

**Институт математики Национальной академии наук
Кыргызской Республики**

Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына

Диссертационный совет Д 01.24.701

На правах рукописи
УДК 517.956

Жороев Автандил Кемелович

Обратные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек-2024

Работа выполнена на кафедре прикладной математики, информатики и компьютерных технологий Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына.

Научный руководитель: **Аблабеков Бактыбай Сапарбекович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына.

Официальные оппоненты: **Искандаров Самандар**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики.

Алымбаев Асангул Темиркулович, доктор физико-математических наук, доцент, и.о.профессора кафедры информационных технологии в образовании Института новых информационных технологий при Кыргызском государственном университете им. И. Арабаева.

Ведущая организация: Кафедра прикладной математики и информатики Ошского технологического университета им. М.М.Адышева, 723503, Кыргызстан, город Ош, улица Исанова, 81.

Защита состоится 22 января 2025 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 01.24.701 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720001, г. Бишкек, улица Абдымомунова 328 , кабинет 328. Ссылка для доступа к видеоконференции защиты диссертации: https://vc.vak.kg/b/d_0-qxu-6yv-biz

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики (720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а), и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына, (720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547) и на сайте Национальной аттестационной комиссии при Президенте Кыргызской Республики: https://stepen.vak.kg/diss_sovety/d-01-24-701/

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент



Шаршембиева Ф. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Уравнения в частных производных третьего порядка являются математическими моделями многих физических явлений и процессов. Например, многие задачи, связанные с моделированием процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, процесс влагопереноса в почво-грунтах, передачи тепла в гетерогенной среде, распространение акустических волн в одномерной изотропной однородной среде с дисперсией и поглощением, процесс распространения возмущений в упругой среде приводятся к изучению обратных задач для уравнений в частных производных третьего порядка.

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения коэффициентов, правых частей, а также начальных или граничных условий и решений дифференциальных уравнений по некоторой дополнительной информации (переопределении) о решении прямой задачи. Такие задачи возникают в тех случаях, когда структура математической модели рассматриваемого процесса известна, нужно найти параметры самой математической модели. Термин «обратная задача» был предложен видными русскими математиками М.М. Лаврентьевым (1969) и В.Г. Романовым (1969).

В настоящее время теория обратных задач математической физики развивается представителями целого ряда математических школ, в том числе Московской (основанной А.Н. Тихоновым) и Сибирской (основанной М.М. Лаврентьевым и В.Г. Романовым, а также их учениками Ю.Е. Аниконовым, А.Л. Бухгеймом, А.М. Денисовым, С.И. Кабанихиным, А.И. Прилепко, А.Лоренци, В.Г. Яхно и др.

Важный исследовательский вклад в теорию обратных задач для уравнений гиперболического типа второго порядка были сделаны В.Г.Романовым, С.И.Кабанихиным и их учениками.

Обратные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка сравнительно мало изучены. Исследовались только отдельные вопросы. Так, например, в работе Б.С. Аблабекова рассмотрены обратные задачи определения коэффициента, зависящего от пространственных переменных, когда области определения искомого коэффициента и условие переопределения не совпадают.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами. Исследования по теме диссертации проводились в рамках утвержденной тематики кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий Кыргызского национального университета им. Ж.Баласагына.

Цель и задачи исследования. Целью исследования диссертационной

работы является доказательство теорем об однозначной разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений в частных производных третьего порядка. Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

1) найти достаточные условия однозначной разрешимости решения прямых задач для гиперболических уравнений третьего порядка;

2) найти достаточные условия разрешимости линейных и нелинейных обратных задач для гиперболических уравнений третьего порядка с кратными и различными характеристиками.

Научная новизна работы. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и имеют строгое доказательство. В теоретическом отношении результаты диссертации продолжают развитие теории обратных задач математической физики и получены следующие результаты:

1) Найдены достаточные условия решения прямых задач для гиперболических уравнений в частных производных третьего порядка с кратными и различными характеристиками;

2) Определены условия существования и единственности решения обратных задач определения источника, коэффициента для гиперболических уравнений в частных производных третьего порядка с кратными и различными характеристиками.

Практическая значимость полученных результатов. Полученные в диссертации научные результаты носят теоретический характер. Однако, учитывая, что обратные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка широко используются при распространении акустических волн в однородной среде, в механике жидкости и газа, влагопереноса, то отсюда следует, что результаты данной работы могут быть использованы для решения некоторых прикладных задач. Мы надеемся, что полученные в диссертации результаты будут способствовать развитию теории обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными высокого порядка. Полученные результаты также могут быть использованы при исследовании одномерных и многомерных обратных задач для гиперболических уравнений четвертого и более высокого порядков, а также при решении прикладных задач, приводящих к таким уравнениям.

Основные положения, выносимые на защиту:

1) Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для гиперболического уравнения с кратными характеристиками;

2) достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения обратной задачи определения источника, зависящего от времени в гиперболическом уравнении с кратными

характеристиками;

3) достаточные условия для разрешимости обратной задачи восстановления источника, зависящего от пространственных переменных в гиперболическом уравнении с кратными характеристиками;

4) разрешимость задачи определения, зависящего от времени коэффициента при младшем члене в гиперболическом уравнении с кратными характеристиками;

5) достаточные условия, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи Коши для гиперболического уравнения с разными характеристиками;

6) разрешимость обратной задачи определения правой части, зависящей от времени в гиперболическом уравнении с разными характеристиками, когда сомножитель зависит от пространственных переменных;

7) разрешимость обратной задачи определения правой части, зависящей от времени в гиперболическом уравнении с разными характеристиками, когда сомножитель зависит от всех переменных.

