Кыргызский Государственный Технический университет имени И.Раззакова
Кыргызско-Российский Славянский университет имени Б. Ельцина

Диссертационный совет Д 01.25.711

На правах рукописи
УДК: 163.631

Душенова Умут Джумаказыловна

Аналитико-численное решение задач теплопереноса

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2025

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Прикладной математики и информатики» Кыргызского государственного технического университете им.И.Раззакова

Научный руководитель: **Джаманбаев Мураталы Джузумалиевич**, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Национальной академии наук Кыргызской Республики, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» Кыргызского Государственного технического университете им.И.Раззакова

Официальные оппоненты: **Бекетаева Асель Орозалиевна**, доктор физико-математических наук, доцент кафедры Математическое и компьютерное моделирование Казакского национального университета имени Аль-Фараби.

Мукамбаев Нурбек Жээмбаевич – кандидат физико-математических наук, координатор по академической работе и мобильности Кыргызско-китайского института Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына.

Ведущая организация: Ысык-Кульский государственный университет им.К.Тыныстанова, г.Каракол, ул. К.Тыныстанова 26, Физико-математический факультет, кафедра Математики и информационных технологий

Защита состоится «27» июня 2025г. В 14.30 часов на заседании диссертационного Совета Д 01.25.711 по защите докторских(кандидатских) диссертаций при Кыргызском Государственном техническом университете им.И.Раззакова и Кыргызско-Российском Славянском университете им.Б.Ельцина по адресу: 720044, Кыргызская Республика, г Бишкек, пр.Ч.Айтматова, 66, КГТУ им.И. Раззакова, малый актовый зал (МАЗ, аудитория 1/257). Ссылка доступа к видеоконференции защиты диссертации: https://vc.vak.kg/b/012-h47-fex-gn0

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Кыргызского Государственного технического университета им.И.Раззакова по адресу: 720044, Кыргызская Республика, г.Бишкек, пр.Ч.Айтматова,66 и Кыргызско Российского Славянского университета им Б.Ельцина по адресу: 720000, Кыргызская Республика, г.Бишкек, ул. Киевская 44 и на сайте www.vak.kg.

Автореферат разослан «26» мая 2025г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико- математических наук, доцент Доталиева Ж.Ж.

2

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Строительство и эксплуатация гидротехнических сооружений, расположенные высокогорьях в условиях вечной мерзлоты, требует специализированных научных и прикладных исследований, связанные с безопасностью сооружений. Одним из главных факторов влияющих на безопасность сооружений является температурный режим. Исследование температурного режима гидротехнических сооружений, связано не только безопасностью сооружений, но и с экологической безопасностью, охраны окружающей среды. В частности таяние мерзлого грунта под основанием хвостохранилища и под основанием тело плотины золоторудного комбината может приводит к фильтрации цианистой жидкости в окружающую среду загрязняя подземные, грунтовые и поверхностные воды, также приводить к деформации основания сооружений и потере устойчивости т.е. к разрушению, что влечет за собой колоссальный экономический ущерб и к человеческим жертвам. Поэтому исследование температурного режима гидротехнических сооружений, расположенные в условиях вечной мерзлоты актуально.

Данная работа посвящена исследованию аналитико-численными методами процесса таяния мерзлого грунта. Аналитико-численный подход позволяет создать эффективный подход к решению долгосрочных прогнозных задач, определять время перехода в стационарный режим, находить путем идентификации неизвестные параметры математической модели такие как коэффициент температуропроводностей, коэффициенты теплообмена.

Связь темы диссертации с научными программами или научно-исследовательскими работами.

- «Математическое моделирование процессов массотеплопереноса и методы их решения»,2012– 2014гг. Проект по линии Департамента науки МОН КР**.**
- «Математическое моделирование оползневых процессов в суглинистых грунтах Кыргызстана», 2021-2022гг**.** Проект по линии Департамента науки МОН КР**.**
- Отчет о научно-исследовательской работе «Инновационные технологии решения физико-технических проблем в промышленности Кыргызской Республики», 2013 г.
- Международный научный проект РФФИ № 14-05-90116 (совместно с Институтом горного дела СОРАН, Новосибирск), 2014-2015гг.

Целью диссертационной работы является создание эффективного подхода к построению аналитических решений математических моделей теплопереноса и на основе численного анализа решений формировать выводы, предложения, рекомендации специалистам, инженерам и соответствующим организациям.

В соответствии с поставленной целью сформулированы следующие основные задачи исследования:

- Задача1. Разработка методики определения температуры, коэффициентов температуропроводности и теплообмена численно-аналитическим способом как решение математической модели, используя данные натурных наблюдений температуры. В практике эти коэффициенты определяются экспериментально с большими погрешностями.
- Задача 2. Анализ решения задачи таяния мерзлого грунта с учетом и без учета фильтрации под основанием водоема аналитико-численным методом.
- Задача 3. Построение аналитического решение математической модели конвективного теплопереноса в мерзлых грунтах при различных видах граничного условия. Графически установить время перехода в стационарный режим и глубину таяния за это время.

- Задача 4. На основе численного анализа аналитических решений математической модели процесса таяние мерзлого грунта сделать вывод о влиянии или не влиянии начального условия на процесс перехода в стационарный режим таяния мерзлого грунта.
- Задача 5. Анализ решения задачи таяния мерзлого грунта математических моделей, учитывающий фазовый переход на границе таяние как задача Стефана и без учета фазового перехода. Граница таяние находится местоположением нулевой изотермы конвективного теплопереноса.

Научная новизна полученных результатов.

1. Разработан аналитико-численный подход к решению задач теплопереноса, основанный на идее метода конечных элементов (МКЭ).
2. Предложена методика определение глубины таяния и идентификации коэффициента температуропроводности, как решение математической модели теплопереноса с использованием данных наблюдений температуры грунта.
3. Построение аналитического решение математической модели таяние мерзлого грунта под основанием хвостохранилища и определение времени перехода к стационарному режиму и глубину таяния за это время.
4. Вывод о не влиянии начального условия на глубину таяние при долгосрочном прогнозе на основе численного эксперимента.
5. Анализ аналитических решений разных математических моделей процесса таяние мерзлого грунта и рекомендация выбора математической модели;

Практическая значимость полученных результатов. Предложенный подход и алгоритм могут служить основой для решения прикладных задач температурного режима сооружений, расположенные в зоне мерзлого грунта с учетом различных климатических факторов, которая является основой при проектировании, строительстве и эксплуатации сооружений и зданий в зоне вечной мерзлоты.

Также полученные результаты можно использовать в учебном процессе в качестве специального курса для старших курсов, магистрантов и аспирантов соответствующих направлений, а также использовать в изучении дисциплины «Математическое моделирование», «Прикладные задачи в математике».

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- Аналитико-численный подход, основанный на сочетании аналитического метода и идеи МКЭ;
- Методика определения температуры, коэффициентов температуропроводностей и теплообмена мерзлого грунта;
- Рекомендация о не влиянии начального условия на глубину таяния при долгосрочном прогнозировании.

Достоверность научных положений, выводов и рекомендаций показывается на основе анализа и оценки аналитических ичисленных решений математической модели, а также проверяется сопоставлением полученных результатов с результатами данных из наблюдательных скважин, а также с результатами других авторов.

Личный вклад соискателя заключается в использовании предложенной методики в решении различных задач теплопереноса, проведении исследований, анализе полученных данных, формулировке выводов и публикации статей; в установлении времени перехода в стационарный режим; на основе анализа аналитических решений различных математических моделей и численных результатов в формировании рекомендации о выборе более простой математической модели.

Апробация результатов исследования. Полученные в ходе выполнения данной диссертационной работы результаты докладывались на следующих международных, республиканских конференциях и семинарах:

- Научно-практические конференции Кыргызского Государственного технического университета им. И. Раззакова, Бишкек, 2010, 2012, 2016, 2019, 2020 гг.;

- Международная научно-техническая конференция молодых ученых «Инновация-вектор для молодежи» Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова (КГТУ), г.Бишкек, 2014 г.,
- Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы механики сплошных сред» Института геомеханики и освоения недр НАН КР, г.Бишкек,2012,2024 гг.
- Международная научно-практическая конференция «Научные основы стратегии развития АПК», Волгоград 2014г.,
- Международная научно-практическая конференции КГТУ, посвященной 65-летию университета, г.Бишкек, 2019 г.
- Научные исследования в Кыргызской Республике (Международный научный форум "Мировая наука и современные вызовы в эпоху глобализации и цифровой трансформации") г.Бишкек, 2023г;
- VII Всемирный конгресс математиков тюркского мира. г.Туркистан, 2023г;
- Международная - научная конференция «V Борубаевские чтения»г.Бишкек 2024г;
- XIVМеждународный научный форум «Перспективные задачи инженерной науки» Москва 2023г.
- на расширенном заседании научно-технического семинара кафедры 2024г.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях:

Основные результаты исследований опубликованы в 12 научных статьях, в том числе в научных журналах за пределами Кыргызской Республики, которые входят в базы данных Scopus (1), РИНЦ (10).

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из ведения, четырех глав, выводов, содержит 106 страниц машинописного текста, в том числе 22 рисунка, 3 таблицы и 128 наименований списка использованной литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В введении обосновывается актуальность проблемы, определены цели и задачи, а также основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту.

В главе 1 - Проведён обзор литературы методам моделирования температурного режима гидротехнических сооружений, расположенные в условиях вечной мерзлоты. Изменение температурного режима приводить к протаиванию грунтов, что связано с безопасностью гидротехнических сооружений в связи деформацией фундаментов и оснований сооружений, а также возникновению фильтрации жидкостей. В результате может изменить экологическую обстановку, повышая опасность загрязнения окружающей среды. Исследованием таких вопросов занимались многие ученые Соболь С.В., Биянов Г.Ф., Куперман В.Л., Максимов И.А., Трупак Н.Г., Чжан Р.В. и многие другие.

Вопросам моделирования тепломассопереноса в крупномасштабных природных объектах,расположенных на территории распространения многолетнемерзлых пород, рассматривались в работах GoyL, FabreD, BenseV.F, Чжан Р.В, Цыбин А.М. Инженерные методы оценки термогидродинамических и эмпирических соотношений между параметрами рассматривались Фельдман Г.М., Соболь С.В, Томирдиаро С.В, Комаров И.А, Цытович Н.А. и другие. Исследованиями темпреатурного режима хвостохранилищ в криолитзоне занимались Буйских А.А, Анискин Н.А, Назаров Л.А., Назарова Л.А, Джаманбаев М.Дж, Чыныбаев М.К. и другие.

В главе 2 – Методология и Методы исследования.

Рассмотрены применяемые методы, а также проанализирован физический процесс, связанный с температурным режимом объекта. Особое внимание уделено выбору экспериментальных и расчетных подходов, обеспечивающих достоверность полученных результатов.

В главе 3 Рассматривается обоснование новой эффективной методики решения задачи теплопереноса, основанная на сочетании аналитического решения математической модели с идеей метода конечных элементов (МКЭ). Такой подход снимает вопросы, связанные с дискретизацией времени и пространства при решении прикладных задач и позволяет решать задачи определения температуры грунта, коэффициентов температупроводностей и теплообмена путем идентификации аналитического решения с данными натурных наблюдений. Такие задачи для практики являются важными так как эти коэффициенты определяются экспериментально в лабораторных условиях с определенными погрешностями.

Объект исследования:

процесс таяния мерзлого грунта под основанием хвостохранилища, расположенная в условиях вечной мерзлоты.

построение аналитических решений математических моделей процесса переноса тепла в грунте под влиянием климатических и техногенных факторов.

