Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясы
Математика институту

Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети

Д 01.24.701 Диссертациялык кеңеши

Кол жазма укугунда
УДК 517.956

Жороев Автандил Кемелович

Үчүнчү тартиптеги гиперболалык тендемелер үчүн тескери маселелер

01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу

Физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациянын

Авторефераты

Бишкек-2024

Диссертациялык иш Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин колдонмо математика, информатика жана компьютердик технологиялар кафедрасында аткарылган.

Илимий жетекчи: **Аблабеков Бактыбай Сапарбекович,** физика-математика илимдеринин доктору, профессор, Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин колдонмо математика, информатика жана компьютердик технологиялар кафедрасынын профессору

Расмий оппоненттер: **Искандаров Самандар,** физика-математика илимдеринин доктору, профессор, Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институтунун интегро-дифференциалдык теңдемелер теориясы лабораториясынын башчысы

Алымбаев Асанкул Темиркулович, физика-математика илимдеринин доктору, доцент, И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университетине караштуу жаңы маалымат технолоиялар институтунун билим берүүдөгү маалыматтык технологиялар кафедрасынын профессорунун м.а.

Жетектөөчү мекеме: М.М.Адышев атындагы Ош технологиялык университетинин колдонмо математика жана информатика кафедрасы, Кыргыз Республикасы, 723500, Ош шаары, Исанова көчөсү, 81.

Диссертацияны коргоо Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын математика институтунун жана Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин алдында физика-математика илимдеринин доктору (кандидаты) илимий даражасын изденип алуу үчүн диссертацияларды коргоо боюнча Д 01.24.701 диссертациялык кеңешинин 2025-ж. 22 январында, саат 14:00дө, Кыргыз Республикасы, 720001, Бишкек ш., Абдымомунов көчөсү 328, 126-бөлмө дарегинде өтө турган отурумунда болот.

Коргоонун идентификатору – https://vc1.vak.kg/b/d_0-qxu-6yv-biz

Диссертация менен Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын (720071, Бишкек шаары, Чүй проспекти 265-а) жана Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин (720033, Бишкек шаары, Фрунзе көчөсү 547) китепканаларынан жана УАК тын сайтынан таанышууга болот: https://stepen.vak.kg/diss_sovety/d-01-24-701/

Диссертациялык кенештин окумуштуу катчысы,

Ф.-м.и.к., доцент Шаршембиева Ф. К.

ИЗИЛДӨӨНҮН ЖАЛПЫ МҮНӨЗДӨМӨСҮ

Диссертациянын темасынын актуалдуулугу. Үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер – көптөгөн физикалык кубулуштардын жана процесстердин математикалык моделдери болуп эсептелет. Мисалы, жаракалуу-тешиктүү чөйрөлөрдө суюктукту чыпкалоонун процесстерин, топурактагы нымдуулуктун өтүү процессин, гетерогендүү чөйрөдө жылуулукту берүүнү, дисперсиялык жана абсорбциялуу бир өлчөмдүү изотроптук гомогендик чөйрөдө акустикалык толкундардын таралышын моделдөө менен байланышкан көптөгөн маселелер, серпилгичтүү чөйрөдө бузулуулардын таралуу процесси үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелерди изилдөөгө алып келет.

Дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелер деп түз маселенин чыгарылышы жөнүндө кээ бир кошумча маалыматтардан (кайра аныктоо шартынан) дифференциалдык теңдемелердин коэффициенттерин, оң жактарын (булак функцияларын), ошондой эле баштапкы же чектик шарттарын жана чыгарылыштарын аныктоо маселелери аталат. Мындай маселелер каралып жаткан процесстин математикалык моделинин структурасы белгилүү болгон математикалык моделдин өзүнүн параметрлерин табуу зарыл болгон учурларда келип чыгат учурларда пайда болот. «Тескери маселе» терминин орустун көрүнүктүү математиктери М.М. Лаврентьев (1969) жана В.Г. Романовдор (1969) киргизген.

Учурда математикалык физиканын тескери маселелери теориясын Москва (негиздөөчүсү А.Н. Тихонов) жана Сибирь (негиздөөчүлөрү М.М. Лаврентьев жана В.Г. Романов) сыяктуу бир катар математикалык мектептердин өкүлдөрү, ошондой эле алардын шакирттери Ю.Е. Аниконов, А.Л.Бухгейм, А.И.Прилепко, А.М. Денисов, С.И. Кабанихин, В.Г. Яхно ж.б.

Экинчи даражадагы гиперболалык типтеги теңдемелердин тескери маселелердин теориясына маанилүү изилдөө салымын В.Г.Романов, С.И.Кабанихин жана алардын окуучулары кошкон.

Үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдемелердин тескери маселелери салыштырмалуу аз изилденген. Кээ бир маселелер гана изилденген. Ошентип, мисалы, Б.С.Аблабеков эмгектеринде мейкиндиктик өзгөрмөлөргө көз каранды коэффициентти аныктоонун тескери маселелерин, каалаган коэффициенттин менен кайра аныктоо шартынын аныкталуу аймагы дал келбеген учурларда каралган.

Диссертациянын темасынын окуу жана илимий мекемелер тарабынан жүргүзүлүп жаткан негизги изилдөө иштери менен байланышы:

Диссертациялык жумуш Ж.Баласагын атындагы КУУнун математика

жана информатика факультетинин «Колдонмо математика, информатика жагна компьютердик технологиялар” кафедрасынын илим изилдөө багыттары менен байланышта аткарылды.

Изилдөөнүн максаты жана коюлган маселелер. Диссертациянын максаты - үчүнчү даражадагы гиперболалык жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теоремаларды далилдөө. Бул максатка жетүү үчүн төмөнкү маселелер коюлган:

1) үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдемелер үчүн түз маселелердин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттарын табуу;

2) көп жана ар түрдүү мүнөздөгүчтөрү бар үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдемелер үчүн сызыктуу жана сызыктуу эмес тескери маселелердин чыгарылышынын бир маанилүү чыгарымдуулугу үчүн жетиштүү шарттарды табуу.

Иштин илимий жаңылыгы. Диссертацияда алынган бардык жыйынтыктар жаңы жана математикалык негизделген далилдери бар. Теориялык жактан алганда диссертациянын жыйынтыктары математикалык физиканын тескери маселелердин теориясын иштеп чыгууну улантууда жана төмөнкүдөй жыйынтыктар алынды:

1) Эселенген жана ар кандай мүнөздөгүчтөрү бар үчүнчү даражадагы гиперболалык жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерге түз маселелерди чыгаруу үчүн жетиштүү шарттар табылган;

2) Эселенген жана ар кандай мүнөздөгүчтөрү бар үчүнчү даражадагы гиперболалык жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн булак функциясын жана коэффициентти аныктоо тескери маселелеринин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын шарттары аныкталган.

Алынган натыйжалардын теориялык жана практикалык мааниси. Диссертацияда алынган илимий жыйынтыктар теориялык мүнөзгө ээ. Бирок, үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдемелер үчүн тескери маселелер бир тектүү чөйрөдө акустикалык толкундардын таралышында, суюктук жана газ механикасында жана нымдуулукту өткөрүүдө кеңири колдонулаарын эске алуу менен, бул иштин жыйынтыктарын кээ бир прикладдык маселелерди чечүүгө пайдаланууга болот. Диссертацияда алынган натыйжалар жогорку тартиптеги жекече туундулары бар дифференциалдык жана интегродифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин теориясын иштеп чыгууга салым кошот деп ишенебиз. Алынган натыйжаларды төртүнчү жана андан жогорку даражадагы гиперболалык теңдемелердин бир өлчөмдүү жана көп өлчөмдүү тескери маселелерди изилдөөдө, ошондой эле мындай теңдемелерге алынып келүүчү прикладдык маселелерди чыгарууда колдонууга болот.