Методы исследования. Для поставленных задач доказываются соответствующие теоремы существования и единственности решения прямых задач, а также построены их явное решение. Техника доказательства теоремы однозначной разрешимости решения обратных задач основана на переходе от исходной обратной задачи к системе ИУ типа Вольтерра второго рода. Для этого используя дополнительные условия (условия переопределения) и явное решение соответствующих прямых задач, исследуемую обратную задачу приводим к системе ИУ типа Вольтерра второго рода. Далее, применяется метод ОУВ.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 журнальных статьях [1-7], рекомендованных ВАК для публикации. Также опубликованы в 3-х тезисах докладов [8-10] на международных конференциях. Импакт факторы трех журналов [4,6,7] имеют в РИНЦ не менее 0,1.

Личный вклад соискателя. Результаты исследований диссертации получены автором. В совместных работах [1] - [6] постановка задач и обсуждение полученных результатов проводились при непосредственном участии научного руководителя. Задачи поставлены научным руководителем. В совместной работе [7] постановка задачи принадлежит научному руководителю, обсуждение результатов принадлежит А.А. Касымалиевой, а научные результаты принадлежат автору.

Апробация результатов исследований. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и международных научных конференциях:

- Международная научная конференция «Современные проблемы

математики», посвященная 70-летию академика А.А.Борубаева. - Бишкек: Институт математики НАН КР, 16-18 июня 2021 г.;

- XV международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», посвященная 85-летию академика РАН В.Г. Романова, 30 октября-3 ноября 2023;

- Международная научная конференция «V Борубаевские чтения», посвященная 70-летию Национальной академии наук Кыргызской Республики и 40-летию Института математики НАН КР. Бишкек, 20-21 июнь, 2024 г.;

- Семинар «Обратные и некорректные задачи» (Бишкек, КГМУ, 2018-2022 гг.), руководитель д.ф.-м.н., профессор Б.С.Аблабеков;

- Расширенный семинар кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий (Бишкек, КНУ им. Ж.Баласагына, 2023 г.).

Структура и объем диссертации. Работа состоит из оглавления, списка условных обозначений и определений, принятых в работе, введения, четырех глав, разбитых на 11 параграфов, выводов, списка использованной литературы. Список использованной литературы содержит 60 наименований. Объем текста диссертации - 90 страниц. Нумерация формул, определений, лемм и теорем обозначается тремя цифрами, т.е. если формула имеет номер (1.2.1), то это означает, что это формула 1 второго раздела первой главы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту.

Современная теория обратных задач для дифференциальных уравнений была создана и развита русскими математиками А. Н. Тихоновым (1943, 1961, 1986), М. М. Лаврентьевым (1980, 1991) и В. Г. Романовым (1984, 2005). История развития теории обратных задач, ее современное состояние и обширная библиография представлены в монографиях указанных авторов. Позднее эти задачи исследовались и развивались Ю. Е. Аниконовым (1978, 1995), И. С. Кабанихиным (1988, 2001, 2009), А. И. Прилепко (1992, 1999), В. Г. Романовым (2002), В. Г. Яхно (1990), Ж. Кеном (1987) и рядом других авторов.

Первая глава «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИЙ» состоит из двух пунктов. В пункте 1.1 «Обзор литературы» дается обзор литературы по теме диссертации. В данном пункте проведен анализ научных результатов работ других авторов, наиболее близких к теме предлагаемой диссертационной работы. В пункте 1.2 «Обзор результатов диссертации» приведен подробный обзор научных результатов диссертации.

Исследованию задачи Коши и смешанных задач для гиперболического уравнений третьего порядка посвящены работы Б.С.Аблабекова, О.С.Зикирова (2000). В этих работах были исследованы вопросы разрешимости локальных краевых задач для гиперболических уравнений третьего порядка. В частности, Б.С.Аблабековым (1997) найдено и обосновано явное решение для гиперболического уравнения с кратными характеристиками. В работах О.С.Зикирова (2007) были исследованы вопросы однозначной разрешимости решений нелокальных начально-краевых задач для одного класса модельных уравнений гиперболического типа.

Обратные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка – сравнительно молодое направление в теории обратных задач. Б.С.Аблабековым было построено решение задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка. Получено явное решение, аналогичное формуле Даламбера. Ранее обратные задачи определения коэффициента зависящего от пространственных переменных для гиперболических уравнений третьего порядка, когда область определения искомого коэффициента и условие переопределения не совпадают были изучены Б.С. Аблабековым.

Задача 1. Для уравнения

$$L_q u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u + q(x)u = f(x,t), \quad (1)$$

рассмотрим в области Q_T задачу Коши с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad u_{tt}(x,0) = u_2(x), \quad x \in R. \quad (2)$$

При заданных $q, f, u_i, i = 0,1,2$ задача (1), (2) является корректной, если подходящим образом подобраны функциональные пространства для данных задачи и пространство решений. Действительно, если $q(x) \in C(R)$,

$u_0 \in C^3(R), u_1 \in C^2(R), u_2 \in C^1(R), f \in C(\bar{Q}_T)$, то эти условия гарантируют существование в Q_T классического решения задачи (1), (2), т. е. $u \in C^3(Q_T)$.

Прежде чем поставить обратную задачу, докажем существование и единственность решения задачи (1), (2) и установим некоторые свойства этого решения.

Обозначим через $\Delta(0,T)$ треугольник на плоскости x, t , ограниченный осью x и характеристиками уравнения (1), проведенными через точку (x,t) .