Предметом исследования является разработка аналитико-численного подхода к решению задач таяния мерзлого грунта, позволяющее эффективно решать задачи по определению температуры грунта, коэффициентов температуропроводностей и теплообмена.

В четвертой главе рассматривается математическая модель таяния мерзлого грунта в отличие от математической модели, рассмотренной в третьей главе, где процесс таяния мерзлого грунта моделируется отдельно для талой зоны в виде начально-краевой задачи и отдельно для мерзлой зоны

Задача 4.1Методом идентификации аналитического решения математической модели теплопереноса определить коэффициенты температуропроводностей мерзлых и талых грунтов, а также значения температуры грунта, используя данные натурных наблюдений температуры грунта. В качестве примера рассмотрены данные наблюдения температуры в скважине в районе Кумтор на уровне 3800м. глубиной 30м. (ВН93-12 от 23 июня 1993 г.)

Методика решения. Разработан аналитико-численный подход, основанная на сочетании аналитического метода с методом конечных элементов (МКЭ). Сущность которого заключается в том, что приближенное решение математической модели строится не с помощью произвольных базисных функций как в МКЭ, а используются линейно-независимые частные решения уравнения теплопроводности. В результате получается аналитическое решение уравнении теплопроводности, удовлетворяющее начально-краевым условиям задачи для одного элемента. С помощью построенного аналитической решения, из начального условия задачи, определяется коэффициент температуропроводности, как решение трансцендентного уравнения.

Математическая модель процесса переноса тепла в талых и в мерзлых грунтах в одномерной постановке описывается следующим образом (Фельдман…,Томирдиаро…)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T_T}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2},\ 0 \le x \le h \\ \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2},\ h \le x \le L \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

$$t = 0; \quad x \in [0, h]; \quad T_T = f_1(x); \qquad x \in [h, L],\ T_M = f_2(x). \qquad (2)$$

$$x=0,\ T_т = T_в,; \quad x=h, \quad T_т = T_м = T_0;\ x=L, \quad T_м = T_1. \qquad (3)$$

где h – глубина таяния;L – область мерзлого грунта за которой начинается вечная мерзлота; соответственно - T_0 , T_1, $T_в$температура таяния мерзлого грунта, температура вечной мерзлоты, температура окружающей среды; соответственно -$f_1(x)$, $f_2(x)$ начальные условия для талой и мерзлой зоны, a_T,a_Mкоэффициенты температуропроводности талого и мерзлого грунта.

Неизвестная подвижная граница таяния мерзлого грунта определяется через условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта уравнением Стефана:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x}\right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x}\right]_{x=h} = q_0 w \frac{\partial h}{\partial t}, \qquad (4)$$

где $Т_т$ – температура зоны талого грунта; $Т_м$ - температура зоны мерзлого грунта. Для упрощения задачи считается, что температура воды и грунта на основание пруда при долгосрочном прогнозировании считается одинаковыми, $\lambda_Т,\lambda_М$ – коэффициенты теплопроводности талого и мерзлого грунта; w - количество льда в грунте; q_0 - теплота плавления льда.

Для построения аналитико-численного решения данной задачи (1) – (4) согласно идее МКЭ в качестве базисных функций выбирается линейно-независимые частные решения уравнении теплопереноса. Вид частного решения выбирается не произвольно, а так, чтобы она соответствовала физике процесса, т.е. по глубине температура грунта убывает, а по времени периодически изменяется

$$T_1(x,t,\mathrm{a}) = e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x}\cos(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x\text{-}4\pi t)$$

$$,\mathrm{T}_2(x,t,\mathrm{a}) = e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x}\sin(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x\text{-}4\pi t) \qquad (5)$$

Рассматриваемая область разбивается на конечные элементы согласно температурного режима грунта, т.е, где изменение температуры происходить быстрее, разбивается на мелкие элементы, а где изменение температуры происходить медленнее, разбивается на крупные элементы. В каждом элементе аналитическое решение строится по аналогии МКЭ следующим образом

$$\mathrm{Т_Т}(x,t,a) = N_i^1(x,t,a) * T_в + N_j^1(x,t,a) * T_0,$$
$$\mathrm{Т_м}(x,t,a) = N_i^2(x,t,a) * T_0 + N_j^2(x,t,a) * T_1, \qquad (6)$$

где $$N_i^k(x,ta) = \frac{T_2(x_j,t,a)*T_1(x,t,a)-T_2(x\ \ ,t,a)*T_1(x_j,t,a)}{T_2(x_j,t,a)*T_1(x_j,t,a)-T_2(x_i,t,a)*T_1(x_j,t,a)}\ ,$$
$$N_j^k(x,ta) = \frac{T_2(x\ \ ,t,a)*T_1(x_i,t,a)-T_2(x_i,t,a)*T_1(x\ \ ,t,a)}{T_2(x_j,t,a)*T_1(x_j,t,a)-T_2(x_i,t,a)*T_1(x_j,t,a)}\,. \qquad (7)$$

аналоги функции формы МКЭ, k – номер элемента. Коэффициенты температуропроводности «a» каждого элемента находятся как решение трансцентдентного уравнения (6), удовлетворяя начальному условию (2). Для нахождения поля температуры грунта в любое другое время, здесь получается не решением системы линейных алгебраических уравнений как в МКЭ, а находится из условия сшивания решений между конечными элементами области. В качестве условие сшивания в МКЭ используются условие непрерывность теплопереноса. В данной работе в качестве условия сшивания рассмотрено условие теплообмена между элементами области т.е. конвективный теплоперенос. Трудность такого подхода заключалась в неизвестности коэффициента теплообмена между окружающей средой и грунтом на дневной поверхности, а также аналоги коэффициента теплообмена между разнородными грунтами т.е. между элементами области. Коэффициенты теплообмена на стыке элементов будут разными и они зависят от величины тепловых потоков, идущих с разных сторон элемента. Используя начальное условие и аналитические решения для температуры из уравнения граничного условия третьего рода т.е. из условий теплообмена находятся коэффициенты теплообмена.

После определения коэффициентов температуропроводностей и теплообмена, температурное поле грунта для последующих времен находятся из условия разности температурных потоков между элементами области. Временной шаг берется не очень большим, а выбирается из физики процесса так, чтобы изменение температуры грунта была незначительной. Затем вычисленные значения температуры грунта в другом временном шаге, используя их как начальное условие и процесс определения коэффициентов температуропроводностей, теплообмена и температуры грунта повторяется заново по изложенному алгоритму. На стыках границ или элементов области ставится два условия теплообмена т.е. на основании пруда ставится два условия для теплового потока, идущий со стороны пруда и со стороны грунта

$$\frac{\partial T_в}{\partial х} = \gamma_1^-(Т_в - Т_1)\,, \quad x0. \qquad (8)$$

$$\frac{\partial T_г}{\partial х} = \gamma_1^+(Т \quad - Т_в), \;\; x = 0. \qquad (9)$$

Здесь условие (8) означает поток тепла, идущий со стороны окружающей среды или от пруда, а условие (9) поток тепла со стороны грунта основания хвостохранилища, $Т_в$ - температура воды пруда или температура окружающей среды; $Т_1 -$ температура грунта основания пруда или темпрература грунта на дневной поверхности; $Т_г = T^k(x,t,a) = N_i^k(x,t,a) * T_i + N_j^k(x,t,a) * T_j$, аналитическое решение температура грунта в k- ом элемента, с помощью которой находятся коэффициенты температуропродностей для каждого элемента; γ_1^-, γ_1^+ - аналогикоэффициента теплообмена между водой(окружающей среды) и грунтом, грунтом и водой (окружающей среды). Коэффициенты теплообмена находятся, используя начальные условия температуры и вычисленные коэффициенты температуропроводностей при $t_0 = 0$.

$$\gamma_1^- = \frac{\partial T_в/\partial х}{Т_в^{(0)} - Т_1^{(0)}}, \; \gamma_1^+ = \frac{\partial Т_г/\partial х}{Т_1^{(0)} - Т_в^{(0)}} \qquad (10)$$

Используя найденные значения коэффициентов теплообмена, находятся значения температуры в последующие моменты времени для первого элемента «1»

$$T_1 = \frac{(Т_в\gamma_1^- - \partial T_в/\partial х)}{\gamma_1^-}, \; T_2 = \frac{(-\frac{\gamma_1^+}{\gamma_1^-} * \frac{\partial T_в}{\partial х} - \frac{\partial N_i}{\partial x} * T_1)}{\partial N_j/\partial x} \qquad (11)$$

Температура грунта для последующих элементов находятся из условия сшивания, т.е. из уравнения, характеризирующее разность температурных потоков на стыках элементов. На стыке элементов «1» и «2» имеем уравнение

$$\frac{\partial Т_г^{(1)}}{\partial х} - \frac{\partial Т_г^{(2)}}{\partial х} = \gamma_2^-(Т_2 - Т_3) - \gamma_2^+(Т_2 - Т_1)$$

или

$$Т_3 = \frac{\gamma_2^- Т_2 - \gamma_2^+(Т_2 - Т_1) - \frac{\partial Т_г^{(1)}}{\partial х} + \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial x} * T_2}{\gamma_2^- - \partial N_j^{(2)}/\partial x}. \qquad (12)$$

Аналоги коэффициентов теплообмена γ_2^-, γ_2^+ находятся из условия теплообмена, используя начальное условие для температуры

$$\gamma_2^- = \frac{\partial Т_г^{(1)}/\partial х}{Т_2^{(0)} - Т_3^{(0)}}, \quad \gamma_2^+ = \frac{\partial Т_г^{(2)}/\partial х}{Т_2^{(0)} - Т_1^{(0)}} \qquad (13)$$

Повторяя этот алгоритм находятся последующие значения температуры грунта. Согласно изложенному алгоритму решена задача на основе данных наблюдения температуры в скважине (ВН93-12 от 23 июня 1993 г.) глубиной 30 м. определены коэффициенты температуропроводностей и значения температуры в разные моменты. Достоверность полученных результатов проверялась сравнением с данными наблюдений температуры этой скважины. Сравнение показано на рис.4.1 Глубина скважины подразделена на 17 элементов.

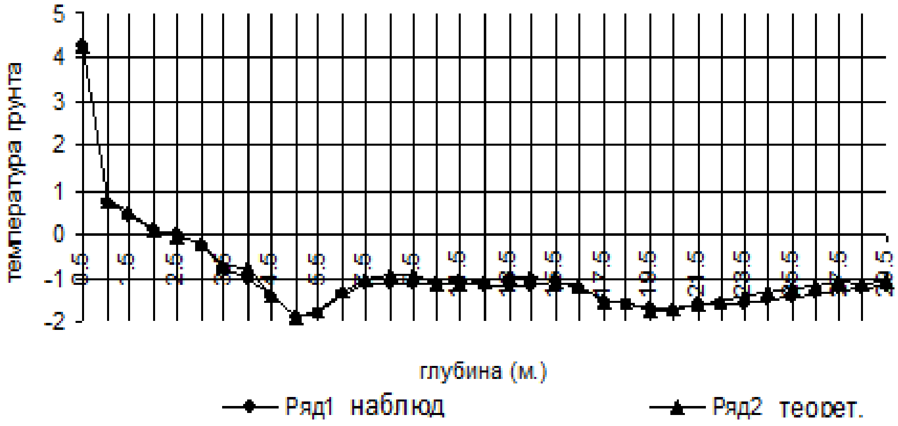


Рис. 4.1. Температура грунта.