Коргоо үчүн сунушталган негизги жоболор:

1) эселенген мүнөздөгүчтөрү бар гиперболалык теңдеменин Коши маселесинин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары;

2) эселенген мүнөздөгүчтөрү бар гиперболалык теңдемедеги убакыттан көз каранды болгон булак функциясын аныктоо тескери маселесинин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын камсыз кылуучу жетиштүү шарттар;

3) эселенген мүнөздөгүчтөрү бар гиперболалык теңдемедеги мейкиндиктеги өзгөрмөдөн көз каранды болгон булак функциясын табуу тескери маселесинин чыгарымдуулугу үчүн жетиштүү шарттар;

4) эселенген мүнөздөгүчтөрү бар гиперболалык теңдемедеги эң төмөнкү мүчөдөгү убакыттан көз каранды болгон коэффициентин аныктоо маселесинин чыгарылышы;

5) ар кандай мүнөздөгүчтөрү бар гиперболалык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын камсыз кылуучу жетиштүү шарттар;

6) ар кандай мүнөздөгүчтөрү бар гиперболалык теңдеме үчүн убакыттан көз каранды болгон теңдеменин оң жагын аныктоо тескери маселесинин чыгарылышы, качан көбөйтүүчү мейкиндиктеги өзгөрмөдөн көз каранды болсо;

7) ар кандай мүнөздөгүчтөрү бар гиперболалык теңдеме үчүн убакыттан көз каранды болгон оң жагын аныктоонун тескери маселесинин чечилиши, качан көбөйтүүчү бардык өзгөрмөлөрдөн көз каранды болсо;

Изилдөө методдору. Коюлган тескери маселелер үчүн тиешелүү түз маселелерди чыгарышынын жашашы жана жалгыздыгы теоремалары далилденип, анын айкын чыгарылыштары тургузулат. Тескери маселелердин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы теоремаларын далилдөө ыкмалары алгачкы тескери маселеден экинчи түрдөгү Вольтерра тибиндеги тендемелер системасына өтүүгө негизделген. Бул үчүн кошумча шарттарды (кайра аныктоо шарттарын) жана тиешелүү түз маселелерди айкын чыгарылыштарын колдонуу менен биз изилденүүчү тескери маселени экинчи түрдөгү Вольтерра тибиндеги тендемелер системасына алып келебиз Андан кийин ВОТ ыкмасы колдонулат.

Диссертациянын натыйжаларынын жарыяланышы. Диссертациянын негизги жыйынтыктары 8 эмгекте, анын ичинде Улуттук аттестациялык комиссия тарабынан жарыялоого сунуш кылынган 7 журналдык макалада [1-7] жана эл аралык конференцияда 3 баяндама тезистеринде [8-10] жарыяланган. Эки журналдын импакт факторлору [3,6] 0,1ден кем эмес.

Изденүүчүнүн жеке салымы. Диссертацияда чагылдырылган илимий жыйынтыктар авторго гана таандык. Биргелешкен иштерде маселенин коюлушу жана талкуулоо илимий жетекчи, ф.-м.и.д., профессор Б.С. Аблабековдун түздөн-түз катышуусу менен жүргүзүлдү, ал эми алынган илимий жыйынтыктар изденүүчү А.К.Жороевге таандык. Биргелешкен [7] эмгекте маселени кою илимий жетекчиге, жыйынтыктарды талкуулоо Б.С.Аблабековго жана А.А.Касымалиевага таандык.

Диссертациянын жыйынтыктарынын апробациясы. Диссертациянын негизги жыйынтыктары төмөнкү эл аралык илимий конференцияларда жана семинарларда баяндалды жана талкууланды:

- Академик А. Бөрүбаевдин 70 жылдык юбилейине арналган "Математиканын заманбап маселелери" аттуу эл аралык илимий конференция. – Бишкек: КР УИАнын математика институту, 16-18 июнь, 2021-жыл;
- «Тескери жана корректүү эмес коюлган маселелерди чечүүнүн теориясы жана сандык ыкмалары» Россия илимдер академиясынын академиги В.Г. Романовдун 85 жылдыгына арналган XV эл аралык илимий конференциясы. Новосибирск, Академшаарчасы, 30-октябрынан 3-ноябрына чейин,2023 - жыл;
- Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын 70 жылдыгына жана Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институтунун 40 жылдыгына арналган "V Бөрүбаев окуулары" эл аралык илимий конференциясы. – Бишкек: КР УИАнын математика институту, Бишкек,20-21 июнь, 2024-жыл;
- Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин колдонмо математика, информатика жана компьютердик технологиялар кафедрасынын семинарларында (Бишкек, 2021-2022ж.).
- Тескери жана туура эмес коюлган маселелер» (Бишкек, КММУ, 2018-2022), илимий жетекчиси, физика-математика илимдеринин доктору, профессор Аблабеков Б.С.

Диссертациянын түзүлүшү жана көлөмү. Диссертация кириш сөздөн, төрт главадан, 11 бөлүмдөн турган, 60 аталыштагы адабияттардын тизмесинен жана корутундулардан турат. Диссертациянын жалпы көлөмү 90 бетти түзөт. Формулалардын, аныктамалардын, леммалардын жана теоремалардын номерлениши үч орундуу белгиленген, б.а. эгерде формула (1.2.1) номерине ээ болсо, анда ал биринчи главанын экинчи бөлүмүнүн 1-формуласы экендигин билдирет.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН НЕГИЗГИ МАЗМУНУ

Киришүүдө теманын актуалдуулугу, жумушка жалпы мүнөздөмө, изилдөөнүн максаты, илимий жанылыгы, практикалык балуулугу, коргоого коюлуучу негизги жоболор баяндалган.

Дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин азыркы учурдагы теориясы орус математиктери А. Н. Тихоновдун (1943, 1961, 1986), М. М. Лаврентьевдин (1980, 1991) жана В. Г. Романовун (1984, 2005) эмгектеринде жаралган жана өнүктүрүлгөн. Тескери маселелер теориясынын өнүгүү тарыхы, анын азыркы абалы, кеңири библиографиясы жогорку айтылган авторлордун монографияларында берилген.

Кийинчерээк бул маселелер Ю. Е. Аниконовдун (1978, 1995), Н. Я. Безношенконун (1975,1977,1983), Ю. Я. Беловдун (1991), А. Л. Бухгеймдин (1983, 1988), С. И. Кабанихиндин (1988, 2001, 2009), А.И. Прилепконун (1992, 1999), В. Г. Романовдун (2002), В. Г. Яхнонун (1990), Ж. Р. Кенондун (1987) жана башка бир катар авторлордун эмгектеринде изилденип, иштелип чыккан.

Биринчи глава «АДАБИЯТТАРГА ЖАНА ДИССЕРТАЦИЯНЫН ЖЫЙЫНТЫКТАРЫНА ТАЛДООЛОР» эки пункттан турат. 1.1 пунктунда “Адабияттарга талдоолор” диссертациянын темасы боюнча адабияттарга сереп салат. Бул пунктта сунушталган диссертациянын темасына эң жакын башка авторлордун эмгектеринин илимий натыйжаларына талдоо жүргүзүлөт. 1.2 «Диссертациянын жыйынтыктарына сереп салуу» бөлүмүндө диссертациянын илимий натыйжаларына кеңири баяндама берилген.