Лемма 1. Если для какого-либо $T > 0, q(x) \in C[-T,T], u_i(x) \in C^{3-i}[-T,T], i = 0,1,2, f \in C^1(\Delta(0,T))$, то $\exists!$ в области $\Delta(0,T)$ классическое решение задачи (1), (2).

Обратная задача 1. Найти $q(x) \in C(R)$, если решение задачи (1), (2) при заданных функциях $u_i, i = 0,1,2, f$ известно на множестве $x=0, 0 \leq t \leq T$ вместе со своей производной по x до второго порядка:

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u_x(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_{xx}(0,t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Заметим, что при выполнении условий леммы 1 функции $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ являющиеся данными обратной задачи, должны обладать следующей гладкостью:

$$\varphi_0(t) \in C^3[0, T], \quad \varphi_1(t) \in C^2[0, T], \quad \varphi_2(t) \in C^1[0, T]. \quad (4)$$

Кроме того, функции $\varphi(t), \quad i=0,1,2$ должны удовлетворять некоторым условиям согласования:

$$\begin{aligned} u_0(0) &= \varphi_0(0), \quad u_0'(0) = \varphi_1(0), \quad u_0''(0) = \varphi_2(0), \\ u_1(0) &= \varphi_0'(0), \quad u_1'(0) = \varphi_1'(0), \quad u_1''(0) = \varphi_2'(0), \\ u_2(0) &= \varphi_0''(0), \quad u_2'(0) = \varphi_1''(0), \quad u_2''(0) = \varphi_2''(0). \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 1. Если для функций $u_i, \quad i=0,1,2, \quad f$ выполнены условия леммы 1, а также для функций $\varphi_i(t), \quad i=0,1,2$ - условия (4), (5) и условия

$$|\varphi_0(x)| \geq \alpha > 0, \quad x \in [-T, T], \quad (6)$$

то для достаточно малых $h > 0$ решение обратной задачи 1 $\exists!$ и принадлежит классу $C[-T, T]$.

Хорошо известно, что распространение акустических волн в однородной среде с дисперсией и поглощением описывается уравнением:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_\infty^2 \Delta u \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta u \right) = 0, \quad (7)$$

$u(x, t)$ - давление, $x = (x_1, x_2, x_3)$, Δ - оператор Лапласа по x и положительные постоянные τ, c_∞ и c_0 имеют смысл релаксации и предельных фазовых скоростей звука соответственно. Введем безразмерные переменные $x = x / c_\infty \tau, t = t / \tau$, сохранив прежние обозначения положим, и $\alpha = c_0^2 / c_\infty^2$. Тогда уравнение (7) для одномерной изотропной среды в новых переменных имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (8)$$

Для реальных сред $c_0^2 < c_\infty^2$, следовательно $0 < \alpha < 1$.

В работе Б.С. Аблабекова изучена задача Коши для уравнения (8) при $\alpha = 1$ и построено явное решение этой задачи.

Задача 3. Рассмотрим теперь следующую задачу Коши, связанную с оператором L_1 . Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую в Q_T , уравнению

$$L_1 u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + I \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (9)$$

начальным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad u_{tt}(x, 0) = u_2(x), \quad x \in R. \quad (10)$$

Справедлива

Теорема 2. Если $u_0(x) \in C^4(R)$, $u_1(x) \in C^3(R)$, $u_2(x) \in C^2(R)$, $f(x,t) \in C^1(\bar{Q}_T)$, то $\exists!$ классическое решение задачи (9), (10) и выражается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} e^{-(t-|s-x|)} [u_1(s) + u_0(s)] ds + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} \int_{x-\tau}^{x+\tau} [u_1(\xi) + u_2(\xi)] d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+\tau-t} f(\xi, s) ds d\xi d\tau + u_0(x) e^{-t}. \quad (11)$$

Кроме того, это решение непрерывно зависит от начальных данных u_i , $i=0,1,2$ и их производных до второго порядка включительно из \bar{Q}_T . Таким образом, задача Коши (9), (10) поставлена корректно, причем $C^3(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$ - класс корректности классической задачи.

Обратная задача 2. Для уравнения

$$L_q u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + I \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u + q(x)u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (12)$$

рассмотрим задачу определения функции $q(x)$, если известно, что решение уравнения (12) при условиях

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad u_{tt}(x,0) = u_2(x), \quad x \in R, \quad (13)$$

принимает при $x = x_0, t \geq 0$ вместе со своей производной по x заданные значения

$$u(x_0, t) = h_1(t), \quad u_x(x_0, t) = h_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (14)$$

Для обратной задачи (12) -(14) условия согласования имеют вид

$$\begin{aligned} u_0(x_0) &= h_1(0), & u_1(x_0) &= h_1(0), & u_2(x_0) &= h_1''(0) \\ u_0'(x_0) &= h_2(0), & u_1'(x_0) &= h_2'(0), & u_2'(x_0) &= h_2''(0). \end{aligned} \quad (15)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если для какого-либо $t_0 > 0$ для функций u_0, u_1, u_2 выполнены условия теоремы 1 и $h_1(t) \in C^3([0, t_0])$, $h_2(t) \in C^2([0, t_0])$, условие (15) и условия $|u_0(x)| \geq \alpha > 0$, $x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0]$, то для достаточно малых $\delta > 0$ на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ решение обратной задачи 2 $\exists!$ и принадлежит классу $C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Ж.А.Балкизов изучал следующие задачи:

На евклидовом пространстве точек (x,y) рассматривается уравнение третьего порядка гиперболического типа следующего вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_{xx} - u_{yy}) = f(x,y), \quad (16)$$

где $f(x,y)$ – заданная функция, $u = u(x,y)$ – искомая функция.