В табл. 4.1приведены результаты определения коэффициента температуропроводности для талого (до 2м.) и мерзлого грунта (более 2 м.), как решения трансцендентных уравнений. В первой строке приведены номера элементов, во второй строке соответствующая глубина грунта, в третьей строке соответствующее значение коэффициента температуропроводности **a^2= k/cρ.** Мелкое разбиение проводилась в зоне активного слоя, где изменение температуры происходит заметнее и более крупное разбиение в зоне вечной мерзлоты, где изменение температуры происходит незначительно.

Таблица 4.1

Значения коэффициента температуропроводности

№	1	2	3	4	5
X (м)	0.5 - 1.5	1.5 - 2.5	2.5 - 3.5	3.5 - 4.5	4.5 - 6.5
A a^2	0.272 $*10^{-4}$	0.145 $*10^{-4}$	0.247$*10^{-4}$	0.107$*10^{-4}$	0.500$*10^{-4}$
№	6	7	8	9	10
X (м)	6.5 - 8.5	8.5 - 10. 5	10.5 - 12.5	12.5 - 14.5	14.5 - 16.5
a^2	0.143$*10^{-4}$	0.339$*10^{-4}$	0.107$*10^{-4}$	0.107$*10^{-4}$	0.164$*10^{-4}$
№	11	12	13	14	15
X (м)	16.5 - 18.5	18.5 - 20.5	20.5 - 22.5	22.5 - 24.5	24.5 - 26.5
A a^2	0.107$*10^{-4}$	0.209$*10^{-4}$	0.240$*10^{-4}$	0.196$*10^{-4}$	0.259$*10^{-4}$

Следует отметить одну особенность предложенного подхода. При получении результатов расчета не использовалась прямая информация о коэффициенте теплопроводности, а использовалась косвенная информация-данные наблюдения температуры. Такой подход в отличие от обычных численных методов, дискретизация области производится на произвольные размеры элементов в зависимости от физики строение среды и не проводится решение системы алгебраических уравнений, т.е. нет операций приближенного вычисления производных и интегралов, а они вычисляются аналитически. В таком случае избавляемся от вычислительных погрешностей.

Задача 4.2 Согласно изложенному алгоритму рассматривается задача определение коэффициентов температуропроводностей, теплообмена между элементами и значения температуры в разные моменты времени.

В качестве примера рассматривается данные другой наблюдательной скважины глубиной 20м. Исходными данными являются значения температуры грунта по глубине скважины, полученные из термисторов. Здесь область с размерностью 20м. разбивается неравномерно на 10 элементов. В табл.2.2 приведено значения коэффициентов температуропроводностей по глубинам, найденные как решения трансцендентного уравнения (6) с точностью $\varepsilon = 0.002$. Как видно из табл.2.2 значения коэффициентов температуропроводностей до глубины 7.53м. постоянны и равны 0.2765, а от 7.53м. до 20м. также постоянны и равны 4.402. В табл.2.3 приведены значения коэффициентов теплообмена на стыках элементов, вычисленные по формуле (13).

Таблица 4.2.

Значения коэффициентов температуропроводностей

x	4.53-5.53	5.53-6.53	6.53-7.53	7.53-8.53	8.53-9.53	9.53-11.53	11.53-14.53	14.53-19.53
a	0,2765501	0,27655	0,27655	4,40155	4,40155	4,40155	4,40155	4,40155

Таблица.4.3

Значения коэффициентов теплообмена на стыках элементов

x	4,53	5,53	6,53	7,53	8,53	9,53	11,53	14,53
M[k]	-0,5380083	-17,85291	9,311128	-100,3299	-54,04002	5,554611	17,77161	5,358785
M1[k]	-0,0721688	19,10033	-52,69399	25,18457	3,698798	-25,88969	-3,78001	-10,96662

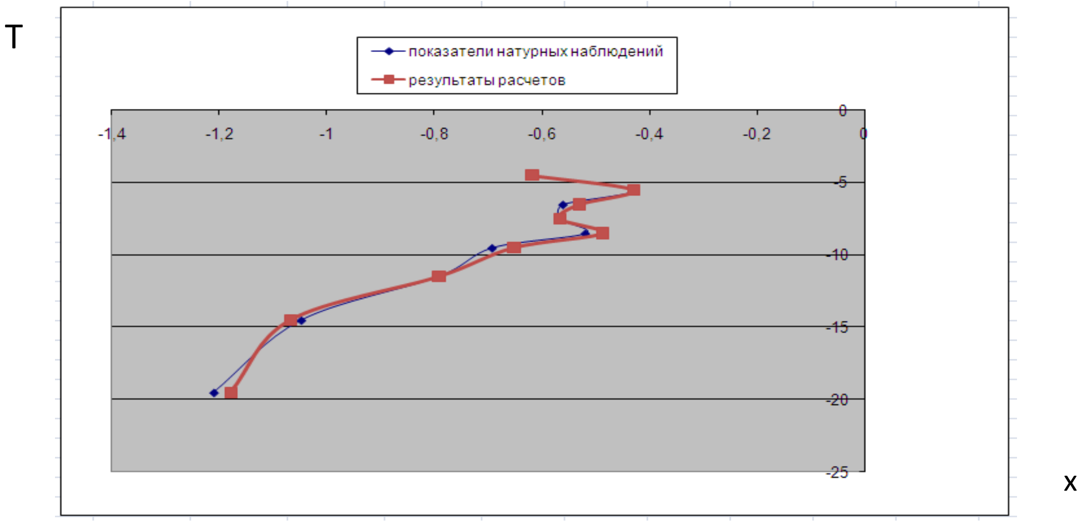


Рис.4.2 Температура грунта

Вторая строка табл.4.3 соответствует коэффициентам теплообмена, характеризующий поток тепла, идущий со стороны с дневной поверхности или с дна пруда, а третья строка соответствует коэффициентам теплообмена, характеризующий поток тепла идущей со стороны вечной мерзлоты. Используя найденные теплофизические параметры, определены значения температуры грунта в разные времена и в разных глубинах по формуле (12) и (13). На рис.4.2 показаны графики значения температуры, вычисленные теоретическим способом и данные из натурных наблюдений. Как видно из графика они почти совпадают. Это подтверждает правильность подхода и алгоритма определения температуры грунта, коэффициентов температуропроводностей и теплообмена.

Задача 4.3. Водохранилище наполняется отходами и цианистой водой золоторудной фабрики, расположенная в условиях вечной мерзлоты. Под влиянием плюсовой температуры воды начинается таяния основания пруда. Требуется определить коэффициент температуропроводностей и движение фронта таяния мерзлого грунта под основанием пруда, как решение начально-краевой задачи теплопереноса.

Методика решения. Область решениябудемрассматривать как состоящая из двух элементов независимо от размера области. Первый элемент будет зоной талого грунта. Второй элемент - зоной мерзлого грунта. Причем размеры обоих элементов изменятся с течением времени из-за таяния мерзлого грунта под влиянием температуры воды в пруде. Математическая модель процесса таяния мерзлого грунта будет (1)-(4). Построение аналитического решения такой математической модели рассматривалась в предыдущих задачах.

В начале заполнения водоема длина первого элемента (зона таяние) будет маленькой по сравнению со второй. С течением времени этот элемент будет увеличиваться т.е. будет происходит таяния мерзлого грунта под влиянием плюсовой температуры воды в пруде, а второй элемент будет уменьшатся. Подвижная точка (фронт таяния) находится численно, решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (4), методом Рунге-Кутта уравнении Стефана. Особенность данного подхода заключается в том, что все время используется три заданные постоянные температуры: на основании пруда поддерживается постоянная температура воды $T_в$, на границе таяния постоянная T_0 =+0.01C^0, которая двигается вместе с фронтом таяния и на конце глубины L за которой поддерживается постоянная минусовая температура (вечная мерзлота) T_1 = -1.86C^0. Используя данные температуры в каждые моменты времени как начальное условие на каждом элементе численно находятся коэффициенты температуропроводностей как решение транцендентного уравнения (6)

$$N_i^1(x,t,a) * T_в + N_j^1(x,t,a) * T_0 = T^*,$$
$$N_i^2(x,t,a) * T_0 + N_j^2(x,t,a) * T_1 = T^{**},$$

где T^*, T^{**} средние значения температуры в середине каждого элемента.

Результаты исследований. Данный алгоритм апробирован на конкретном примере, предполагая температуру воды на дне пруде хвостохранилища постоянной равной +4C^0, +6C^0, +8C^0, +10C^0 на период одного года произведены расчеты согласноизложенного алгоритма. Результаты численного эксперимента приведены на рис.2.3. Как видно при температуре воды +4C^0 в течении года глубина таяния достигает 3,65м., а при +6C^0 достигает 4,48м.

Полученные результаты согласуются с данными полученными в работах (Назаров Л.А., Назарова Л.А.(2015),Востриков В.М.(2015), что подтверждает достоверность алгоритма реализации математической модели предложенным подходом.

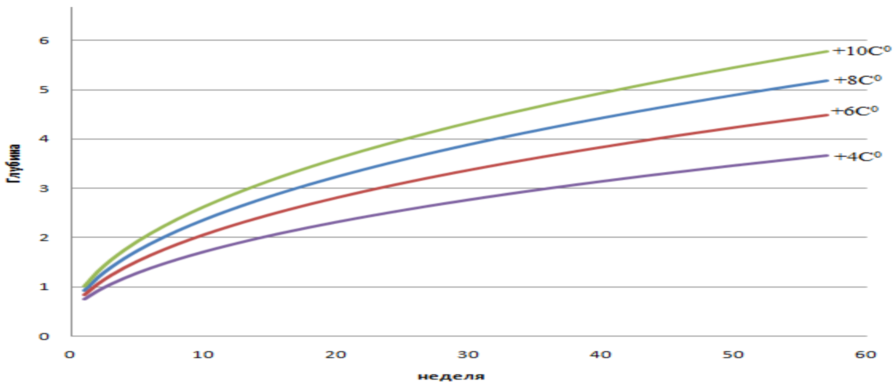


Рис. 4.3 Глубина таяния основание хвостохранилища в зависимости температуры воды.

Задача 4.4. Требуется определить глубину таяния мерзлого грунта, расположенные в условиях вечной мерзлоты под влиянием температуры окружающей среды за теплый период года с идентификацией коэффициента температуропроводности.

Задачи изучения таяния вечной мерзлоты под влиянием температуры окружающей среды является одним из важных вопросов в изучении устойчивости гидротехнических сооружений, расположенные в условиях вечной мерзлоты, а также в изучении вопросов потепления климата. В качестве примера рассматривается грунты, расположенные на уровне 4000м. в условиях вечной мерзлоты. Значения температуры окружающей среды использовались из данных наблюдений метеостанции Кумтора. Теплый период длится почти до пяти месяцев начиная с мая до сентября.

Методика решения. На основе математической модели теплопроводности в талых и в мерзлых грунтах (1)–(4)согласно вышеизложенному алгоритму определяется значения коэффициентов температуропроводностей из начального условия модели (2). Затем строится аналитическое решение задачи теплопроводности отдельно для зоны таяния и для мерзлой зоны (6). Используя эти аналитические решения, численно находятся глубина таяния мерзлого грунта под влиянием температуры окружающей среды из условия сопряжения температурных потоков на границе зоны талого и мерзлого грунта решением уравнение Стефана (4).