Б.С.Аблабековдун (1998) жана О.С.Зикировдун (2000) эмгектери үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдемелер үчүн Коши маселесин жана аралаш маселелерди изилдөөгө арналган. Бул эмгектерде үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдемелер үчүн локалдык чектик маселелердин чечилиши боюнча маселелер изилденген. Атап айтканда, Б.С.Аблабеков (1997) эселүү мүнөздөгүчтүү гиперболалык теңдеменин айкын чыгарылышы табылган жана негиздеген. О.С.Зикировдун (2007-ж.) эмгектеринде гиперболалык типтеги моделдик теңдемелердин бир классы үчүн локалдык эмес баштапкы-чектик маселелерин чыгарылышынын жашашы боюнча маселелер изилденген.

Үчүнчү тартиптеги гиперболалык теңдемелерге тескери маселелер тескери маселелердин теориясында салыштырмалуу жаш багыт болуп саналат. Буга чейин үчүнчү даражадагы гиперболикалык теңдемелер үчүн мейкиндиктиктеги өзгөрмөдөн көз каранды болгон коэффициентти аныктоо тескери маселелери, качан коэффициенттин аныкталуу областы менен кошумча аныктоо шарты дал келбеген учурда Б.С. Аблабековдун эмгегинде изилденген. Б.С.Аблабеков үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгаруу ыкмасын түзгөн. Даламбердин формуласына окшош айкын чыгарылыш алынган.

1- маселе.

$$L_q u = \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u + q(x)u = f(x,t), \qquad (1)$$

теңдемеси үчүн Q_T баштапкы шарты бар Коши маселесин карап көрөлү

$$u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad u_{tt}(x,0)=u_2(x), \quad x \in R. \qquad (2)$$

Берилген q, f, u_i, $i=0,1,2$ функциялары үчүн (1), (2) маселеси корректуу коюлган, эгерде маселенин берилиштери үчүн функционалдык мейкиндиктери жана чыгарылыштын мейкиндиги туура тандалган болсо. Чынында, эгерде

$$q(x)\in C(R), \ u_0\in C^3(R), \ u_1\in C^2(R), \ u_2\in C^1(R), \ f\in C(\bar{Q}_T),$$

анда бул шарттар Q_T да (1.1.1), (1.12) маселенин классикалык чыгарылышы болушуна кепилдик берет, б. а. $u\in C^3(Q_T)$.

Тескери маселени коюудан мурун (1), (2) маселесинин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын далилдейбиз жана бул чыгарылыштын кээ бир касиеттерин белгилейбиз.

(x, t) чекит аркылуу (1) теңдеменин мүнөздөгүчтөрү жана x огу менен чектелген x, t тегиздигиндеги үч бурчтукту $\Delta(0,T)$ менен белгилейли.

1-лемма . Эгерде кандайдыр бир $T>0$, $q(x)\in C[-T,T]$, $u_i(x)\in C^{3-i}[-T,T], i=0,1,2,$ $f\in C^1(\Delta(0,T))$ болсо, анда $\Delta(0,T)$ областында (1), (2) маселесинин классикалык чыгарылышы $\exists!$.

2-маселе. Берилген u_i, $i=0,1,2,$ f функциялар боюнча $q(x)\in C(R)$ табуу керек болсун, эгерде (1), (2) маселенин чыгарылышы x=0, $0\leq t\leq T$ көптүгүнө карата анын x боюнча экинчи тартипке чейинки туундусу менен бирге белгилүү болсо

$$u(0,t)=\varphi_0(t), \quad u_x(0,t)=\varphi_1(t), \quad u_{xx}(0,t)=\varphi_2(t), \quad 0\le t\le T. \qquad (3)$$

Эгерде 1-лемманын шарттары аткарылса, анда тескери маселенин берилиштери болуп саналган $\varphi_0(t),\varphi_1(t)$, функциялары төмөнкүдөй жылмакайлыкка ээ болушу керек экендигин белгилей кетүү керек:

$$\varphi_0(t)\in C^3[0,T], \quad \varphi_1(t)\in C^2[0,T], \quad \varphi_2(t)\in C^1[0,T]. \qquad (4)$$

Мындан тышкары, $\varphi(t)$, $i=0,1,2$ функциялары кандайдыр бир макулдашуу шарттарын канааттандырышы керек:

$$\begin{aligned} &u_0(0)=\varphi_0(0), \quad u_0'(0)=\varphi_1(0), \quad u_0''(0)=\varphi_2(0),\\ &u_1(0)=\varphi_0'(0), \quad u_1'(0)=\varphi_1'(0), \quad u_1''(0)=\varphi_2'(0), \qquad (5)\\ &u_2(0)=\varphi_0''(0), \quad u_2'(0)=\varphi_1''(0), \quad u_2''(0)=\varphi_2''(0). \end{aligned}$$

1-Теорема. Эгерде 1 леммасынын шарттары u_i, $i=0,1,2,$ f функциялары үчүн, ошондой эле $\varphi_i(t)$, $i=0,1,2$- функциялары үчүн (4), (5) шарттары аткарылса жана

$$|\varphi_0(x)|\ge\alpha>0, \quad x\in[-T,T], \qquad (6)$$

анда жетишээрлик кичинекей $h > 0$ үчүн 1- маселенин чыгарылышы $\exists!$ жана $C[-T,T]$.классына таандык.

Белгилүү болгондой, акустикалык толкундардын бир тектүү чөйрөдө дисперсиясы жана жутулушу менен таралышы төмөнкү теңдеме менен сүрөттөлөт:

$$\tau\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_\infty^2\Delta u\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\Delta u\right)=0, \qquad (7)$$

$u(x,t)$- кысым, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $\Delta - x$ боюнча Лапластын оператору жана τ, c_∞ жана c_0 оң константалары тиешелүүлүгүнө жараша релаксация жана үндүн чектөө фазалык ылдамдыктарынын маанисине ээ. Келгиле, $x = x / c_\infty\tau, t = t / \tau$ өлчөмсүз өзгөрмөлөрдү киргизели, ошол эле белгилерди сактайлы, $\alpha = c_0^2 / c_\infty^2$.

Анда жаңы өзгөрмөлөрдөгү бир өлчөмдүү изотроптук чөйрө үчүн (7) теңдемеси төмөнкү түргө ээ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \qquad (8)$$

Чыныгы чөйрө үчүн $c_0^2 < c_\infty^2$, демек, $0 < \alpha < 1$.

Б.С.Аблабековдун эмгегинде $\alpha = 1$ болгондо (8) теңдеме үчүн Коши маселеси изилденген жана бул маселенин айкын чыгарылышы тургузулган.

3-маселе. Эми L_1 оператору менен байланышкан төмөнкү Коши маселесин карап көрөлү. Биз Q_T областында

$$L_1 u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}+I\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)= f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \qquad (9)$$

теңдемесин

$$u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad u_{tt}(x,0)=u_2(x), \quad x\in R, \qquad (10)$$

баштапкы шарттарын канааттандырган $u(x,t)$ функциясын табуу керек.