Уравнение (16) рассматривается в области Ω ограниченной отрезком $AB = \{(x, y) : 0 < x < r, y = 0\}$ прямой $y = 0$, а также характеристиками $AC : y - x = 0$, $BC : y + x = r$ уравнения (16). Здесь $A = (0, 0)$, $B = (r, 0)$, $C = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$.

На отрезке AB прямой $y = 0$ возьмем произвольную точку $(x, 0)$ и через данную точку проведем две характеристики уравнения (16), параллельные характеристикам AC и BC . Соответствующие точки пересечения с характеристиками AC и BC обозначим через

$$\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right), \theta_r(x) = \left(\frac{r+x}{2}, \frac{r-x}{2}\right).$$

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (16), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), 0 \leq x \leq r, \quad (17)$$

$$u(\theta_0(x)) = \varphi(x), 0 \leq x \leq r, \quad (18)$$

$$u(\theta_r(x)) = \psi(x), 0 \leq x \leq r, \quad (19)$$

где $\tau(x), \varphi(x), \psi(x)$ – заданные функции.

Задача 2. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (16), удовлетворяющее краевым условиям (17), (18) и условию

$$u_y(x, 0) = \nu(x), 0 \leq x \leq r, \quad (20)$$

где $\tau(x), \varphi(x), \nu(x)$ – заданные функции.

Задача 3. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (16), удовлетворяющее краевым условиям (17), (19), (20), где $\tau(x), \psi(x), \nu(x)$ – заданные функции.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 4. Пусть заданные функции $\tau(x), \varphi(x), \psi(x), f(x, y)$ таковы, что они обладают свойствами

$$\tau(x), \varphi(x), \psi(x) \in C[0, r] \cap C^3(0, r), f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$$

и выполнены условия согласования

$$\tau(0) = \varphi(0), \tau(r) = \psi(r), \varphi(r) = \psi(r).$$

Тогда $\exists!$ в области Ω решение задачи 1.

Теорема 5. Пусть заданные функции $\tau(x), \varphi(x), \nu(x), f(x, y)$ таковы, что они обладают свойствами

$$\tau(x), \varphi(x) \in C^1[0, r] \cap C^4(0, r), \nu(x) \in C[0, r] \cap C^3(0, r), f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$$

и выполнены условия согласования

$$\tau(0) = \varphi(0), \nu(0) + \tau'(0) = 2\varphi'(0).$$

Тогда $\exists!$ в области Ω решение задачи 2.

Теорема 6. Пусть заданные функции удовлетворяют условиям

$$\tau(x), \psi(x) \in C^1[0, r] \cap C^4(0, r), \nu(x) \in C[0, r] \cap C^3(0, r), f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$$

и выполнено условие согласования $\tau(r) = \psi(r)$.

Тогда $\exists!$ в области Ω решение задачи 3.

Вторая глава «МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» состоит из двух параграфов. В пункте 2.1 «Объекты и предметы исследования» приведены объекты и предметы исследования.

Объект исследования – обратная задача для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа третьего порядка.

Предмет исследования – нахождение достаточных условий, обеспечивающих разрешимость обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа третьего порядка.

В пункте 2.2 приведены **методы исследования**: метод операторных уравнений Вольтерра, принцип сжимающих отображений, однозначная разрешимость ИУВ второго рода, использование фундаментального решение.

Основные результаты диссертации приведены в главах 3, 4.

Третья глава посвящена исследованию обратные задачи определения источников и коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка с кратными характеристиками.

В пункте 3.1 строится решение задачи Коши с помощью фундаментального решения гиперболического оператора

$$L \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

Задача Коши. Рассмотрим следующую задачу Коши, связанную с оператором L . Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую в Q_T , уравнению

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (21)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_i(x, 0) = u_1(x), \quad u_{ii}(x, 0) = u_2(x), \quad x \in R. \quad (22)$$

При этом предполагается, что

$$f(x, t) \in D'(Q_T), \quad u_i(x) \in D'(R), \quad i = 0, 1, 2.$$

Найти обобщенную функцию $\mathcal{U}(x, t) \in D'$, удовлетворяющую условиям

$$L_1 \tilde{u}(x, t) = f(x, t)\theta(t) + \delta(t)[u_2(x) + u_1(x) - u_0''(x)] \quad (23)$$

$$\tilde{u} \Big|_{t < 0} \equiv 0. \quad (24)$$

где

$$\mathcal{U}(x, t) = \theta(t)u(x, t).$$

1. Фундаментальное решение оператора $L \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$

Определение 1. Обобщенная функция $E(x, t)$ называется фундаментальным решением задачи Коши для оператора L , если она удовлетворяет равенствам

$$LE(x, t) = \delta(x, t), \quad (x, t) \in R^2, \quad E|_{t < 0} \equiv 0. \quad (25)$$

Теорема 7. Фундаментальное решение задачи Коши для оператора L имеет вид

$$E(x, t) = \frac{1}{2} \theta(t - |x|) + \frac{(t + |x|)}{2} \theta(t - |x|). \quad (26)$$

Теорема 8. Решение обобщенной задачи Коши (23), (24) представимо в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x, t) = & \iint_{R^2} E(x - \xi, t - \tau) \theta(t) f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_R E(x - \xi, t) [u_2(\xi) + u_1(\xi) - u_0''(\xi)] d\xi + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \int_R E(x - \xi, t) [u_1(\xi) + u_0'(\xi)] d\xi + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_R E(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь функция $E(x, t)$ фундаментальное решение оператора L .