Результаты исследований. Данный алгоритм апробирован на примере, имитирующее условие Кумтора т.е. использована температура окружающей среды за теплый период 2011 года, грунт глубиной 20м. и за которой начинается вечная мерзлота, температура которой равна -1.86С^0, теплофизические характеристики λ_T, λ_M, w, q0 λT =1.21Вт/(м·К) , λM=1.54 Вт/(м·К), w=0.11, q0=650Вт/м². В результате расчета на каждом шаге времени путем идентификации аналитического решения с натурными данными определялись коэффициенты температуропроводностей, для талого и мерзлого грунта. Они почти не изменялись с течением времени и равнялись a=1.893 м^2/ч. Результаты расчета по определению глубины таяния вечной мерзлоты под влиянием температуры окружающей среды за теплый период года представлены на рис. 4.4

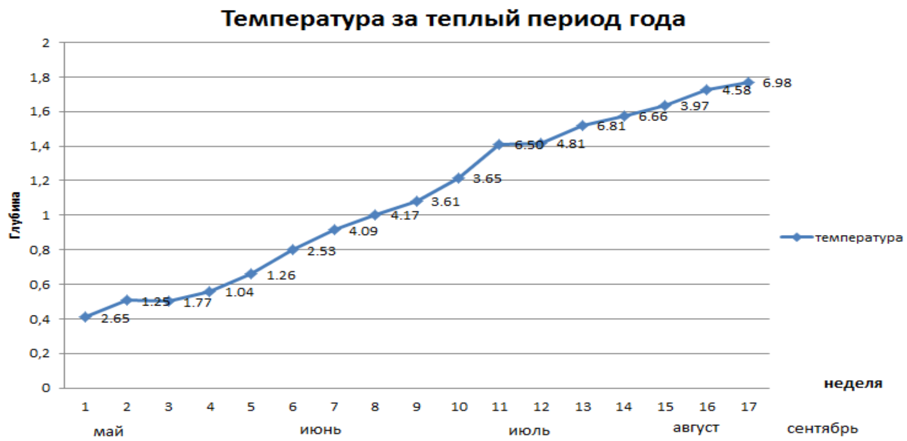


Рис. 4.4. Глубина таяние вечной мерзлоты за теплый период года.

Как видно из рис.4.4 глубина таяния в течении 5 месяцев с мая по сентябрь месяцы глубина таяния мерзлого грунта достигает до 1.8м. Натурные наблюдения за глубиной таяния на территории Кумтора колеблется в пределах 1.78 м. до 2.6 м., что подтверждает достоверность полученных результатов, а также предложенного подхода.

Задача 4.5 Рассматривается процесс таяние мерзлого грунта под основанием водоема глубиной **H** под влиянием фильтрации и температуры воды. Температурно-фильтрационный процесс под основанием водоема рассматривался как одномерный процесс.

Математическая модель. Считая, что температура грунта и температура фильтрующейся воды одинаковыми, т.е. принимается модель Фурье-Кирхгофа (Фельдман…Томиардо..). В зоне талого грунта учитывается фильтрация воды из водоема, а в зоне мерзлого грунта фильтрация не учитывается. Математическая модель такого процесса имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T_\text{Т}}{\partial t} = a_T \frac{\partial^2 T_\text{Т}}{\partial x^2} - v\frac{\partial T_T}{\partial x}, 0 \le x \le h. \qquad (4.5.1)\\ &\frac{\partial T_M}{\partial t} = a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \le x \le L \qquad (4.5.2)\end{aligned}\right\}$$

Начально-граничные условия имеют вид:

t = 0; x ∈ $[0, L]$; $T_М = f_1(x)$.
x=0, $T_т = T_в$,
x=h, $T_т = T_м = T_0$

x=L, $T_м = T_1$, (4.5.3)

где соответственно – $T_в$, T_0, T_1 температура воды в пруде, температура таяния мерзлого грунта и температура вечной мерзлоты. Условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта описывается уравнением:

$$\lambda_T\left[\frac{\partial T_T}{\partial x}\right]_{x=h} - \lambda_M\left[\frac{\partial T_M}{\partial x}\right]_{x=h} = q_0 w\gamma\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (4.5.4)$$

где $T_т$ – температура зоны талого грунта, $T_м$ - температура мерзлого грунта, являющиеся решением начально-краевой задачи (4.5.1) - (4.5.2); $T_п$ - температура дна пруда; $a_т$, $a_м$, $\lambda_т$, $\lambda_м$ - коэффициенты температуропроводности и теплопроводности грунта в талых и мерзлых грунтах; h - глубина таяния; w - количество льда в грунте; q_0 - теплота плавления льда, γ - удельный вес грунта, v – скорость фильтрации воды из водоема.

Методика решения. Строится аналитико-численное решение начально-краевой задачи (4.5.1)-(4.5.3), удовлетворяющее начальным и граничным условиям задачи отдельно для талой зоны и для мерзлой зоны. В качестве базисных функций для талой зоны используются линейно-независимые частные решения уравнения теплопроводности (4.5.1), а для зоны мерзлого грунта уравнении (3.5.2). Для построение аналитического решения для талой зоны с учетом фильтрации из водоема используется преобразование вида

$$T(x,t,a) = e^{\frac{v(x-vt)}{2a}} U(x,t,a) \qquad (4.5.5)$$

которое преобразует исходное уравнение к виду

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad (4.5.6)$$

где *U(x,t,a)* – новая неизвестная функция. Она находится как решение соответствующей начально-краевой задачи через преобразование (4.5.5), a–коэффициент температуропроводности. Тогда аналитическое решение начально-краевой задачи (4.5.1)-(4.5.3) запишется

$$T_T(x,t,a) = e^{\frac{v(x-vt)}{2a}}\left(N_i(x,t,a)U_i + N_j(x,t,a)U_j\right), \qquad (4.5.7)$$

где $U_i = T_i e^{\frac{-v_i(x_i - v_i t)}{2a}}$, $U_j = T_j e^{\frac{-v_j(x_j - v_j t)}{2a}}$

Начальная область мерзлого грунта длиной L разбивается на два элемента. Первый элемент начинается от дневной поверхности до фронта таяния, которая является неизвестной и подвижной. Второй элемент начинается от фронта таяния до вечной мерзлоты глубины L вкоторой отсутствует фильтрация воды. С течением времени размеры элементов будут изменятся т.е. происходят таяние мерзлого грунта под влиянием температуры и фильтрации воды из водоеме. Подвижная граница (фронт таяния) находится численно решением обыкновенного дифференциального уравнении Стефана (4.5.4) методом Рунге-Кутта. Шаг по времени принималась равной одной сутки. Расчеты проводились на период одного года. Температура на дне водоема поддерживается постоянной равной температуры воды, на фронте таяния - постоянная температура равной $+0.01C^0$ (температура плавления льда), которая двигается вместе с фронтом таяния и на конце глубины L поддерживается постоянная минусовая температура (вечная мерзлота) $-1.86C^0$ Используя данные температуры в каждые моменты времени на каждом элементе численно находятся коэффициенты температуропроводности как решение трансцендентных уравнений

$$N_i^{(2)}(x,t,b) * T_\text{в} + N_j^{(2)}(x,t,b) * T_0 = T^*,$$

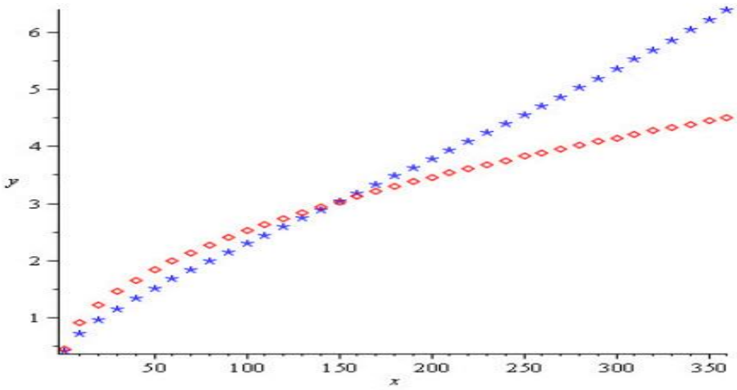
$$e^{\frac{v(x-vt)}{2a}}(N_i^{(1)}(x,t,a) * U_0 + N_j^{(1)}(x,t,a) * U_1) = T^{**},$$

где T^*, T^{**} средние значения температуры в середине каждого элемента.

Для иллюстрации влияния фильтрации воды из водоема на глубину таяния основание пруда рассмотрено различные варианты решение задачи: без учета и с учетом фильтрации из водоема.

Вариант 1. Процесс протаивания под основанием водоема рассматривается без учета фильтрации воды из водоема т.е. уровень воды в водоеме не учитывалась, а учитывалась только ее температура. Исходные данные считались равными. $\lambda_\text{Т} = 1.24,\ \lambda_\text{М} = 1.54$. $L = 21m$. Температура воды на дне водоема считалась равной $+6^0$C. Результаты показывают, что в течении одного года глубина протаивания достигает 4.51m.

Вариант 2. Процесс протаивание под основанием водоема рассматривается с учетом глубины водоема равной H=8m. и фильтрации воды из водоема. Коэффициент фильтрации считалась равным kf=0.0312, пористость mp=0.22. Скорость фильтрации вычислялась по формуле Дарси. В этом случае глубина протаивание в течении года достигла до 6.45м. График результатов расчета приведены на рис.4.5.1.



* - глубина водоема 8м.

◇ - без учета фильтрации

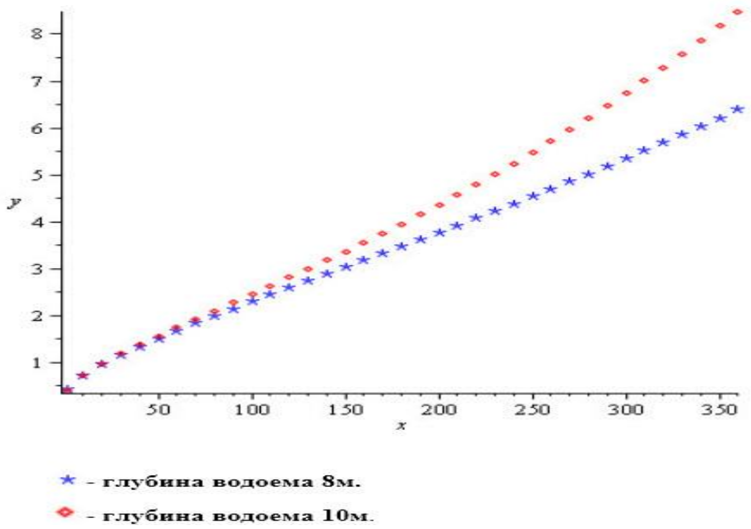


Рис. 4.5.1 Глубина таяния основание хвостохранилищы в зависимости от уровня воды в пруде.

Вариант 3. Рассматривается этот же случай, но глубина воды водоема на два метра больше, т.е. глубина считалась равной 10м. В этом случае скорость фильтрации будет больше чем в предыдущем варианте и глубина протаивание достигает за один год до 8.58м. Увеличение уровня воды в пруде на два метра с учетом фильтрации приводит к увеличению зоны таяния мерзлого грунта на 2.13м.

Из вычислительного эксперимента следует, что глубина протаивания под основанием водоема значительно зависит от уровня воды в пруде или от скорости фильтрации воды из водоема т.е. чем выше уровень воды в водоеме, тем больше размеры зоны таяния мерзлого грунта под основанием. При эксплуатации хвостохранилища и в целях экологической безопасности окружающей среды следует учесть во внимание уровень воды в водоеме в случае фильтрации под основанием хвостохранилища.

Задача 4.6 Рассматривается математическая модель таяния мерзлого грунта в отличие от математической модели, рассмотренной в третьей главе, где процесс таяния мерзлого грунта моделируется отдельно для талой зоны в виде начально-краевой задачи и отдельно для мерзлой зоны в виде (1) - (3). Неизвестная подвижная граница находится как решение уравнение Стефана (4). В данной главе процесс таяния мерзлого грунта моделируется одним уравнением с начально-краевыми условиями. Неизвестная подвижная граница находится местоположением нулевой изотермы. Такой подход позволяет эффективно находить время перехода в стационарный режим, анализировать степень влияние начального и граничных условий на процесс таяния.