Орун алат

2-теорема . Эгерде $u_0(x)\in C^4(R), u_1(x)\in C^3(R), u_2(x)\in C^2(R)$,

$f(x,t)\in C^1(\bar{Q}_T)$, анда (9), (10) маселесинин классикалык чыгарылышы $\exists!$ жана ал чыгарылыш

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^{-(t-|s-x|)}[u_1(s)+u_0(s)]ds+\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)}\int_{x-\tau}^{x+\tau}[u_1(\xi)+u_2(\xi)]d\xi d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\tau\int_{x-(\tau-s)}^{x+\tau-s} f(\xi,s)ds d\xi d\tau + u_0(x)e^{-t} \qquad (11)$$

формуласы менен туюндурулат.

Мындан тышкары, бул чыгарылыш u_i, $i=0,1,2$ баштапкы шарттарынан жана $\bar{Q}_T$дагы алардын экинчи тартипке чейинки туундуларынан үзгүлтүксүз көз каранды.
Ошентип, (9), (10) Коши маселеси корректүү коюлган, ал эми $C^3(Q_T)\cap C^1(\bar{Q}_T)$ классикалык маселенин корректүүлүк классы болуп саналат.

2- тескери маселе.

$$L_q u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}+I\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u+q(x)u(x,t)=f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \qquad (12)$$

теңдемеси үчүн $q(x)$ функциясын аныктоо маселесин карап көрөлү, эгерде (12) теңдеменин чечими шарттарда

$$u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad u_{tt}(x,0)=u_2(x), \quad x\in R, \qquad (13)$$

$x=x_0, t\geq 0$болгондо анын x -ка карата туундусу менен бирге берилген маанилердикабыл алса

$$u(x_0,t)=h_1(t), \quad u_x(x_0,t)=h_2(t), \quad 0\leq t\leq T. \qquad (14)$$

(12) - (14) тескери маселе үчүн макулдашуу төмөнкү шарттары орун алса:

$$\begin{aligned} &u_0(x_0)=h_1(0), \quad u_1(x_0)=h_1(0), \quad u_2(x_0)=h_1''(0)\\ &u_0'(x_0)=h_2(0), \quad u_1'(x_0)=h_2'(0), \quad u_2'(x_0)=h_2''(0). \end{aligned} \qquad (15)$$

Төмөнкү теорема орун алат

3-теорема. Эгерде кандайдыр бир $t_0>0$ үчүн u_0, u_1, u_2функциялары үчүн 1-теореманын шарттары жана $h_1(t)\in C^3([0,t_0]), \quad h_2(t)\in C^2([0,t_0])$, (15) шарты жана $|u_0(x)|\geq\alpha>0, \quad x\in[x_0-t_0, x_0+t_0]$, шарттары аткарылса, анда $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ аралыктагы жетишээрлик $\delta>0$кичинекей маанилер үчүн (12)-(14) тескери маселенин чыгарылышы $\exists!$ жана $C[x_0-\delta, x_0+\delta]$ классына жатат.

Ж.А.Балкизов төмөнкү маселелерди изилдеген:

Евклиддик мейкиндигиндеги (x,y) чекиттердин төмөнкү түрдөгү үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдемени карайбыз:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx}-u_{yy})=f(x,y), \qquad (16)$$

мында $f(x,y)-$берилген функция , $u=u(x,y)-$изделүүчү функция.

(16) теңдемеси $y=0$түз сызыгы $AB=\{(x,y):0<x<r, y=0\}$ сегменти, ошондой эле (16) теңдемесинин $AC: y-x=0, \quad BC: y+x=r$мүнөздөгүчтөрү менен чектелген Ω аймагында каралат. Мында $A=(0,0), \quad B=(r,0)$, $C=\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)$.

$y=0$ түз сызыгынын AB кесиндисинде ыктыярдуу чекит $(x,0)$ алабыз жана бул чекит аркылуу AC жана BC мүнөздөгүчтөрүнө параллелдүү (16) теңдеменин эки мүнөздөгүчүн түзөбүз. AC жана BC мүнөздөгүчтөрү менен кесилишкен тиешелүү чекиттерди деп белгилейбиз

$$\theta_0(x)=\left(\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right),\ \theta_r(x)=\left(\frac{r+x}{2},\frac{r-x}{2}\right).$$

1-маселе. (16) теңдемесинин Ω аймагында регулярдуу жана чектик шарттарын канааттандырган чыгарылышты табуу керек болсун:

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le r, \qquad (17)$$

$$u(\theta_0(x))=\varphi(x),\ 0\le x\le r, \qquad (18)$$

$$u(\theta_r(x))=\psi(x),\ 0\le x\le r, \qquad (19)$$

мында $\tau(x),\varphi(x),\psi(x)-$ берилген функциялар.

2-маселе. (16) теңдемесинин Ω аймагында регулярдуу жана (17), (18) чектик шарттарын жана

$$u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le r, \qquad (20)$$

шартын канааттандырган чыгарылышты табуу керек болсун, мында $\tau(x),\varphi(x),\nu(x)-$ берилген функциялар.

3-маселе. (16) теңдеменин Ω аймагында регулярдуу жана (17), (19), (20) чектик шарттарын канааттандырган чыгарылышты табуу керек болсун, мында $\tau(x),\psi(x),\nu(x)-$ берилген функциялар

Төмөнкү теоремалар орун алат:

4-теорема . Берилген $\tau(x),\varphi(x),\psi(x),f(x,y)$ функциялары төмөнкү касиеттерге ээ боло тургандай болсун

$$\tau(x),\varphi(x),\psi(x)\in C[0,r]\cap C^3(0,r),\ f(x,y)\in C(\overline{\Omega})$$

жана макулдашуу щарттары аткарылсын

$$\tau(0)=\varphi(0),\ \tau(r)=\psi(r),\varphi(r)=\psi(r).$$

Анда Ω аймагында 1-маселенин $\exists!$.

5-теорема. Берилген $\tau(x),\varphi(x),\nu(x),f(x,y)$ функциялары төмөнкү касиеттерге ээ боло тургандай болсун

$$\tau(x),\varphi(x)\in C^1[0,r]\bigcap C^4(0,r),\ \nu(x)\in C[0,r]\bigcap C^3(0,r),\ f(x,y)\in C(\overline{\Omega})$$

жана макулдашуу щарттары аткарылсын

$$\tau(0)=\varphi(0),\ \nu(0)+\tau'(0)=2\varphi'(0).$$

Анда Ω аймагында 2-маселенин чыгарылышы $\exists!$.

6-теорема. Мейли берилген функциялар төмөнкү шарттарды канаттандырсын

$$\tau(x),\psi(x)\in C^1[0,r]\bigcap C^4(0,r),\ \nu(x)\in C[0,r]\bigcap C^3(0,r),\ f(x,y)\in C(\overline{\Omega})$$

жана $\tau(r)=\psi(r)$ макулдашуу шарты аткарылсын.

Анда Ω аймагында 3-маселенин чыгарылышы $\exists!$.

Экинчи глава «ИЗИЛДӨӨНҮН УСУЛДУГУ ЖАНА УСУЛДАРЫ» эки пункттан турат. Биринчи пункт «2.1. Изилдөөнүн объектилери жана

предметтери» деп аталып, анда изилдөөнүн объектилери, предмети келтирилген:

Изилдөө объектиси – үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу гиперболалык типтеги дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелер.

Изилдөөнүн предмети – – үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу гиперболалык типтеги дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин чыгарылышын камсыз кылуучу жетиштүү шарттарды табуу.

2.2 де диссертацияда каралган тескери маселелердин чыгарылышын **изилдөө ыкмалары**: Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесине алып келүү, кысып чагылтуу принциби, Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесинин бир маанилүү чечилиши, фундаменталдык чыгарылыш методдору келтирилген.

