

**Институт математики Национальной академии наук
Кыргызской Республики**

Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына

Диссертационный совет Д 01.24.701

На правах рукописи
УДК 517.968

Бапа кызы Айнура

**Проекционно-итерационные методы исследования периодических решений
интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра**

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2025

Работа выполнена на кафедре математики и информационных технологий Иссык-Кульского государственного университета имени Касыма Тыныстанова.

Научный руководитель: **Алымбаев Асангул Темиркулович**, доктор физико-математических наук, доцент, и. о. профессора Института новых информационных технологий Кыргызского государственного университета имени И. Арабаева.

Официальные оппоненты: **Аблабеков Бактыбай Сапарбекович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына.

Эгембердиев Шайымбек Амантурович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры естественно математических дисциплин Института дополнительного профессионального образования имени М. Р. Рахимовой Кыргызского государственного университета имени И. Арабаева.

Ведущая организация: кафедра прикладной математики и информатики Ошского технологического университета им. М. М. Адышева, 723503, Кыргызстан, город Ош, улица Исанова, 81.

Защита диссертации состоится 16 апреля 2025 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.24.701 при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: 720001, Кыргызская Республика, г. Бишкек, улица Абдымомунова 328, кабинет 126. Ссылка для доступа к видеоконференции защиты диссертации: https://vc.vak.kg/b/d_0-qxu-6yv-biz

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики (720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а), и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына, (720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547) и на сайте Национальной аттестационной комиссии при Президенте Кыргызской Республики:

https://stepen.vak.kg/diss_sovety/d-01-24-701/

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент



Шаршембиева Ф. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Исследование многих физических задач сводится к изучению периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, как с конечными, так и бесконечными последствиями.

Для исследования периодических решений этих уравнений имеются качественные, аналитические и асимптотические методы, созданные А. Пуанкаре (1879-1912 гг.), Н.М. Крыловым (1912-1955 гг.), Н.Н. Боголюбовым (1934-1991 гг.), Ю.А. Митропольским (1951-2006 гг.), А.М. Самойленко (1973-1976 гг.) и другими авторами. Эти методы успешно применяются при исследовании систем уравнений, содержащих малый параметр, в которых эффект от нелинейности проявляется медленно. Однако при исследовании нелинейных систем общего вида их применимость ограничивается узкими классами уравнений.

В связи с этим в настоящее время одной из важных и актуальных задач исследования является разработка и обоснование методов, применимых для исследования решений уравнений общего вида с сильными нелинейностями.

В диссертационной работе рассматриваются вопросы исследования существования и построения периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, а также системы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, обладающей свойством автономности. В исследовании применяется и обосновывается проекционно-итерационный метод, сочетающий идеи метода Галеркина и метода последовательных приближений. Основное внимание уделено обоснованию проекционно-итерационного метода, который сочетает идеи метода Галеркина и метода последовательных приближений. Решение этих вопросов определяет актуальность данной работы.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами. Исследования по теме диссертации проводились в соответствии с утвержденной ученым советом Исык-Кульского государственного университета им. К. Тыныстанова тематикой «Проекционно-итерационные методы исследования периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра», протокола №2, от 02.11.2021 г.

Цель и задачи исследования. Целью исследования диссертационной работы является обоснование применимости проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последствием второго порядка, а также системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром, обладающей свойством автономности. Для достижения цели работы были решены следующие задачи:

1. Доказательство существования приближений Галеркина в окрестности точного периодического решения и оценка погрешности между приближенными и точными периодическими решениями.

2. Доказательство обратного утверждения о существовании точного периодического решения в окрестности приближений Галеркина и оценка погрешности между ними.

3. Построение методом гармонического баланса в первом приближении периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля с конечным последствием, дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка с запаздыванием и дифференциального уравнения Ван-дер-Поля второго порядка с запаздывающим аргументом. Показать степень влияния параметра запаздывания на амплитудно-частотные характеристики периодических решений.

Научная новизна работы.

– обоснование проекционно-итерационного метода для изучения вопросов существования и приближенного построения периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечными и бесконечными последствиями.

– доказаны взаимнообратные утверждения: теорема о существовании приближений Галеркина в окрестности точного периодического решения и теорема о существовании точного периодического решения в окрестности приближений Галеркина для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.

– дано обоснование применимости проекционно-итерационного метода для построения периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром и конечным последствием.