Теорема 9. Для обобщенного решения задачи Коши (23), (24) имеют место формулы

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{4} u_0(x + t) + \frac{3}{4} u_0(x - t) + \frac{t}{2} u_0'(x - t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) ds + \\ & + \frac{1}{4} \int_{x-t}^{x+t} (x + t - s) u_2(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} (x - s + t - \tau) f(s, \tau) ds d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$

Определение 2. Классическим решением задачи Коши (21), (22) называется функция $u(x, t)$, имеющая все непрерывные производные входящие в уравнение (21) и удовлетворяющая уравнению (21) и начальным условиям (22).

Теорема 10. Если $u_0 \in C^3(R)$, $u_1 \in C^2(R)$, $u_2 \in C^1(R)$, $f \in C(\bar{Q}_T)$, то $\exists!$ классическое решение задачи (21), (22) и выражается формулой (28). Кроме того, это решение непрерывно зависит от исходных данных $u_0 \in C^3(R)$, $u_1 \in C^2(R)$, $u_2 \in C^1(R)$, $f \in C(\bar{Q}_T)$.

В пункте 3.2 изучается обратная задача определения источника, зависящее от времени. Доказана теоремы о существовании и единственности решения обратной задачи.

Рассмотрим задачу Коши для функции $u(x, t)$:

$$Lu = f(t)h(x, t) + g(x, t), \quad (x, t) \in D_T = \{(x, t) : x \in \square, t > 0\}; \quad (29)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad u_{tt}(x, 0) = u_2(x), \quad x \in \square, \quad (30)$$

где

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u.$$

В прямой задаче требуется определить функцию $u(x,t)$ по известным функциям $f(t), h(x,t), g(x,t)$ и $u_i(x), i=0,1,2$.

Обратная задача. Найти функцию $f(t) \in C[0, t_0]$, если о решении прямой задачи (29), (30) известна дополнительная информация

$$u(0,t) = \varphi(t), 0 \leq t \leq t_0. \quad (31)$$

Другими словами, требуется по известным функциям $h(x,t), g(x,t), u_i(x), i=0,1,2$ найти пару функций $\{u(x,t), f(t)\}$, удовлетворяющих (29) -(31).

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения задачи (29), (30).

Теорема 11. Пусть для какого - либо $t_0 > 0, x_0 \in R$ функции $f(t) \in C[0, t_0], u_i(x) \in C^{3-i}[x_0 - t_0, x_0 + t_0], i=0,1,2, f \in C^1(\Delta_1(x_0, t_0))$. Тогда в области $\Delta_1(x_0, t_0)$ решение задачи (29), (30) $\exists!$, причем функции $u(x,t), u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{ttt}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{ttx} \in C(\Delta_1(x_0, t_0))$.

Теорема 12. Пусть для функций $u_i(x), i=0,1,2, h(x,t), g(x,t)$ выполнены условия теоремы 11, $\varphi(t) \in C^3[0, t_0]$ и для функций $u_i, i=0,1,2, \varphi$ выполнены условия согласования $u_0(0) = \varphi(0), u_1(0) = \varphi'(0), u_2(0) = \varphi''(0)$. Тогда, если $|h(0,t)| \geq \alpha > 0, t \in [0, t_0]$, то для любого $T > 0$ на отрезке $[0, T]$ решение обратной задачи (29) - (31) $\exists!$ и принадлежит классу $C[0, T]$.

В пункте 3.3 рассматривается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи определения пары функций $\{u(x,t), f(x)\}$, удовлетворяющих в D_T гиперболическому уравнению третьего порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x,t) = f(x)h(x,t) + g(x,t), (x,t) \in \Delta_T, \quad (32)$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), u_{tt}(x,0) = u_2(x), -T \leq x \leq T, \quad (33)$$

и условиям переопределения

$$u(0,t) = \varphi_0(t), u_x(0,t) = \varphi_1(t), u_{xx}(0,t) = \varphi_2(t), 0 \leq t \leq T. \quad (34)$$

Здесь $\Delta_T = \{(x,t) : -(T-t) < x < T-t, 0 \leq t \leq T\}$, $h(x,t), g(x,t), u_i(x), \varphi_i(t) (i=0,1,2)$ – заданные функции.

Другими словами, требуется по известным функциям $h(x,t), g(x,t), u_i(x), \varphi_i(t) (i=0,1,2)$ найти пару функций $\{u(x,t), f(x)\}$, удовлетворяющих (32)-(34).

Отметим, что в обратной задаче (32) - (34) области определения искомой функции и заданных дополнительных информаций не совпадают.

Определение 3. Решением обратной задачи (32) -(34) называется пара функций $\{u(x,t), f(x)\}$ таких, что $u(x,t) \in C^3(\Delta_T), f(x) \in C[-T, T]$ и функции

$u(x,t), f(x)$ удовлетворяют (32),(33) в области Δ_T , а также условию (34) для $0 \leq t \leq T$.

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения прямой задачи (32), (33).