Диссертациянын негизги жыйынтыктары 3, 4-главаларда берилген.

Үчүнчү главада эселүү мүнөздөгүчтү үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдемедеги булак функцияларын жана коэффициенттерди аныктоо тескери маселесин изилдөөгө арналган.

3.1--бөлүмдө Коши маселесинин чыгарылышы гиперболалык

$$L \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

операторунун фундаменталдык чыгарылышы аркылуу тургузулган.

3-теореманын шарттарын канааттандырган берилген маалыматтар боюнча мисал тургузулган жана бул маалыматтарга ылайыктуу чыгарылыш алынган.

Коши маселеси. L оператору менен байланышкан төмөнкү Коши маселесин карайлы. Биз Q_T областында

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{21}$$

теңдемесин жана

$$u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad u_{tt}(x,0)=u_2(x), \quad x\in R \tag{22}$$

баштапкы шарттарын канааттандырган $u(x,t)$ функциясын табышыбыз керек болсун.

Төмөнкү шарттар аткарылсын

$$f(x,t)\in D'(Q_T), \quad u_i(x)\in D'(R), \quad i=0,1,2.$$

Төмөнкү шарттарды канааттандырган жалпыланган функциясын $\tilde{u}(x,t)\in D'$ тапкыла:

$$L_1\tilde{u}\,(x,t) = f(x,t)\theta(t)+\delta(t)[u_2(x)+u_1(x)-u_0''(x)] \tag{23}$$

$$\tilde{u}\,\Big|_{t<0} \equiv 0. \qquad (24)$$

мында

$$\tilde{u}(x,t) = \theta(t)u(x,t).$$

1. $L \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ операторунун фундаменталдык чыгарылышы

1-аныктама. $E(x,t)$ жалпыланган функциясы L оператору үчүн Коши маселесинин фундаменталдык чыгарылышы деп аталат, эгерде ал төмөнкү катнаштарды канааттандырса

$$LE(x,t) = \delta(x,t), \quad (x,t) \in R^2, \quad E\Big|_{t<0} \equiv 0. \qquad (25)$$

7- теорема. L оператор үчүн Коши маселесинин фундаменталдык чыгарылышы

$$E(x,t) = \frac{1}{2}\theta\left(t - |x|\right) + \frac{\left(t + |x|\right)}{2}\theta\left(t - |x|\right) \qquad (26)$$

түрүнө ээ.

8 - теорема. (23), (24) жалпыланган Коши маселесинин чыгарылышы

$$\tilde{u}(x,t) = \iint_{R^2} E(x-\xi, t-\tau)\theta(t) f(\xi,\tau)d\xi d\tau + \int_R E(x-\xi,t)\left[u_2(\xi) + u_1(\xi) - u_0''(\xi)\right]d\xi +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_R E(x-\xi,t)\left[u_1(\xi) + u_0'(\xi)\right]d\xi + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_R E(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi$$

(27)

түрүндө берилет:

Мында $E(x,t)$ функциясы L операторунун фундаменталдык чыгарылышы.

9- теорема. (23), (24) жалпыланган Коши маселесинин чыгарылышы үчүн төмөнкү

формула орун алат:

$$u(x,t) = \frac{1}{4}u_0(x+t) + \frac{3}{4}u_0(x-t) + \frac{t}{2}u'_0(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)ds +$$

$$+\frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t}(x+t-s)u_2(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} (x-s+t-\tau)f(s,\tau)dsd\tau. \qquad (28)$$

2- аныктама. (21), (22) Коши маселесинин классикалык чыгарылышы деп, (21) теңдемесиндеги бардык үзгүлтүксүз туундулары бар жана (21) теңдемесин жана (22) баштапкы шарттарын канааттандырган $u(x,t)$ функциясын айтабыз.

10-теорема. Эгерде $u_0 \in C^3(R), \quad u_1 \in C^2(R),\ u_2 \in C^1(R),\ f \in C(\bar{Q}_T),$ анда (21), (22) Коши маселесинин классикалык чыгарылышы $\exists!$ жана (28) формуласы менен туюндурулат. Мындан тышкары, бул чыгарылыш берилген $u_0 \in C^3(R),\ u_1 \in C^2(R), u_2 \in C^1(R), \quad f \in C(\bar{Q}_T)$ функцияларынан үзгүлтүксүз көз каранды.

3.2 - пунктта убакытан көз каранды болгон булак функциясын аныктоо тескери маселеси изилденген. Тескери маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теорема далилденген.

$u(x,t)$ функциясы үчүн Коши маселесин карайлы:

$$Lu = f(t)h(x,t) + g(x,t), (x,t) \in D_T = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}; \qquad (29)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad u_{tt}(x,0) = u_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (30)$$

мында

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u.$$

Түз маселеде белгилүү $f(t), h(x,t), g(x,t)$ жана $u_i(x), i = 0,1,2$ функцияларын колдонуу менен $u(x,t)$ функциясын аныктоо талап кылынат.

Тескери маселе. (29), (30) түз маселенин чыгарылышы жөнүндө кошумча маалымат

$$u(0,t) = \varphi(t), 0 \le t \le t_0, \qquad (31)$$

боюнча $f(t) \in C[0,t_0]$ функциясын табуу.

Башка сөз менен айтканда, белгилүү $h(x,t), g(x,t)\ u_i(x), \quad i = 0,1,2$ функциялар боюнча (29) -(31) шарттарын канаттандырган экилдик $\{u(x,t), f(t)\}$ функцияларын табуу.

(29), (30) түз маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теореманы келтирели.

11-теорема. Кандайдыр бир $t_0 > 0,\ x_0 \in R$ үчүн $f(t) \in C[0,t_0],$ $u_i(x) \in C^{3-i}[x_0 - t_0, x_0 + t_0],\ i = 0,1,2,\ f \in C^1(\Delta_1(x_0,t_0))$**.** Анда $\Delta_1(x_0,t_0)$ аймагында (21), (22) маселесинин чыгарылышы $\exists!$ жана $u(x,t), u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt},$ $u_{ttt}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{ttx} \in C(\Delta_1(x_0,t_0))$**.**

12- теорема. Мейли $u_i(x),\ i = 0,1,2,\ h(x,t), g(x,t)$ функциялары үчүн 11-теореманын шарттары аткарылсын, $\varphi(t) \in C^3[0,t_0]$ жана $u_i, i = 0,1,2,\ \varphi$ функциялары үчүн $u_0(0) = \varphi(0),\ u_1(0) = \varphi'(0),\ u_2(0) = \varphi''(0)$ макулдашуу шарттары аткарылсын. Анда, эгерде $|h(0,t)| \ge \alpha > 0, t \in [0,t_0]$, болсо, анда $[0,T]$ кесиндисинде каалаган $T > 0$ үчүн (29) - (31) тескери маселенин чыгарылышы $\exists!$жана $C[0,T]$ классында жатат.

3.3-бөлүмдө D_T областында үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдемени

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=f(x)h(x,t)+g(x,t),\ (x,t)\in\Delta_T, \tag{32}$$

баштапкы

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad u_{tt}(x,0)=u_2(x),\quad -T\le x\le T, \tag{33}$$

жана кайра аныктоо шарттарын

$$u(0,t)=\varphi_0(t),\ u_x(0,t)=\varphi_1(t),\ u_{xx}(0,t)=\varphi_2(t),\ 0\le t\le T. \tag{34}$$

канааттандыруучу $\{u(x,t),\ f(x)\}$ экилдик функцияларды аныктоо тескери маселесинин бир маанилуу чыгарымдулугу жөнүндөгү маселе каралат
Мында $\Delta_T=\{(x,t):-(T-t)<x<T-t,\, 0\le t\le T\}$, $h(x,t), g(x,t)$, $u_i(x)$, $\varphi_i(t)$ $(i=0,1,2)$ – берилген функциялар.