Постановка задачи. **Вариант 1.** Процесс таяния мерзлого грунта рассматривается как задача переноса тепла в одной области под влиянием изменения вида граничного и начального условия. Фронт таяния находится местоположением нулевой изотермы. Математически задача формулируется следующими уравнениями в частных производных:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \mathrm{a}^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{L}, \ \mathrm{t} > 0 \qquad (4.6.1)$$

и граничными условиями

$$\mathrm{T}(0,\mathrm{t}) = \mathrm{T}_1, \quad \mathrm{T}(\mathrm{L},\mathrm{t}) = \mathrm{T}_2 \qquad (4.6.2)$$

Начальное условие температуры грунта под основанием строится на основе данных наблюдений.

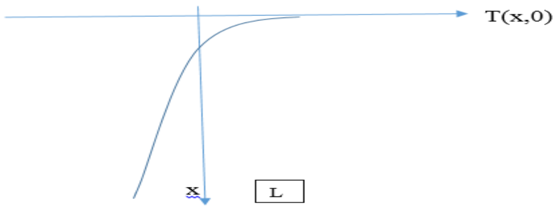


Рис.4.6.1. Начальное условие температуры

Аналитически начальное условие аппроксимировалось в виде одной ветви параболы

$$T(x,0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c \qquad (4.6.3)$$

Постоянные коэффициенты a, b, c – определяются из данных наблюдений температуры грунта методом наименьших квадратов.

Аналитическое решение задачи строится в виде двух слагаемых

$$T(x,t) = T_{CT}(x) + T_{HC}(x,t) \qquad (4.6.4)$$

где $T_{ст}$(x) - стационарная часть решения, которая строится на основе неоднородных граничных условий, $T_{нс}$(x,t) – нестационарная часть решения. Она строится на основе начального и однородных граничных условий и имеют вид:

$$T_{ст}(X) = Ax + B = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1, \quad T_{нс}(X,t) = \sum_i^n b_n e^{-\frac{\pi n^2}{L} a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

$$b_n = \frac{2a}{L}\left[-\frac{L^3}{\pi n}(-1)^n + 2\frac{L^3}{\pi n}((-1)^n - 1)\right] + \frac{2}{L}(b - A)\left[-\frac{L^2}{\pi n}(-1)^n - 1\right].$$

$$\overline{\varphi(x)} = ax^2 + bx + c - (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$$

Аналитическое решение данной краевой задачи удовлетворяющие начально-краевым условиям запишется

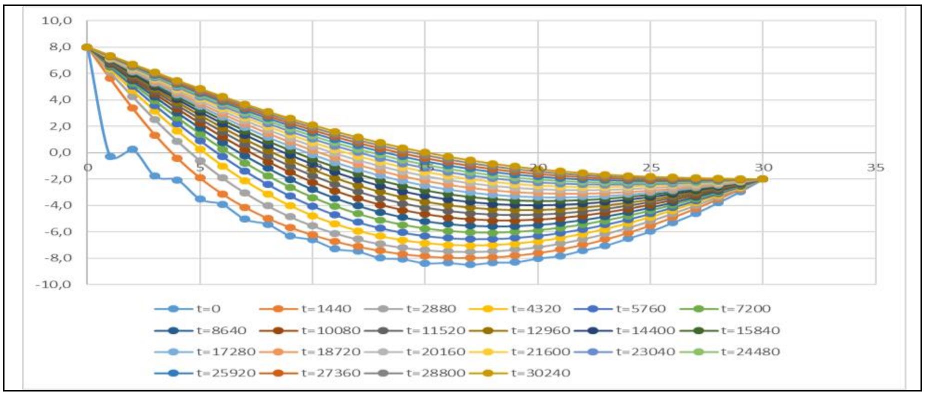
$$T(x,t) = T_{cm}(x) \ + (x,t) \ = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1 + \sum_i^n b_n e^{-\left(\frac{\pi * i}{L}\right)^2 a^2 t} \ \sin(\frac{\pi * i}{L} x) \qquad (4.6.5)$$

С помощью аналитического решения (4.6.5) математической модели (4.6.1) - (4.6.3) рассмотрены следующие задачи:

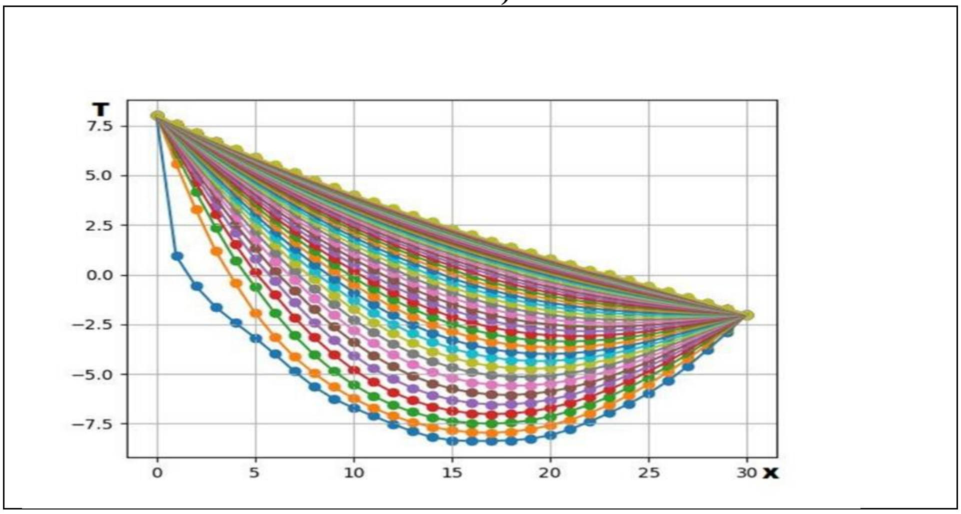
ЗАДАЧА 4.7 Начальное условие температуры грунта под основанием водоема имели значение в точках 1. x_1=0m., T_1^0=+2^{0}C. 2. x_2=1.7m., T_0^0=0^{0}C. 3. x_3=L= 30m, T_2^0 = -2^{0}C. Грунт под основанием водоема считается песчанником, коэффициент температуропроводности, которого равен 0.004283^2 м^2/час. Затем водоем заполняется водой, температура которого равна T_1= +8^{0}C. На глубине L = 30 m. находится вечная мерзлота, температура которой равна T_2 = -2^{0}C. Требуется определить, через которое время процесс таяния мерзлого грунта остановится и перейдет в стационарный режим, а также определить предельную глубину таяния мерзлого грунта за это время. Для решения данной задачи из условия сходимости ряда (4.6.5) с точностью 0.0003 находится количество членов и она равнялась n = 25. Начальное условие аппроксимировалось одной ветвью параболы с помощью заданных значений температуры в трех точках

φ(x) = 0.036859737x^2-1.2391325435x+2

Результаты расчета, проведенные с помощью аналитического решения (4.6.5), приведены на рис.4.6.2 а), б). На рис. 4.6.2 а) показано, когда процесс таяния еще не установился за 3.5 года и за это время глубина таяния достигла 15 метров.



а)



б)

Рис.4.6.2. Значения температуры грунта под основанием водоема в различные моменты времени

Из графика на рис. 4.6.2. б) видно, что для песчаника теплоперенос устанавливается после 70080 часов, что примерно соответствует 8.06 годам. За это время процесс таяния доходит до глубины 23.2 метра. Это указывает на то, что нестационарный процесс переходит к стационарному процессу примерно через 8.06 лет и затем не изменяется, что соответствует физическим свойствам процесса.

Затем приводится численный анализ решений, позволяющие определять степень влияния на глубину таяния мерзлого грунта температуры воды в пруде. На Рис.4.2 показаны результаты расчета для случая, когда температура воды в водоеме $+6^0$C. На Рис. 4.3 показаны результаты расчета, когда температура воды в водоеме равнялась $+10^0$C. Как видно из результатов расчета за время, равное 30240 часов или примерно 3.5 года, глубина таяния при температуре $+6^0$C доходит до 13 метров, при $+8^0$C доходит до 15м., при $+10^0$C доходит до 17 метров. Отсюда следует, что изменение температуры воды на два градуса влечет изменение глубины таяния на 2 метра за 3.5 года.

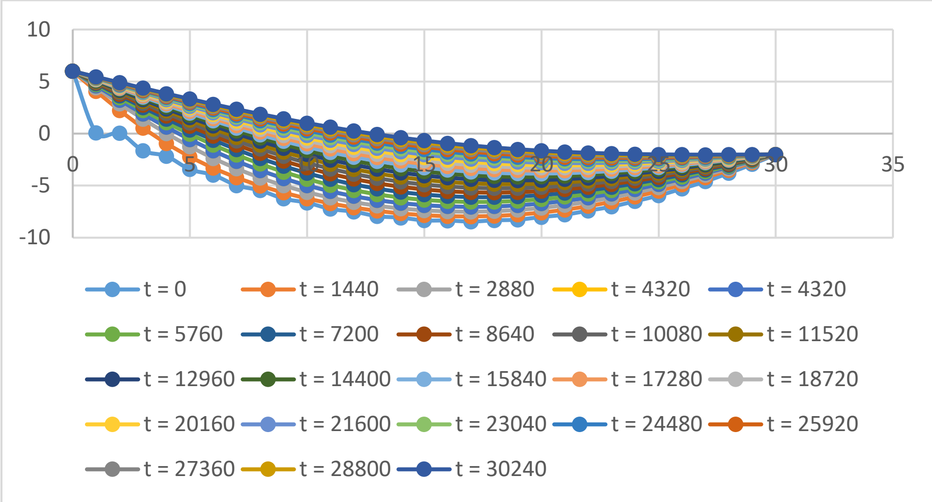


Рис.4.6.3 Значения температуры в разные моменты времени по глубине

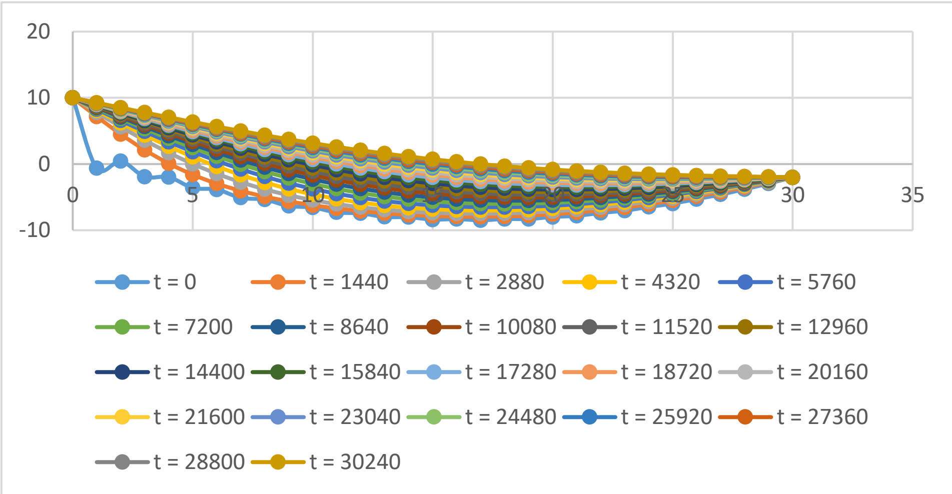


Рис.4.6.4 Значения температуры в разные моменты времени по глубине

В следующей задаче рассматривается влияние изменения вида граничного условия на процесс таяния мерзлого грунта. На нижней границе ставится условие теплообмена т.е., граничное условие третьего рода, характеризующее холодный поток, идущий со стороны вечной мерзлоты.