Теорема 13. Пусть $u_i(x) \in C^{3-i}(-T \leq x \leq T), i=0,1,2, f(x) \in C[-T, T], h(x,t), g(x,t) \in C^1(\Delta_1)$. Тогда $\exists!$ решение задачи (32), (33), причем $u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xt}(x,t), u_{tt}(x,t), u_{ttt}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{ttx} \in C(\Delta_1(x_0, t_0))$.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 13 функции $\varphi_i(t)$ ($i=0,1,2$) являющиеся данными обратной задачи, должны обладать следующей гладкостью:

$$\varphi_i(t) \in C^{3-i}[0, T], i=0,1,2. \quad (35)$$

Кроме того, функции $\varphi_i(t)$ ($i=0,1,2$) должны удовлетворять некоторым условиям согласования:

$$\begin{aligned} u_0(0) &= \varphi_0(0), \quad u_0'(0) = \varphi_1(0), \quad u_0''(0) = \varphi_2(0), \\ u_1(0) &= \varphi_0'(0), \quad u_1'(0) = \varphi_1'(0), \quad u_1''(0) = \varphi_2'(0), \\ u_2(0) &= \varphi_0''(0), \quad u_2'(0) = \varphi_1''(0), \quad u_2''(0) = \varphi_2''(0). \end{aligned} \quad (36)$$

Теорема 14. Пусть для функций $u_i(x), i=0,1,2, h(x,t), g(x,t)$ выполнены условия теоремы 13, $|h(0,t)| \geq \alpha > 0, t \in [0, t_0]$, а для функций $\varphi_i(t)$ ($i=0,1,2$) выполнены условия гладкости (35) и условия согласования (36). Тогда для любого $T > 0$ на отрезке $[-T, T]$ решение обратной задачи (32) - (34) $\exists!$ и принадлежит классу $C[-T, T]$.

В пункте 3.4 рассматривается вопрос об однозначной разрешимости следующей коэффициентной обратной задачи:

Рассмотрим задачу Коши для функции $u(x,t)$:

$$Lu + q(t)u = f(x,t), (x,t) \in Q_T; \quad (37)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_x(x,0) = u_1(x), \quad u_{xx}(x,0) = u_2(x), \quad x \in R, \quad (38)$$

Обратная задача. Найти функцию $q(t) \in C[0, t_0]$, если о решении прямой задачи (37), (38) известна дополнительная информация

$$u(0,t) = h(t), 0 \leq t \leq t_0. \quad (39)$$

Другими словами, по известным функциям $f(x,t), u_i(x), i=0,1,2,3$ требуется найти пару функций $\{u(x,t), q(t)\}$, удовлетворяющих (37)-(39).

В прямой задаче требуется определить функцию $u(x,t)$ по известным функциям $q(t), f(x,t)$ и $u_i(x), i=0,1,2$.

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения задачи (37), (38).

Теорема 15. Если для какого - либо $t_0 > 0, x_0 \in R$ функции $q(t) \in C[0, t_0], u_i(x) \in C^{3-i}[x_0 - t_0, x_0 + t_0], i=0,1,2, f \in C^1(\Delta_1(x_0, t_0))$, то $\exists!$ в области $\Delta_1(x_0, t_0)$ решение прямой задачи (37), (38), причем $u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xt}(x,t), u_{tt}(x,t), u_{ttt}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{ttx} \in C(\Delta_1(x_0, t_0))$.

Теорема 16. Пусть для функций $u_i(x), i=0,1,2, f(x,t)$ выполнены условия теоремы 15, кроме того $h(t) \in C^3([0,t_0])$, $|h(t)| \geq \alpha > 0, \forall t \in [0,t_0]$ и для функций $u_i, i=0,1,2, h$ выполнены условия согласования $u_0(0) = h(0), u_1(0) = h'(0), u_2(0) = h''(0)$. Тогда для достаточно малых $T > 0$ решение обратной задачи (37) - (39) на отрезке $[0,T]$ $\exists!$ и принадлежит классу $C[0,T]$.

В четвертой главе исследованы вопросы о существовании и единственности решения прямой и обратных задач для гиперболического уравнения третьего порядка, когда уравнение имеет различные действительные характеристики.

В пункте 4.1 рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), x \in R, t > 0, \quad (40)$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), u_{tt}(x,0) = u_2(x), x \in R. \quad (41)$$

Обозначим через $\Delta(0,T)$ треугольник на плоскости x,t , ограниченный осью x и характеристиками уравнения (40), проведенными через точку (x,t) .

Теорема 17. Если $\alpha(x) \in C(R), u_0(x) \in C^{(3)}(R), u_1(x) \in C^{(2)}(R)$ и $u_2(x) \in C^{(1)}(R)$, то $\exists!$ классическое решение задачи (40), (41), принадлежащее классу $u(x,t) \in C^{(2,3)}(Q_T) \cap C^{(2,1)}(\bar{Q}_T)$. Кроме того, это решение непрерывно зависит от начальных данных $u_i(x), i=0,1,2$ и их производных до второго порядка включительно.

В пункте 4.2 этой главы изучается обратная задача определения источника в одном гиперболическом уравнении третьего порядка.

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)h(x), x \in R, t > 0, \quad (42)$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x), u_t(x,0) = \varphi_1(x), u_{tt}(x,0) = \varphi_2(x), x \in R, \quad (43)$$

где функции $\varphi_i(x), i=0,1,2$ заданные функции, $\alpha > 0$ – заданное число.

Для прямой задачи (42) -(43) справедлива

Лемма 2. Пусть $\varphi_i(x) \in C^{(3-i)}[-T,T], i=0,1,2, f(t) \in C[0,T], h(x) \in C[-T,T]$. Тогда $\exists!$ классическое решение задачи (42), (43), принадлежащее классу $u(x,t) \in C^{(3)}(\Delta_T)$. Кроме того, это решение непрерывно, зависит от начальных

данных $u_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ и их производных до второго порядка включительно.

Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть функции $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, $h(x)$ и постоянная $\alpha > 0$ заданы, а функция $f(t)$ - неизвестна. Требуется найти пару функций (u, f) из условий (42)-(43) по дополнительной информации

$$u(0, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (44)$$

Определение 4. Решением обратной задачи (42) -(44) называется пара функций $(u, f) \in C^{(3)}(\Delta_T) \times C([0, T])$, удовлетворяющая условиям (42) -(44).