Башкача айтканда, белгилүү $h(x,t), g(x,t), u_i(x),\ \varphi_i(t)\ (i=0,1,2)$ функциялары боюнча, (32)-(34) канааттандыруучу $\{u(x,t), f(x)\}$ экилдик функцияларын табуу талап кылынсын.

(32) - (34) тескери маселеде изделүүчү функциянын аныкталуу областы менен берилген кошумча маалыматтын аныкталуу областы дал келбей турганын белгилейбиз.

3-аныктама. (32)-(34) тескери маселенин Δ_T областындагы чыгарылышы деп $\{u(x,t), f(x)\}$ функцияларын айтабыз, эгерде $u(x,t), f(x)$ функциялары (32)-(34) шарттарын канааттандырса жана $u(x,t)\in C^3(\Delta_T)$, $f(x)\in C[-T,T]$ жатса.

(32), (34) түз маселесинин чыгарылышы жашарын жана жалгыз экендиги жөнүндө теореманы келтирели жана далилдейли.

13 - теорема. Мейли $u_i(x)\in C^{3-i}(-T\le x\le T), i=0,1,2,\ f(x)\in C[-T,T]$, $h(x,t), g(x,t)\in C^1(\Delta_1)$ болсун. Анда (32), (34) маселесинин чыгарылышы ∃! жана $u(x,t), u_t(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xt}(x,t), u_{tt}(x,t)\ u_{ttt}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{ttx}\in C(\Delta_1(x_0,t_0))$.

Эгерде 13-теореманын шарттары аткарылса, анда тескери маселесинин маалыматтары болгон $\varphi_i(t)$ $(i=0,1,2)$ функциялары төмөнкүдөй жылмакайлыкка ээ болушу керек экендигин эске алабыз:

$$\varphi_i(t)\in C^{3-i}[0,T], i=0,1,2. \tag{35}$$

Мындан тышкары, $\varphi_i(t)$ $(i=0,1,2)$ функциялары кээбир макулдашуу шарттарды канааттандырышы керек:

$$\begin{gathered} u_0(0)=\varphi_0(0),\ u_0'(0)=\varphi_1(0),\ u_0''(0)=\varphi_2(0), \\ u_1(0)=\varphi_0'(0),\ u_1'(0)=\varphi_1'(0),\ u_1''(0)=\varphi_2'(0), \\ u_2(0)=\varphi_0''(0),\ u_2'(0)=\varphi_1''(0),\ u_2''(0)=\varphi_2''(0). \end{gathered} \tag{36}$$

14-теорема. Мейли $u_i(x), i=0,1,2,$ $h(x,t), g(x,t)$ функциялары 13-теореманын шарттарын, $|h(0,t)|\geq\alpha>0,$ $t\in[0,t_0]$, ал эми $\varphi_i(t)$ $(i=0,1,2)$ функциялары (35) жылмакайлык жана (36) макулдашуу шарттарын канааттандырсын. Анда $[-T,T]$интервалындагы каалаган $T>0$ үчүн (32) - (34) тескери маселенин чыгарылышы $\exists!$ жана $C[-T,T]$ классына жатат.

3.4-бөлүмдө төмөндөгү тескери коэффициенттик маселенин бир маанилүү чыгарымдуулугу жөнүндөгү маселе каралат:

$u(x,t)$ функциясы үчүн Коши маселесин карап карайлы

$$Lu+q(t)u=f(x,t),(x,t)\in Q_T; \tag{37}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad u_{tt}(x,0)=u_2(x),\quad x\in R, \tag{38}$$

Тескери маселе. (37), (38) түз маселенин чыгарылышы жөнүндө кошумча маалымат боюнча $q(t)\in C[0,t_0]$ функциясын тапкыла:

$$u(0,t)=h(t), 0\leq t\leq t_0. \tag{39}$$

Башкача сөз менен айтканда $f(x,t), u_i(x),$ $i=0,1,2,3$ белгилүү функциялары боюнча (37) - (39) шарттарын канааттандыруучу $\{u(x,t),q(t)\}$ экилдик функцияларын табуу талап кылынат.

Түз маселеде белгилүү $q(t), f(x,t)$жана $u_i(x), i=0,1,2$ функцияларынан $u(x,t)$ функциясын аныктоо талап кылынат.

(37), (38) түз маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыз экендиги жөнүндө теореманы келтирели.

15- теорема. Эгерде кандайдыр бир $t_0>0, x_0\in R$ үчүн $q(t)\in C[0,t_0],$ $u_i(x)\in C^{3-i}([x_0-t_0,x_0+t_0]),$ $i=0,1,2,$ $f\in C^1(\Delta_1(x_0,t_0))$ шарттары аткарылса, анда $\Delta_1(x_0,t_0)$ областында (37), (38) маселесинин чыгарылышы $\exists!$, мындан тышкары $u(x,t),$ $u_t(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t),u_{xt}(x,t),u_{tt}(x,t)$ $u_{ttt},u_{xxx},u_{txx},u_{ttx}\in C(\Delta_1(x_0,t_0))$.

16- теорема. Мейли $u_i(x), i=0,1,2,$ $f(x,t)$ функциялары үчүн 15 - теореманын шарттары, $h(t)\in C^3[0,t_0],$ мындан тышкары $|h(t)|\geq\alpha>0,$ $\forall t\in[0,t_0]$ жана $u_i,i=0,1,2,$ h функциялары үчүн $u_0(0)=h(0),$ $u_1(0)=h'(0), u_2(0)=h''(0)$ макулдашуу шарттары аткарылсын. Анда жетишерлик кичине $T>0$ саны үчүн (37)-(39) тесери маселесинин чыгарылышы $[0,T]$ кесиндисинде $\exists!$ жана $C[0,T]$ классында жатат.

Төртүнчү главада ар түрдүү чыныгы мүнөздөгүчтөрү бар үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдеме үчүн түз жана тескери маселелердин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү маселелер изилденген.

4.1-бөлүмдө төмөнкү Коши маселесин карайлы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}= f(x,t),\ x\in R, t>0, \quad (40)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ u_{tt}(x,0)=u_2(x), x\in R. \quad (41)$$

$\Delta(0,T)$ менен (x,t) чекити аркылуу чийилген (20) теңдеменин x огу жана мүнөздөгүчтөрү менен чектелген x,t тегиздигиндеги үч бурчтукту белгилейли.

17- теорема. Эгерде $\alpha(x)\in C(R), u_0(x)\in C^{(3)}(R), u_1(x)\in C^{(2)}(R)$ и $u_2(x)\in C^{(1)}(R)$, анда $u(x,t)\in C^{(2,3)}(Q_T)\cap C^{(2,1)}(\bar{Q}_T)$ классына жатуучу (40), (41) маселесинин классикалы чыгарылышы $\exists!$. Мындан тышкары, бул чыгарылыш жана анын экинчи тартипке чейинки туундулары $u_i(x),\quad i=0,1,2$ баштапкы шарттарынан үзгүлтүксүз көз каранды.

Бул главанын **4.2-бөлүмүндө** үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдемедеги булак функциясын аныктоо тескери маселеси изилденет.

Үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдеме үчүн Коши маселесин карайлы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}= f(t)h(x),\ x\in R, t>0, \quad (42)$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ u_t(x,0)=\varphi_1(x),\ u_{tt}(x,0)=\varphi_2(x), x\in R, \quad (43)$$

мында $\varphi_i(x), i=0,1,2$ берилген функциялар, $\alpha>0-$ берилген сан.

(42) -(43 түз маселеси үчүн орун алат

2-лемма. Мейли $\varphi_i(x)\in C^{(3-i)}[-T,T], i=0,1,2,\ f(t)\in C[0,T], h(x)\in C[-T,T]$. Анда $u(x,t)\in C^{(3)}(\Delta_T)$ классында жатуучу (42), (43) түз маселесинин классикалык чыгарылышы $\exists!$. Мындан тышкары, бул чыгарылыш жана анын экинчи тартипке чейинки туундулары $u_i(x),\quad i=0,1,2$ баштапкы шарттарынан үзгүлтүксүз көз каранды.

Төмөнкү тескери маселени карайлы: Мейли $\varphi_i(x),\ i=0,1,2,\ h(x)$ функциялары жана $\alpha>0$ турактуу саны берилсин, ал эми $f(t)$ функциясы белгисиз болсун. (42)-(43) шарттарынан (u, f) экилдик функциясын төмөнкү кошумча маалыматы боюнча

$$u(0,t)=g(t),\qquad 0\le t\le T \quad (44)$$

табуу талап кылынсын.

4-аныктама. (42) -(44) тескери маселенин чыгарылышы деп (42) -(44) шарттарын канааттандырган экилдик $(u, f)\in C^{(3)}(\Delta_T)\times C([0,T])$ функцияларын айтабыз.

(33) -(35) тескери маселеси үчүн төмөнкү теорема орун алат:

18-теорема. Эгерде $\varphi_i(x)\in C^{(3-i)}[-T,T],\ i=0,1,2,\quad h(x)\in C^{(2)}[-T,T],$ $h(0)\neq 0, g(t)\in C^{(3)}[0,T]$ жана $\varphi_i(0)=g^{(i)}(0),\ i=0,1,2$ макулдашуу шарттары аткарылса, анда Δ_T областында (42)-(44) тескери маселесинин чыгарылышы $\exists!$.

4.3- бөлүмдө көбөйтүлүүчү функция бардык (x,t) өзгөрмөлөрүнөн көз каранды болгон учурдагы үчүнчү даражадагы сызыктуу гиперболалык теңдеме үчүн чыгарылышты жана убакыттан көз каранды болгон белгисиз булак функциясын табуу тескери маселеси изилденет.

Төмөнкү Коши маселесин карайлы:

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = F(x,t), (x,t) \in Q_T, \qquad (45)$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x), u_t(x,0) = \varphi_1(x), u_{tt}(x,0) = \varphi_2(x), \ x \in R, \qquad (46)$$

мында $\alpha > 0 -$берилген сан.

(45), (46) түз маселесинде белгилүү $\varphi_i(x), i = 0,1,2$, $F(x,t)$ функциялар боюнча $u(x,t)$ функциясын аныктоо талап кылынат.

Тескери маселе. Мейли $F(x,t)$ функциясы төмөнкү түрдө $F(x,t) = f(t)h(x,t)$ болсун, мында $f(t), h(x,t) -$тиешелүү түрдө белгисиз жана берилген функциялар.

(45), (46) nүз маселесинин чыгарылышы жөнүндө

$$u(0,t) = g(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad (47)$$

кошумча маалымат боюнча $(u(x,t), f(t))$ экилдик функцияларын табуу талап кылынсын.

$\Delta(x,t) = \{(\xi,\tau) : x - t + \tau \le \xi \le x + t - \tau, 0 \le \tau \le t\}$ жана $\Delta(T) := \Delta(0,T)$ белгилоолорун киргизели.

5- аныктама. (45) -(47) тескери маселенин чыгарылышы деп (45) -(47) шарттарын канааттандырган экилдик $(u, f) \in C^{(3)}(\Delta) \times C[0,T]$ функцияларын айтабыз.

(45) -(47) тескери маселеси үчүн төмөнкү теорема орун алат:

19 - теорема. Эгерде $\varphi_i(x) \in C^{(3-i)}[-T,T]$, $i = 0,1,2$, $h(x,t) \in C^{(2)}(\Delta(x,t))$, $|h(0,t)| \ge h_0 > 0, g(t) \in C^{(3)}[0,T]$ жана $\varphi_i(0) = g^{(i)}(0), \quad i = 0,1,2$ макулдашуу шарттары аткарылса, анда $\Delta(0,T)$ областында (45)-(47) тескери маселесинин чыгарылышы $\exists!$.

КОРУТУНДУ

Диссертациялык иште үчүнчү даражадагы гиперболалык жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин бир манилүү чыгарымдуулугу боюнча суроолор изилденип, төмөнкүдөй жыйынтыктар алынган:

1) Фундаменталдык чыгарылышты колдонуу менен, бир нече эселүү мүнөздөгүчтүү үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарылышы тургузулган;

2) үчүнчү даражадагы гиперболалык жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн убакыттан көз каранды болгон булак функциясын аныктоо

тескери маселесинин бир маанилүү чыгарымдуулугу үчүн жетиштүү шарттар табылган;
3) мейкиндиктик өзгөрмөдөн көз каранды болгон булак функциясын аныктоо тескери маселесиндеги функциянын аныкталуу областы менен кошумча маалыматтагы функциянын аныкталуу областы дал келбеген учуру изилденген;
4) Ички чекитте кайра аныктоо жолу менен убакыттан көз каранды болгон эң төмөнкү мүчөнүн коэффициентин аныктоо тескери маселесинин бир маанилүү чыгарымдуулугу далилденген;
5) ар кандай чыныгы мүнөздөгүчтөрү бар үчүнчү даражадагы гиперболалык жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалыздыгы далилденген.
6) үчүнчү даражадагы гиперболалык жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн убакыттан көз каранды болгон булак функциясын аныктоо тескери маселесинин чыгарылышы үчүн жетиштүү шарттар табылган.
7) көбөйтүлүүчү функция бардык өзгөрмөлөрдөн көз каранды болгон учурдагы убакыттан көз каранды булак функциясын табуу боюнча тескери маселенин чыгарымдуулугу үчүн жетиштүү шарттар аныкталган.

Коюлган тескери маселелерди изилдөө тиешелүү түз маселелердин натыйжаларын колдонууга жана экинчи түрдөгү Вольтерра тибиндеги сызыктуу же сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин системасына келтирүүгө негизделген.

ПРАКТИКАЛЫК СУНУШТАР

Диссертациянын бардык жыйынтыктары жаңы жана теориялык мүнөзгө ээ, бирок бул жыйынтыктарды физиканын жана техниканын конкреттүү маселелерине колдонууга болот.

Диссертацияда алынган илимий жыйынтыктарды жогорку даражадагы гиперболалык дифференциалдык жана интегродифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин чыгарылышын изилдөөдө жана тескери маселелердин чыгарылыштарын тургузууда колдонууну сунуштайбыз.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН ТЕМАСЫ БОЮНЧА ЖАРЫЯЛАНГАН ЭМГЕКТЕРДИН ТИЗМЕСИ

1. Жороев, А.К. Үчүнчү тартиптеги гиперболалык тендеме үчүн Коши маселеси [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - 2019. - № 3. - С.35-40.
2. Жороев, А.К. О разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев // Евразийское Научное Объединение. 2019.Т. 1. № 5 (51), С.1- 4.