Задача 4.7 Математическая модель такой задачи имеет вид:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \mathrm{a}^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{L}, \ \ \mathrm{t} > 0 \qquad (4.7.1)$$

$$\begin{cases} T(0,t) = g_1(t) \\ T_x(L,t) + hT(L,t) = g_2(t) \end{cases} \qquad (4.7.2)$$

$$T(x,0) = \varphi(x),$$

где $g_1(t)$, $g_2(t)$ - заданные значения температуры на концах области.

Аналитическое решение строится аналогично как в предыдущем случае в виде двух слагаемых.

$$T(x,t) = S(x,t) + U(x,t) = A(t)\left(1 - \frac{x}{L}\right) + B(t)\left(\frac{x}{L}\right) + U(x,t), \qquad (4.7.3)$$

где $A(t)$,$B(t)$ находятся из граничных условий

$$A(t) = T_в, \quad B(t) = \frac{T_в + LhT^м_{гр}}{Lh+1} \qquad (4.7.4)$$

Неизвестное слагаемое $U(x,t)$ строится как решение неоднородного уравнения с однородными граничными условиями

$$U_t(x,t) = a^2 U_{xx} - S_t(x,t) \qquad (4.7.5)$$

$$U(0,t) = 0,$$

$$U_x(L,t) + hU(L,t) = 0 \qquad (4.7.6)$$

и начальным условием вида

$$U(x,0) = \varphi(x) - S(x,0) =$$

$$= ax^2 + bx + c - T_в\left(1 - \frac{x}{L}\right) - \frac{T_в + LhT_{гр}}{Lh+1}\left(\frac{x}{L}\right) \qquad (4.7.7)$$

Аналитическое решение математической модели (2.11) – (2.13) имеет вид

$$U(x,t) = \sum_i^n b_i \, e^{-\lambda_i{}^2 a^2 t} \, \sin(\lambda_i \, x),$$

где λ_i определяется как решение трансцендентного уравнения

$$tg(L * \lambda_i) = -\frac{\lambda_i}{h}, \qquad (4.7.8)$$

Общее аналитическое решение будет иметь вид

$$T(x,t) = T_в\left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{T_в + LhT_{гр}}{Lh+1}\left(\frac{x}{L}\right) + \sum_i^n b_i \, e^{-\lambda_i{}^2 a^2 t} \, \sin(\lambda_i \, x) \quad (4.7.9)$$

Результаты расчета когда температура воды в водоеме равна $+10^0$ С с учетом теплообмена на нижней границе приведено на Рис. 4.5

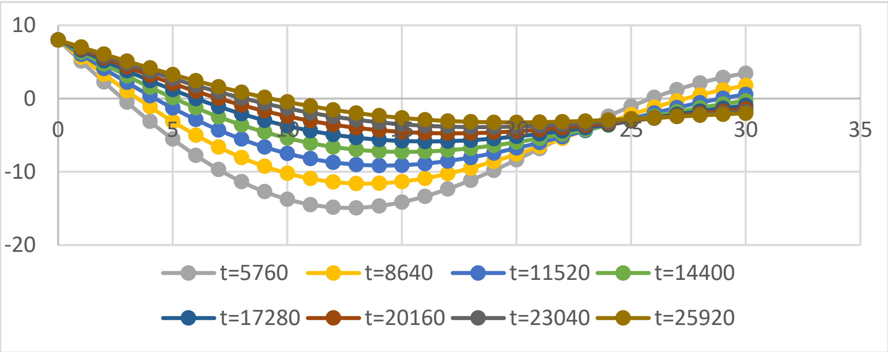


Рис. 4.7.1 Значения температуры грунта в разные моменты времени в случае, когда на нижней границе принимается граничное условие третьего рода

Точность результатов зависит от точности задания величины холодного потока, идущего со стороны вечной мерзлоты. Затруднительность знание точного значения коэффициента теплообмена позволяет получить приближенно-качественный результат. Как видно из графика, учет холодного потока из нижней границы значительно влияет на процесс таяния мерзлого грунта. По графику можно судить, что примерно за 25920 часов или за 3 года глубина таяния доходит до 10м. Тогда как при решении этой же задачи при фиксированном значении температуры на нижней границе равной -2^0С без учета теплообмена на нижней границе за 25920 часов или за 3 года глубина таяния доходила почти до 15 м. Отсюда следует, учет сильного холодного потока, идущего со стороны вечной мерзлоты значительно влияет на глубину таяния мерзлого грунта, т.е., значительно уменьшается глубина таяния и время установления нестационарного процесса. Неизвестное значение коэффициента теплообмена на нижней границе, приводит к приближенным результатам. Поэтому при реальных расчетах рекомендуется применять граничное условие первого рода на нижней границе, когда задается фиксированное значение температуры грунта, т.к. она поддается измерению.

Задача 4.8 Математическая модель процесса таяния мерзлого грунта под основанием водоема с учетом теплообмена скелета грунта в зоне талого грунта, а в зоне мерзлого грунта не учитывается. Математическая модель такого процесса имеет вид:

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2} - \beta \mathrm{T}(x,t), \qquad (4.8.1)$$

здесь β – коэффициент теплообмена. В зоне талого грунта, где $T(x,t) \geq 0$, $\beta \neq 0$ и в зоне мерзлого грунта, где $T(x,t) < 0$, $\beta = 0$. Граничные условия имеют вид

$$\mathrm{T}(0,t) = T_1;$$
$$\mathrm{T}(L,t) = T_2; \qquad (4.8.2)$$

Начальное условие данного процесса принимается аналогично предыдущему варианту задачи

$$\mathrm{T}(x,0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c; \qquad (4.8.3)$$

Аналитическое решение данной математической модели строится аналогично как в предыдущих случаях.

$$\mathrm{T}(x,t) = S(x) + \omega(x,t); \qquad (4.8.4)$$

где $S(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$– стационарная часть решения, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям (3.18). $\omega(x,t)$– нестационарная часть решения. Оно строится как решение следующей начально - краевой задачи.

$$\omega_t = \alpha^2 \omega_{xx} - \beta(S(x) + \omega(x,t)) \qquad (4.9.5)$$
$$\omega(0,t) = 0, \omega(L,t) = 0 \qquad (4.10.6)$$
$$\omega(x,0) = ax^2 + bx + c - S(x) \qquad (4.11.7)$$

Решение данной задачи ищется в виде:

$$\omega(x,t) = \sum_{i=1}^{n} b_n(t) \sin\frac{\pi n}{L} x, \qquad (4.12.8)$$

где $b_n(t)$ – неизвестные коэффициенты разложения. Оно находится путем разложения в ряд Фурье стационарной части решения. Удовлетворяя начальному условию (4.11.7) получаем общее аналитическое решение(4.8.5)-(4.8.7)

$$\mathrm{T}(x,t) = S(x) + \omega(x,t) = \left[(T_2 - T_1)\frac{L}{L} + T_1 = T_2\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{2\beta}{\pi n}\frac{(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2(-1)^{\mathrm{n}})}{\left(\beta + \left(\frac{\pi n}{L}\alpha\right)^2\right)} + (A_i + C_i e^{\left((\frac{\pi i}{L}\alpha)^2 + \beta\right)t})\right] \sin\frac{\pi i}{L} x;$$

$$A_i = 2\beta(T_1 + 2.0)(-1)^i / ((\pi i / L)^3 (T_2 - T_1) + \beta),$$
$$C_i = (-2aL^2 - 2L\left(b - \left(T_2 - T_1\right)\right) / (\pi i(-1)^i + 4aL^2(\pi i). \qquad (4.8.8)$$

На Рис.3.6. показаны результаты расчета предыдущего примера, полученные аналитическим решением данной модели (4.8.8), учитывающая теплообмен в зоне талого грунта. Значение коэффициента теплообмена принималось очень маленьким (0.0000043), т.к., при долгосрочном процессе значения температуры грунта и воды почти уравняются. В этом случае теплообмен не будет происходить из-за одинаковой температуры разных сред. Как видно из графика процесс таяния под влиянием начального условия (4.8.3) и значения температуры воды в водоеме равной $+8^0$C с учетом теплообмена переходит из нестационарного процесса в стационарный процесс через 70080 часов или 8.06 лет и глубина таяния доходит до 23.20 м.

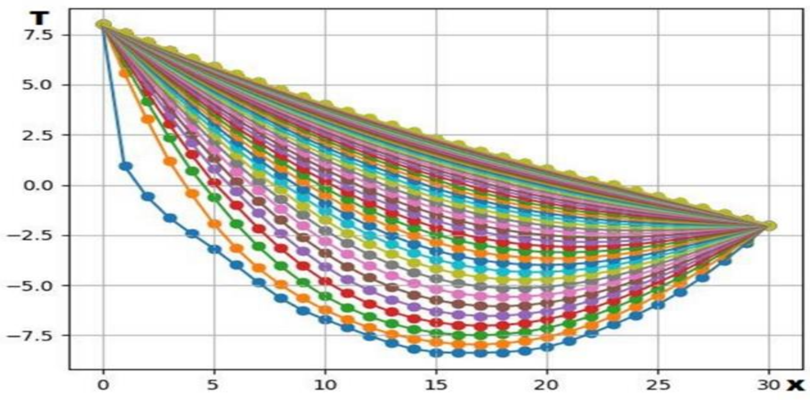


Рис.4.8.1 Ход изменения температуры грунта до установления процесса

На рис. 4.8.2 показано численное сравнение результатов математической модели с учетом и без учета теплообмена положения нулевой изотермы. Она находится как решение трансцендентного уравнения (4.8.8) при нулевом значении температуры грунта. Как видно из графика, положение нулевой изотермы постепенно устанавливается и переходит в неизменное состояние через 8.06 года при температуре воды в водоеме равной $+8^0$ C для грунта песчаника.

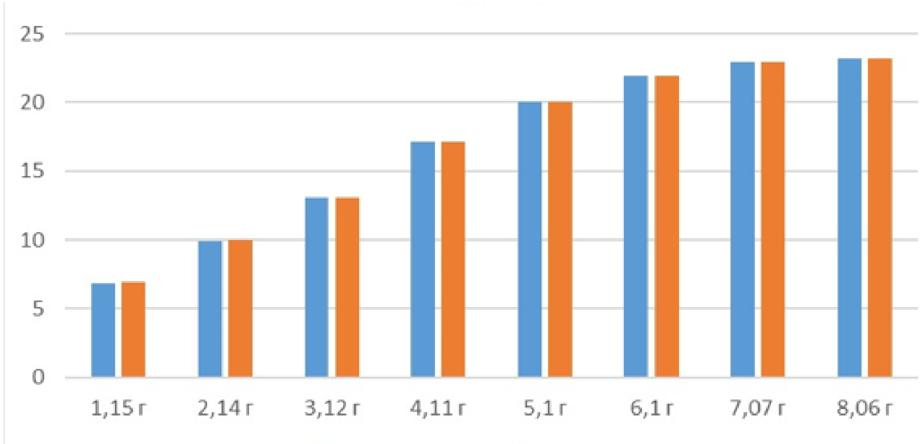


Рис.4.8.2 Положение нулевой изотермы с учетом и без учета теплообмена

Отсюда следует, что при долгосрочном прогнозировании процесса переноса тепла в мерзлых грунтах, процесс теплообмена между грунтом и талой водой можно пренебречь из-за уравнивания их температур. В таких случаях значение коэффициента теплообмена будет очень маленьким и влияние члена, характеризующего теплообмен в математической модели (4.8.1) - (4.8.3), можно пренебречь. Тогда при долгосрочном прогнозировании процесса переноса тепла в мерзлых грунтах можно использовать более простую математическую модель (4.8.1)-(4.8.3), в которой нет параметра теплообмена.

