed problems for differential equations [Text] /Yu.E.Anikonov.– Utrecht: VSP, 1995. –134 p.
18. Asanov, A. Nonclassical and invers problems for pseudo-parabolic equations [Text] /A.Asanov,E.R.Atamanov.– Tokyo, 1997. –152p.
19. Asanov, A. Regularzation, uniquiness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind [Text] /A.Asanov. –Utrecht: VSP, 1998. –276p.
20. Belov Yu.Ya*.* Inverse problems for partial differential equations [Text] / Yu.Ya*.*  Belov. – Utrecht: VSP, 2002.
21. Durdiev, D.K. Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integrodifferential Equations [Text] / D.K. Durdiev, Z.D. Totieva. -Springer Nature Singapore Pte Ltd, Series title Science Foundation Series in Mathematical Sciences, 2023.
22. Cannon, J.R. An inverse problem of finding a parameter in a semi-linear heat equation [Text] /J.R.Cannon,Y.Ling // J. Math. Anal. and Appl.- 1990. –Vol.145, №2. –P. 470 –484.
23. Colton, D. Analytic theory for partial differential equations [Text] /D.Colton.- London: Pitman Publ., 1980.- 239 p.
24. Ivanchov M.Inverse problems for equations of parabolic type. Mathematical studies[Text] / Ivanchov/ M.Monograph Series. –2003.
25. Hallaire M., L’eau et la productions vegetable // Institut National de la Recherche Agronomies, **9** (1964).
26. Prilepko, A.I. Methods for solving inverse problems in mathematical physics [Text] /A.I.Prilepko, D.G.Orlovsky, U.A.Vasin.- New York; Basel: Marcelker, 1999.- 709p.
27. Romanov, V.G. Investigation methods for inverse problems [Text] /V.G.Romanov. – Utrecht: VSP, 2002. –280 p.
28. Rundell, W. Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from over specified boundary date [Text] /W.Rundell // Appl. Anal. -1980. -Vol.10, №2. -P.231-242.