Для обратной задачи (42) -(44) справедлива

Теорема 18. Если $\varphi_i(x) \in C^{(3-i)}[-T, T]$, $i = 0, 1, 2$, $h(x) \in C^{(2)}[-T, T]$, $h(0) \neq 0$, $g(t) \in C^{(3)}[0, T]$, и выполнены условия согласования $\varphi_i(0) = g^{(i)}(0)$, $i = 0, 1, 2$, то $\exists!$ в области Δ_T решение обратной задачи (42) -(44).

В пункте 4.3 исследована обратная задача нахождения решения и неизвестного источника, зависящей от времени для линейного гиперболического уравнения третьего порядка, когда сомножитель зависит от всех переменных (x, t) .

Рассмотрим задачу Коши

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = F(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (45)$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_{tt}(x, 0) = \varphi_2(x), \quad x \in R, \quad (46)$$

где $\alpha > 0$ – заданное число.

В прямой задаче требуется определить функцию $u(x, t)$ по известным функциям $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, $F(x, t)$.

Обратная задача. Пусть функция $F(x, t)$ имеет следующую структуры $F(x, t) = f(t)h(x, t)$, где $f(t)$, $h(x, t)$ – неизвестные и заданные функции соответственно. Требуется найти пару функций $(u(x, t), f(t))$, если о решении прямой задачи (45), (46) известна дополнительная информация

$$u(0, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (47)$$

Обозначим через $\Delta(x, t) = \{(\xi, \tau) : x - t + \tau \leq \xi \leq x + t - \tau, 0 \leq \tau \leq t\}$ и $\Delta(T) := \Delta(0, T)$.

Определение 5. Решением обратной задачи (45)-(47) называется пара функций $(u, f) \in C^{(3)}(\Delta) \times C[0, T]$, удовлетворяющая условиям (45)-(47) .

Для обратной задачи (45)-(47) справедлива

Теорема 19. Если $\varphi_i(x) \in C^{(3-i)}[-T, T]$, $i=0,1,2$, $h(x,t) \in C^{(2)}(\Delta(x,t))$, $|h(0,t)| \geq h_0 > 0$, $g(t) \in C^{(3)}[0, T]$, и выполнены условия согласования $\varphi_i(0) = g^{(i)}(0)$, $i=0,1,2$, то $\exists!$ в области $\Delta(0, T)$ решение обратной задачи (45)-(47).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе исследованы вопросы однозначной разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений в частных производных третьего порядка и получены следующие результаты:

1) С помощью фундаментального решения построено решение задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка с кратными действительными характеристиками;

2) Найдены достаточные условия однозначной разрешимости определения источника, зависящего от времени для гиперболического уравнения с частными производными третьего порядка;

3) Изучены обратные задачи восстановления источника, зависящего от пространственных переменных, когда области определения источника и область определения дополнительной информации не совпадают;

4) доказана однозначная разрешимость обратной задачи определения коэффициента при младшем члене, зависящего от времени по переопределению во внутренней точке;

5) доказана однозначная разрешимость задачи Коши для гиперболического уравнения с частными производными третьего порядка с различными действительными характеристиками;

6) найдены достаточные условия разрешимости обратной задачи определения источника, зависящего от времени для гиперболического уравнения с частными производными третьего порядка;

7) определены достаточные условия разрешимости обратной задачи нахождения источника, зависящего от времени, когда сомножитель зависит от переменных (x, t) ;

Исследование поставленных обратных задач основано на использовании результатов соответствующих прямых задач и на сведениях к системе линейных или нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Все результаты диссертации являются новыми и имеют теоретический характер, эти результаты можно применить в конкретных задачах физики и техники. Можно использовать полученные в диссертации научные результаты при исследовании решения обратных задач для гиперболических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений высших порядков и при построении решения обратных задач.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Жороев, А.К. Үчүнчү тартиптеги гиперболалык тендеме үчүн Коши маселеси [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - 2019. - № 3. - С.35-40.
2. Жороев, А.К. О разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев // Евразийское Научное Объединение. 2019.Т. 1. № 5 (51), С.1- 4.
3. Жороев, А. К. Об определении зависящего от времени младшего коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 34. № 1. С. 9-18.
4. Жороев, А. К. Об определении источника, зависящего от времени, в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев // Евразийское Научное Объединение. 2021.Т. 1. № 7 (77), С.1-3.
5. Жороев, А. К. Обратная задача определения источника в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев // Вестник Ошского государственного университета. 2022, №1(38), С.30-46.
6. Жороев, А. К. Обратная задача определения источника, зависящего от пространственных переменных в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2022. № 4(108). С. 11–18. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-4-108-11-18.
7. Жороев, А. К. О корректной разрешимости обратной задачи определения источника в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев, А.А.Касымалиева // Известия КГТУ № 1 (65), 2023.С.646-651.
8. Zhorojev, A. K. The inverse problem of determining the source in a third-order hyperbolic equation [Text] / B.S. Ablabekov, A.K. Zhorojev // Problems of Modern Mathematics 70th anniversary of A.A. Vorubaev, June 16-18, 2021. P. 97.
9. Zhorojev, A.K. Inverse problems for third-order hyperbolic equations [Text] /B.S. Ablabekov, A.K. Zhorojev // XV международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», посвященная 85-летию академика РАН В.Г. Романова, октябрь-ноябрь 30-3, 2023. – С. 1.
10. Жороев А.К. Метод полуобращения для решения задачи Коши гиперболического уравнения третьего порядка [Text] Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев // Международная научная конференция «V Борубаевские чтения», посвященная 70-летию Национальной академии наук Кыргызской Республики и 40-летию Института математики НАН КР. Бишкек, 20-21 июнь 2024.- С.48.