Задача 4.9. Здесь производится численный эксперимент на основе аналитического решения математической модели для выявления влияния или невлияния начального условия на глубину таяния мерзлого грунта под влиянием температуры воды в водоеме . Оно производится на основе анализа результатов расчета долгосрочного прогноза по определению глубины таяния. Математически оно производится формированием начальных условий, характеризующих начальное состояние среды перед началом эксплуатации сооружений, имитирующее зимнее, раннее весеннее и весеннее времена года. Схематически разные виды начального условия приведены на Рис.4.9.1 Для весеннего случая начальное состояние грунта на дневной поверхности считалось равным $+2^0$C, нулевое значение температуры грунта находилось на глубине 1.7 м., вечная мерзлота начинается с глубины 30м. и температура в этой точке равна -2^0C. Для зимнего случая начальная температура грунта на дневной поверхности считалась равной -3^0C. Грунт под основанием является песчанником с коэффициентом температуропроводности равным 0.0043^2 $м^2$ /час. Аналитические выражения начальных условий аппроксимировались одной ветвью параболы. Коэффициенты параболы определялись методом наименьших квадратов на базе 10 точек, в которых заданы значения температуры.

$$T(x,0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0.0369x^2 - 1.2392x + 2,0 \qquad (4.9.1)$$
$$T(x,0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0.01033x^2 - 0.3682x + 2.0 \qquad (4.9.2)$$
$$T(x,0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = -0.0084x^2 - 0.2392x - 1.9762 \qquad (4.9.3)$$

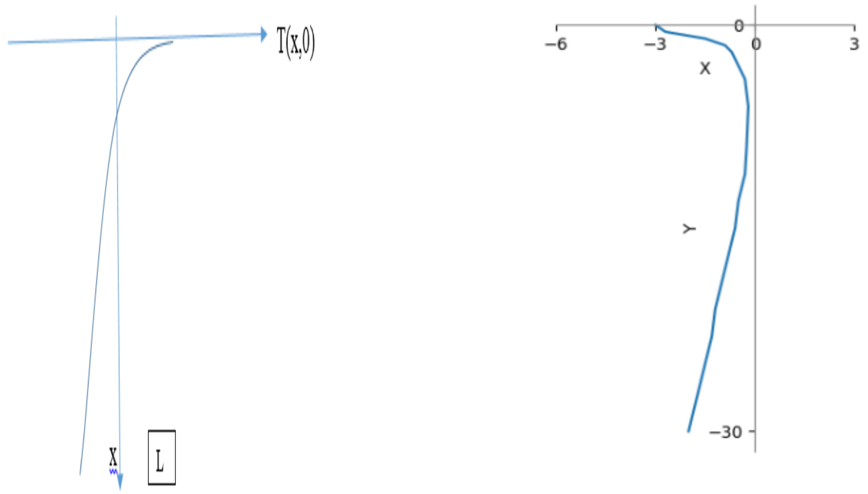


Рис.4.9.1 Виды начальных условий

Процесс переноса тепла под основанием водоема начинается при наполнении водоема водой температура, которой равна $+8^0$C. Согласно вышеизложенного алгоритма производятся прогнозные расчеты до установления нестационарного процесса переноса тепла в этой области результаты расчета приведены на Рис.4.9.2

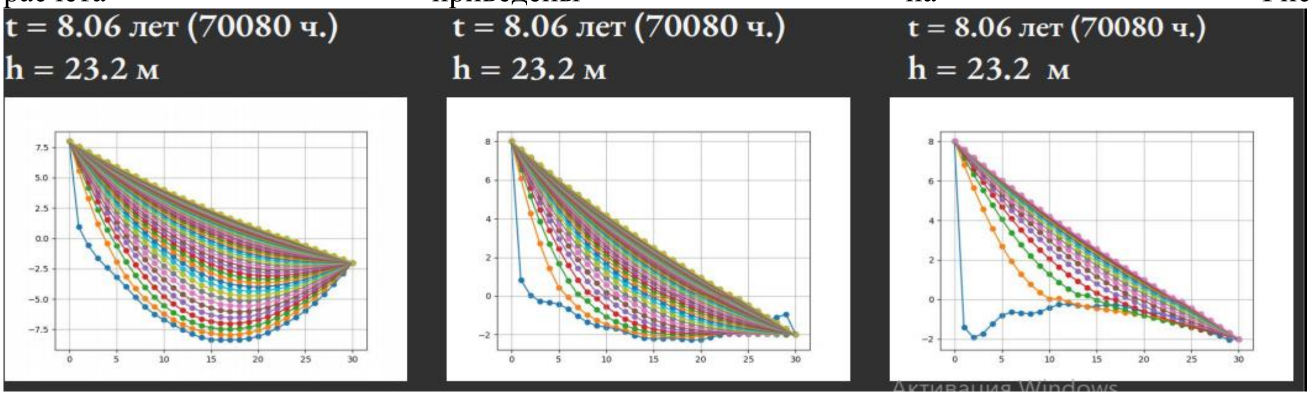


Рис. 4.9.2 Результаты прогнозных расчетов при разных видах начальных условий

Результаты расчета показывают, что при долгосрочном прогнозировании, нестационарный процесс переходит в стационарный процесс независимо от видов начальных условий в одно и то же время. Глубина таяния за это времени доходит до 23.2 м. Она определяется с местоположением нулевой изотермы как решение трансцендентного уравнения. Движение фронта таяния мерзлого грунта до стационарного процесса показано на Рис. 4.9.2

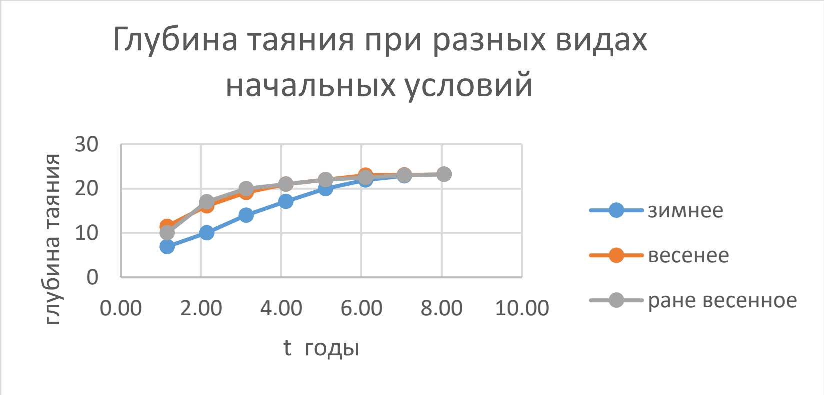


Рис. 4.9.3 Глубина таяния при разных видах начальных условий

Как видно из графика при долгосрочном прогнозировании глубина таяния не зависит от вида начального условия, а зависит от значения температуры воды в водоеме. Нестационарный процесс переноса тепла в мерзлом грунте переходит в стационарный процесс через 8.06 лет и глубина таяния доходит до 23.2м. при температуре воды равной $+8^0$C. Такое утверждение сделали ученые Галкин А.Ф, Курта И.В. (2020). Отсюда следует, что начало эксплуатации сооружений, расположенных в условиях вечной мерзлоты, можно начинать не только зимой, а в любое удобное время.

Задача 5 Здесь решение задачи таяния мерзлого грунта производится двумя разными математическими моделями и производится сравнение результатов. На основе анализа предлагается предложение о выборе модели. Сначала рассматривается модель теплопереноса отдельно в зоне талого и в зоне мерзлого грунта с учетом фазовых переходов между двумя зонами. Движение фронта таяния определяется из условия разности тепловых потоков идущих со стороны талого и мерзлого грунта, как решение задачи Стефана.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T_T}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2},\ 0 \le x \le h \\ \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \le x \le L \end{aligned}\right\}. \qquad (5.1)$$

с начальными

$t = 0;\quad x\in [0, h];\quad T_T = f_1(x),\ x\in[h,L],\ T_M = f_2(x).$ (5.2)

и граничными условиями:

$$x=0,\quad T_т = T_в,$$
$$x=h,\quad T_т = T_м = T_0$$
$$x=L,\quad T_м= T_1 \qquad (5.3)$$

где соответственно - $T_в$, T_0 ,T_1 температура воды в водоеме, температура таяния мерзлого грунта и температура вечной мерзлоты. Условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта описывается уравнением Стефана:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x}\right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x}\right]_{x=h} = q_0 w \frac{\partial h}{\partial t}, \qquad (5.4)$$

где $T_т$, $T_м$ – аналитическое решение начально-краевой задачи (5.1)-(5.3); a_T, a_M, λ_T; λ_M - коэффициенты температуропроводности, теплопроводности талого и мерзлого грунта; h - глубина таяния; w - количество льда в грунте; q_0 - теплота плавления льда. Начальные условия в каждой зоне принимается аналитически как в предыдущих задачах в виде одной ветви параболы.

Аналитическое решение математической модели в зоне талого и мерзлого грунта строится аналогично как и в предыдущих задачах и имеют вид:

$$T_m(x,t) = \frac{8}{h}x + 8 + \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-(\frac{\pi n \alpha}{L})^2 t} \sin\frac{\pi n}{L}x,$$

$$T_{\text{м}}(x,t) = \frac{2}{L-h}x + \frac{2h}{L-h} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-(\frac{\pi n \alpha}{L})^2 t} \sin\frac{\pi n}{L}x,$$

где коэффициенты разложения D_nряда Фурье. Глубина таяния определяется как решение обыкновенной дифференциальной уравнении Стефана (5.4) методом Рунге Кутта четвертого порядка. В качестве примера грунта под основанием водоема рассмотрена глина с физико-механическими характеристиками a_T =***0.003024*** м^2***/сут.,***a_M, =***0.01296***м^2***/сут.*** Результаты расчета уравнении Стефана приведены графически на рис. 7. Как видно из графика для грунта из глины процесс таяние переходит в стационарный режим через 7300 суток или 20.2 лет и глубина таяния доходит до 9.46м. Затем данная задача решена другой математической моделью (5.1)-(5.3), где глубина таяния находится как местоположения нулевой изотермы. Результаты расчета показаны на рис. 3.10

hм

Рис.5.1 Глубина таяния как решение задачи Стефана

Как видно из графика процесс таяния переходит в стационарное состояние через 7300сут.(20.2лет) и глубина таяния доходит до 8,53м. Результаты расчетов двух моделей показывают приблизительно одинаковые результаты. Разница результатов объясняются из-за неточности входных параметров как количество содержание льда, теплота плавления