3. Жороев, А. К. Об определении зависящего от времени младшего коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.К. Жороев //Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 34. № 1. С. 9-18.
4. Жороев, А. К. Об определении источника, зависящего от времени в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев // Евразийское Научное Объединение. 2021.Т. 1. № 7 (77), С.1-3.
5. Жороев, А. К. Обратная задача определения источника в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев //Вестник Ошского государственного университета. 2022, №1(38), С.30-46.
6. Жороев, А. К. Обратная задача определения источника, зависящего от пространственных переменных в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2022. № 4(108). С. 11–18. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-4-108-11-18.
7. Жороев, А. К. О корректной разрешимости обратной задачи определения источника в гиперболическом уравнении третьего порядка [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев, А.А.Касымалиева //Известия КГТУ № 1 (65), 2023.С.646-651.
8. Zhoroev, A. K. The inverse problem of determining the source in a third-order hyperbolic equation [Text]/B.S. Ablabekov, A.K. Zhoroev // Problems of Modern Mathematics 70th anniversary of A.A. Borubaev, June 16-18, 2021. – P. 97.
9. Zhoroev, A.K. Inverse problems for third-order hyperbolic equations [Text] /B.S. Ablabekov, A.K. Zhoroev // XV международная молодежная научная школа-конференция. Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач посвященная 85-летию академика РАН В.Г. Романова, октябрь-ноябрь 30-3, 2023. – С. 1.
10. Жороев А.К. Метод полуобрашения для решения задачи Коши гиперболического уравнеия третьего порядка [Text] / Б.С.Аблабеков, А. К. Жороев // Международная научная конференция «V Борубаевские чтения», посвященная 70-летию Национальной академии наук Кыргызской Республики и 40-летию Института математики НАН КР. Бишкек, 20-21 июнь 2024.- С.48.

Жороев Автандил Кемелович « Үчүнчү тартиптеги гиперболалык теңдемелер үчүн тескери маселелер» деген темадагы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: тескери маселе, дифференциалдык теңдеме, гиперболалык теңдеме, фундаменталдык чыгарылыш, экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемелер системасы.

Изилдөө объектиси: Үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу гиперболалык дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелер.

Изилдөө предмети: Үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу гиперболалык дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин чыгарымдуулугун камсыз кылуучу жетиштүү шарттарды табуу.

Иштин максаты. үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу гиперболалык дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөө.

Изилдөөнүн методдору: фундаменталдык чыгарылышты колдонуу, ВИТ ыкмасы, кысып чагылтуу принциби.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы. 1) Үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу гиперболалык теңдемелер үчүн түз маселелердин чыгарылыштарынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылды.

2) Үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу гиперболалык теңдемелер үчүн чектик тескери маселелердин чыгарылыштарынын жашашын жана жалгыздыгын камсыздоочу шарттар аныкталды.

Колдонуу боюнча сунуштар. Алынган илимий натыйжаларды жогорку тартиптеги жекече туундулуу теңдемелер үчүн чектик тескери маселелердин чыгарылышын изилдөөдө жана аны тургузууда колдонууга сунуштайбыз.

Колдонуу аймагы. Изилденген чектик тескери маселелер механикада, жана топурак таануу илиминде, математикалык физикада, компьютердик томографияда жана башка тармактарда колдонулушу мүмкүн.

РЕЗЮМЕ

Диссертации Жороева Автандила Кемеловича на тему: «Обратные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: обратная задача, дифференциальное уравнение, гиперболическое уравнение, фундаментальное решение, система интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Объект исследования: Обратные задачи для гиперболических уравнений в частных производных третьего порядка.

Предмет исследования: Нахождение достаточных условий, обеспечивающих разрешимость обратных задач для гиперболических уравнений третьего порядка.

Цель работы. Доказательство существования и единственности решения обратных задач для гиперболических дифференциальных уравнений с частными производными третьего порядка.

Методы исследования: использование фундаментального решение, метод ИУВ, принцип сжатых отображений.

Полученные результаты и их новизна: 1) Найдены достаточные условия существования и единственности решения прямых задач для гиперболических уравнений третьего порядка. 2) Определены условия, обеспечивающие существование и единственность решения обратных задач для гиперболических уравнений третьего порядка.

Рекомендации по использованию. Рекомендуем использовать полученные научные результаты при исследовании обратных задач для дифференциальных уравнений высокого порядка.

Область применения. Исследуемые обратные задачи могут найти применение в механике, почвоведении, математической физике, компьютерной томографии и других областях.

SUMMARY

Dissertation by Avtandil Zhoroev Kemelovich on the topic: "Inverse problems for third-order hyperbolic equations" for the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences in specialty 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: inverse problem, differential equation, hyperbolic equation, fundamental solution, system of Volterra integral equations of the second kind.

Object of investigation: Inverse problems for third-order hyperbolic partial differential equations.

Subject of investigation: Finding sufficient conditions to ensure the solvability of inverse problems for third-order hyperbolic equations.

Purpose of the work. Proof of the existence and uniqueness of the solution of inverse problems for hyperbolic partial differential equations of the third order.

Investigation methods: Using the fundamental solution, Volterra method of integral equations, principle of contracted mappings.

Scientific novelty of the work: 1) Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of direct problems for third-order hyperbolic equations are found. 2) Conditions are determined that ensure the existence and uniqueness of the solution of inverse problems for third-order hyperbolic equations.

Theoretical and practical significance of the results obtained: We recommend using the obtained scientific results in the study of inverse problems for high-order differential equations. The investigated inverse problems can be used in mechanics, soil science, mathematical physics, computed tomography and other fields.

ШАРТУУ БЕЛГИЛЕРДИН ТИЗМЕСИ

ИТ – Интегралдык теңдемелер;
ВИТ – Вольтерранын интегралдык теңдемеси;
ВОТ - Вольтерранын оператордук теңдемеси;
$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ – – натуралдык сандардын көптүгү;
R – чыныгы сандардын көптүгү;
$Q_T = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t \in (0,T]\}, T > 0$ - фиксирленген турактуу сан;
$\Delta_T = \{(x,t) : -(T-t) < x < T-t, 0 \le t \le T\}$
$\Delta_1(x,t) = \left\{(s,\tau) : 0 \le \tau \le t, x - t + \tau \le s \le x + t - \tau\right\};$
$\in$ – «тиешелүү» же «таандык»;
$\forall$ – “каалагандай”;
$\exists$ – жашоо квантору;
$\exists!$ –жашайт жана жалгыз.
$\Rightarrow$ – «келип чыгат»;
$C(D)$ – D аймагында үзгүлтүксүз функциялардын көптүгү;
$C^k(D)$ – D аймагында k-тартипке чейинки (k- кошо) үзгүлтүксүз туундуларга ээ болгон функциялардын мейкиндиги;
$C_0^1[0,T] \equiv \left\{\psi(t) \in C^1[0,T], \quad \psi(0) = 0\right\}$,

$C^{(n,m)}(Q_T)$ – каалагандай $(x,t) \in Q_T$ үчүн $\dfrac{\partial^{k+l} v}{\partial x^k \partial t^l} \in C(Q_T)$, $0 \le k \le n, \quad 0 \le l \le m$ туундулары менен кошо аныкталган $v(x,t)$ функцияларынын мейкиндиги;