Жороев Автандил Кемелович « Үчүнчү тартиптеги гиперболалык теңдемелер үчүн тескери маселелер» деген темадагы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: тескери маселе, дифференциалдык теңдеме, гиперболалык теңдеме, фундаменталдык чыгарылыш, экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемелер системасы.

Изилдөөнүн объектиси: Үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу гиперболалык дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелер.

Изилдөөнүн предмети: Үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу гиперболалык дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин чыгарымдуулугун камсыз кылуучу жетиштүү шарттарды табуу.

Изилдөөнүн максаты: үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу гиперболалык дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөө.

Изилдөөнүн усулдары: фундаменталдык чыгарылышты колдонуу, ВИТ ыкмасы, кысып чагылтуу принциби.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы. 1) Үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу гиперболалык теңдемелер үчүн түз маселелердин чыгарылыштарынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылды.

2) Үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу гиперболалык теңдемелер үчүн тескери маселелердин чыгарылыштарынын жашашын жана жалгыздыгын камсыздоочу шарттар аныкталды.

Колдонуу боюнча сунуштар. Алынган илимий натыйжаларды жогорку тартиптеги жекече туундулуу теңдемелер үчүн чектик тескери маселелердин чыгарылышын изилдөөдө жана аны тургузууда колдонууга сунуштайбыз.

Колдонуу аймагы. Изилденген чектик тескери маселелер механикада, жана топурак таануу илиминде, математикалык физикада, компьютердик томографияда жана башка тармактарда колдонулушу мүмкүн.

РЕЗЮМЕ

Диссертации Жороева Автандила Кемеловича на тему: «Обратные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: обратная задача, дифференциальное уравнение, гиперболическое уравнение, фундаментальное решение, система интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Объект исследования: Обратные задачи для гиперболических уравнений в частных производных третьего порядка.

Предмет исследования: Нахождение достаточных условий, обеспечивающих разрешимость обратных задач для гиперболических уравнений третьего порядка.

Цель работы: Доказательство существования и единственности решения обратных задач для гиперболических дифференциальных уравнений с частными производными третьего порядка.

Методы исследования: использование фундаментального решение, метод ИУВ, принцип сжатых отображений.

Полученные результаты и их новизна: 1) Найдены достаточные условия существования и единственности решения прямых задач для гиперболических уравнений третьего порядка. 2) Определены условия, обеспечивающие существование и единственность решения обратных задач для гиперболических уравнений третьего порядка.

Рекомендации по использованию. Рекомендуем использовать полученные научные результаты при исследовании обратных задач для дифференциальных уравнений высокого порядка.

Область применения. Исследуемые обратные задачи могут найти применение в механике, почвоведении, математической физике, компьютерной томографии и других областях.

SUMMARY

Dissertation by Avtandil Zhoroev Kemelovich on the topic: “Inverse problems for third-order hyperbolic equations” for the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences in specialty 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: inverse problem, differential equation, hyperbolic equation, fundamental solution, system of Volterra integral equations of the second kind.

Object of investigation: Inverse problems for third-order hyperbolic partial differential equations.

Subject of investigation: Finding sufficient conditions to ensure the solvability of inverse problems for third-order hyperbolic equations.

Purpose of the work. Proof of the existence and uniqueness of the solution of inverse problems for hyperbolic partial differential equations of the third order.

Investigation methods: Using the fundamental solution, Volterra method of integral equations, principle of contracted mappings.

Scientific novelty of the work: 1) Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of direct problems for third-order hyperbolic equations are found. 2) Conditions are determined that ensure the existence and uniqueness of the solution of inverse problems for third-order hyperbolic equations.

Theoretical and practical significance of the results obtained: We recommend using the obtained scientific results in the study of inverse problems for high-order differential equations. The investigated inverse problems can be used in mechanics, soil science, mathematical physics, computed tomography and other fields.

Перечень основных обозначений и определений

ИУ – интегральное уравнение;

ИУВ – интегральное уравнение Вольтерра;

ОУВ - операторное уравнение Вольтерра;

СЛДУ – система линейных дифференциальных уравнений;

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество натуральных чисел;

\mathbb{R} – множество действительных чисел;

$Q_T = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t \in (0, T]\}$, $T > 0$ - фиксированное число,

$\Delta_T = \{(x, t) : -(T - t) < x < T - t, 0 \leq t \leq T\}$

$\Delta_1(x, t) = \{(s, \tau) : 0 \leq \tau \leq t, x - t + \tau \leq s \leq x + t - \tau\}$;

\in – означает “принадлежит”;

\forall – означает “для любого”;

\exists – означает “существует”;

$\exists!$ – означает “существует единственное”;

\Rightarrow – «следует»;

$C^l(\Omega)$, ($l = 0, 1, \dots$) - пространство l - раз непрерывно дифференцируемых в области Ω функций, в частности, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$;

$C_0^1[0, T] \equiv \{\psi(t) \in C^1[0, T], \psi(0) = 0\}$,

$C^{(n, m)}(Q_T)$ – пространство функций $v(x, t)$, определенных в Q_T и таких, что

$\frac{\partial^{k+l} v}{\partial x^k \partial t^l} \in C(Q_T)$ при $0 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq m$;