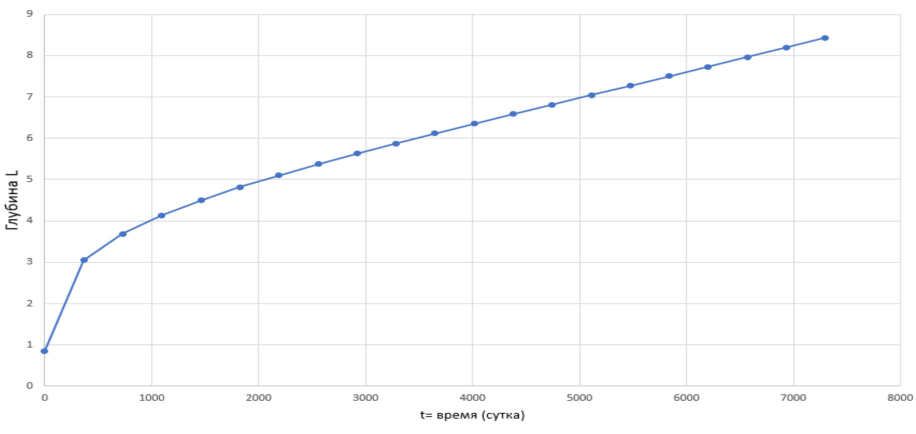


Рис.5.2 Глубина таяния как местоположение нулевой изотермы

По итогам анализа полученных решений одной задачи с разными математическими моделями сформулировано следующее предложение. Удобнее пользоватся моделью кондуктивного теплопереноса т.к. используется в качестве исходных данных кроме краевых и начального условия, только коэфициент температуропроводности. Известно, что чем больше содержатся параметры в математической модели, тем труднее реализовать из-за неизвестности или из-за значительной погрешности при определении их экспериментальным способом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Предложен аналитико-численный подход реализации математической модели теплопереноса в одномерной постановке.
2. Методика определения температуры грунта, коэффициентов температуропроводностей, теплообмена и глубины таяния с учетом фильтрации воды из водоема на основе аналитико-численного подхода.
3. Определении времени перехода в стационарный режим процесса таяния и предельной глубины таяния мерзлого грунта при заданной температуры воды в водоеме.
4. Установление о не влиянии начального условия на предельную глубину таяния на основе численного анализа при долгосрочном прогнозировании.
5. На основе анализа результатов двух разных математических моделей для одной задачи формируется предложение о выборе более простой математической модели.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Душенова У.Дж. Инфильтрация атмосферных осадков по наклонному склону /Джаманбаев М.Дж., Омуралиев С.Б// Известия КГТУ им.И.Раззакова №26, г.Бишкек, 2010.-С.205-208.https://elibrary.ru/item.asp?id=27165604

2. Душенова У.Дж. Определение глубины таяния мерзлого грунта под основанием пруда хвостохранилища/Джаманбаев М.Дж., Турсункулова З.С.// Известия КГТУ им.И.Раззакова №29, г.Бишкек, 2013.-С. 239-242.https://elibrary.ru/item.asp?id=29214773

3. Душенова У.Дж. Методика определения температуры, коэффициентов теплообмена грунта./Джаманбаев М.Дж., Турсункулова З.С.// Известия КГТУ им.И.Раззакова №29, г.Бишкек, 2013. -С.242-246.https://elibrary.ru/item.asp?id=29214774

4. Душенова У.Дж. Определение глубины таяния мерзлого грунта под основанием пруда водохранилища./Джаманбаев М.Дж., Турсункулова З.С.//Материалы научной конференции «Научные основы стратегии развития АПК и сельских территорий в условиях ВТОВолгГау г.Волгоград,2014.-С.328-331. https://elibrary.ru/item.asp?id=25566503

5. Душенова У.Дж. Влияние уровня воды на величину фильтрационного расхода и на процесс таяния под основанием водоема/ Известия КГТУ им. И. Раззакова, № 31. г.Бишкек, 2015. -С. 198-201.https://elibrary.ru/item.asp?id=26455471

6. Душенова У.Дж.Определение дальности смещения оползневой массы/Джаманбаев М.Дж., Омуралиев С.Б.// Известия КГТУ им.И.Раззакова,№4(48).г.Бишкек,2018.-С.173-179 https://elibrary.ru/item.asp?id=37167828

7. Душенова У.Дж. Оценка степени влияния природных факторов на промерзание грунта/Джаманбаев М.Дж., Шекеев К.Р.//Известия КГТУим.И.Раззакова№50.г.Бишкек,2019.-С.163-168 https://elibrary.ru/item.asp?id=39537304

8.ДушеноваУ.Дж. Вероятностно-статистический анализ бытового потребления электроэнергии города Каракол /Асанов А.К, Асиев А.Т.//Журнал “Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана” №6. г.Бишкек, 2022.-С.19-24 https://elibrary.ru/item.asp?id=49830020

9. ДушеноваУ.Дж. Определение периода (времени) не установившейся части процесса переноса тепла в мерзлых грунтах под влиянием заданной температуры./Джаманбаев М.Дж.// Журнал Научные исследования в Кыргызской Республике №1, г.Бишкек,2023. -С.19-24 https://elibrary.ru/item.asp?id=61182954

10. Душенова У.Дж. Аналитико-численное решение задачи протаивания мерзлого грунта с учетом теплообмена и изменения начального условия./Джаманбаев М.Дж., Кыштобаева Г.К.// Сборник статей “Перспективные задачи инженерной науки”.- г. Москва, 2023.- С.52-57 https://elibrary.ru/item.asp?id=50742458

11. Dushenova U. Analytical and numerical solution of the problem of thawing of frozen soil taking into account heat exchange and changes in the initial condition/Dzhamanbaev M., Kyzy, NargizaBazarkul., Tologonova A.//Conference ProceedingsScientific Conference on Modern Problems of Applied Science and Engineering, MPASE-Samarkand 2024. https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85212131911&origin=resultslist&sort=plf-f&src=s&sot=b&sdt=b&s=TITLE-ABS-KEY%28Analytical-numerical+method+for+solving+transport+processes+problems+based+on+the+finite+element+method+concept%29&sessionSearchId=8412cefe4d42c6bfaaeea16fa1e3937e

РЕЗЮМЕ

Диссертационной работы Душеновой Умут Джумаказыловны на тему: «Аналитико-численное решение задач теплопереноса»на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы»

Ключевые слова: Коэффициент температуропроводности, теплопроводность, мерзлый грунт, фронт таяния, температура, температурный режим, вечная мерзлота, глубина протаивания, хвостохранилище, грунт, основание хвостохранилища.

Объект исследования процесс таяния мерзлого грунта под основанием хвостохранилища, расположенная в условиях вечной мерзлоты.

Предметом исследования является Построение и анализ аналитических решений математических моделей процесса переноса тепла в грунте под влиянием климатических и техногенных факторов.

Целью исследования является создание эффективного метода к построению теплопереноса и на основе численного анализа решений, формировать выводы, предложения, рекомендации специалистам, инженерам и соответствующим организациям.

Методы исследования: в диссертационной работе использовались философские, общенаучные, теоретические, специальные (численное моделирование, многофакторный анализ).

Научная новизна полученных результатов работы исследования разработан численно аналитический подход к решению задач теплопереноса, основанный на идее МКЭ;

- предложена методика определение глубины таяния и идентификации коэффициента температуропроводности, как решение математической модели теплопереноса с использованием данных наблюдений температурыгрунта;
- построение аналитического решение математической модели таяние мерзлого грунта под основанием хвостохранилища и определение времени перехода к стационарному режиму и глубину таяние за это время;
- вывод о не влиянии начального условия на глубину таяние при долгосрочном прогнозе на основе численного эксперимента;
- анализ аналитических решений разных математических моделей процесса таяние мерзлого грунта и рекомендация выбора математической модели;

Область применения: научные положения, полученные результаты и разработанные методики имеют практическое и теоретическое значение, и могут служить для дальнейших исследований в данной области науки на общетеоретическом и практическом уровнях, сформулированные выводы и предложения могут быть использованы в нормативной документации и проектной деятельности в соответствующих предприятиях.

Дүйшөнова Умут Жумаказыевнанын 01.02.05 – суюктук, газ жана плазма механикасы адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты илимий даражасын алуу үчүн "Жылуулук берүү маселелерин аналитикалык жана сандык чечүү" темасында диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: Жылуулук диффузия коэффициенти, жылуулук өткөрүмдүүлүк, тоңгон жер, эрүү фронту, температура, температуралык режим, түбөлүк тоң; эрүү тереңдиги, калдыктарды сактоочу жай, топурак, калдыктарды сактоочу жайдын фундаменти.

Изилдөөнүн объектиси болуп түбөлүк тоң шартында жайгашкан калдык сактоочу жайдын астындагы тоңгон топурактын эрүү процесси саналат. Изилдөөнүн предмети климаттык жана техногендик факторлордун таасири астында кыртышта жылуулук өтүү процессинин математикалык моделдеринин аналитикалык чечимдерин куруу жана талдоо болуп саналат.

Диссертациянын максаты жылуулук өткөрүүнү куруунун эффективдүү ыкмасын түзүү жана чечимдерди сандык анализдөөнүн негизинде адистерге, инженерлерге жана тиешелүү уюмдарга корутундуларды, сунуштарды жана рекомендацияларды түзүү болуп саналат. Изилдөө методдору: диссертацияда философиялык, жалпы илимий, теориялык жана атайын (сандык моделдөө, көп варианттуу анализ) методдор колдонулган.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы - ЧЭЫ идеясынын негизинде жылуулук өткөрүмдүүлүк маселелерин чечүүгө сандык аналитикалык мамилени иштеп чыгуу;

- кыртыштын температурасына байкоо жүргүзүүнүн маалыматтарын пайдалануу менен жылуулук өткөрүүнүн математикалык моделинин чечими катары эрүү тереңдигин аныктоо жана жылуулуктун диффузиялык коэффициентин аныктоо методу сунушталды;
- калдыктарды сактоочу жайдын базасынын астындагы тоңгон кыртыштын эрүү процессинин математикалык моделинин аналитикалык чечүүсүн куруу жана стационардык режимге өтүү убактысын жана бул убакыттын ичинде эрүү тереңдигин аныктоо;
- сандык эксперименттин негизинде узак мөөнөттүү болжолдоодо эрүү тереңдигине баштапкы шарттын таасиринин жоктугу жөнүндө корутунду;
- тоңгон кыртыштын эрүү процессинин ар кандай математикалык моделдеринин аналитикалык чечимдерин талдоо жана математикалык моделди тандоо боюнча сунуштарды;

SUMMARY

Dissertation by Umut Dzhumakazylovna Dushenova on the topic: "Analytical and numerical solution of heat transfer problems" for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in specialty 01.02.05 - fluid, gas and plasma mechanics

Keywords: Thermal diffusivity coefficient; thermal conductivity, frozen soil, melting front, temperature, temperature regime, permafrost; thawing depth, tailings storage facility, soil, tailings storage facility base.

The object of the study is the process of thawing of frozen soil under the base of the tailings storage facility, located in permafrost conditions. The subject of the study is the construction and analysis of analytical solutions of mathematical models of the process of heat transfer in the soil under the influence of climatic and man-made factors.

The purpose of the dissertation is to create an effective method for constructing heat transfer and, based on numerical analysis of solutions, to form conclusions, proposals, recommendations for specialists, engineers and relevant organizations. Research methods: philosophical, general scientific, theoretical, special (numerical modeling, multivariate analysis) methods were used in the dissertation.

Scientific novelty of the study: a numerical analytical approach to solving heat transfer problems based on the idea of FEM was developed;

- a technique was proposed for determining the depth of thawing and identifying the thermal diffusivity coefficient as a solution to a mathematical model of heat transfer using soil temperature observation data;

- constructing an analytical solution to a mathematical model of frozen soil thawing under the base of the tailings storage facility and determining the time of transition to a steady-state mode and the depth of thawing during this time;

- a conclusion about the lack of influence of the initial condition on the depth of thawing in a long-term forecast based on a numerical experiment;

- analysis of analytical solutions of different mathematical models of the process of thawing of frozen soil and a recommendation for choosing a mathematical model;

Scope: scientific provisions, obtained results and developed methods have practical and theoretical significance and can serve for further research in this field of science at the general theoretical and practical levels, the formulated conclusions and proposals can be used in regulatory documentation and project activities in the relevant enterprises.