– методом гармонического баланса в первом приближении построены и проанализированы периодические решения следующих систем: интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля с конечным последствием, дифференциального уравнения Дюффинга с запаздыванием, а также дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля второго порядка запаздывающим аргументом.

Практическая и теоретическая значимость полученных результатов.

Работа носит как теоретический, так и прикладной характер. Результаты диссертации могут быть использованы для исследования периодических решений новых классов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Разработанные алгоритмы позволяют находить решения конкретных модельных уравнений и могут быть адаптированы для применения в различных областях науки и техники.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

– проекционным методом Галеркина доказано существование приближенных

периодических решений в окрестности точных периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечным и бесконечным последствием. Оценена погрешность разности приближённых и точных решений.

– на основе функции Грина методом последовательных приближений доказано существование точных периодических решений в окрестности приближений Галеркина для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечным и бесконечным последствием. Оценена погрешность их разности.

– обоснована применимость проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром.

– определены методом гармонического баланса первые приближения периодических решений: системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля с конечным последствием, дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка и дифференциального уравнения Ван-дер-Поля второго порядка с запаздывающим аргументом. Определена степень влияния параметра запаздывания на амплитудно-частотные характеристики приближённых периодических решений.

Методы исследования. При обосновании проекционно-итерационного метода применены: метод Галеркина, метод последовательных приближений, функция Грина, метод сведения автономной системы к неавтономной системе уравнений и тригонометрический ряд Фурье.

Личный вклад соискателя. Результаты исследований диссертации получены соискателем. Постановка задач и анализ полученных результатов осуществлялись под руководством научного руководителя А.Т. Алымбаева. Под его руководством были определены ключевые направления исследования, а также разработаны основные методологические подходы. Доказательство теорем, выведение следствий и создание иллюстративных примеров выполнены соискателем. Соискатель активно участвовала в апробации результатов исследования на различных международных научно-практических конференциях, где представляла доклады и участвовала в обсуждениях, получив положительные отзывы и предложения по дальнейшему развитию исследований.

Апробация результатов исследований. Результаты настоящей работы были доложены и обсуждены на:

- Международной научно-практической конференции “Эпоха СССР: оценка временем” (г. Каракол, ИГУ им. К. Тыныстанова, 14-15 октября 2021 г.)
- Международной научно-практической конференции «Проблемы и будущее технологий преподавания естественно-математических наук в условиях цифровизации», посвященной 70-летию доктора педагогических наук КГУ имени И. Арабаева, профессора Торогельдиевой К. М. и 70-летию кафедры

«Математика и технологии ее преподавания» (г. Бишкек, КНУ им. И. Арабаева, 21-22 мая 2022 г.)

- Международной научно-практической конференции: «Историко-просветительское значение г. Каракол в развитии Кыргызстана» (г. Каракол, ИГУ им. К. Тыныстанова, 10-11 июня 2022 г.)
- Международной научно-практической конференции «Современные цифровые трансформации устойчивого развития общества, образования и науки в эпоху глобализации: опыт прошлого, возможности настоящего, стратегии будущего», посвященной 90-летию общественного и политического деятеля Абсамата Масалиева (г. Баткен, БатГУ, 28-29 апреля 2023 г.)
- Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и образования", посвященной 80-летию д. ф.-м. н., профессора, член-корреспондента НАН КР, почетного академика НАН КР Келдибая Алымкулова (г. Ош, ОшГУ, 12-13 мая 2023 г.)
- Международной научно-практической конференции «VI чтения И. Бекбоева: проблемы современной модели образования: актуальные вопросы, достижения и инновации», посвященной Народному учителю КР, лауреату государственной премии в области науки и техники, член-корреспонденту НАН КР, академику НАН, Бекбоеву Исак Бекбоевичу (г. Бишкек, ТалГУ, 8-9 июня 2023 г.)
- Международной научной конференции «V Борубаевские чтения», посвященной 70-летию НАН КР и 40-летию Института математики НАН КР (г. Бишкек, ИМ НАН КР, 20-21 июня 2024 г.)

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 научных статьях. Из них 4 статьи опубликованы в научных изданиях, включённых в наукометрическую базу РИНЦ, причём 2 статьи имеют импакт-фактор выше 0,1. Одна из статей опубликована в базе Web of Science.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, четырех глав, содержащих 12 разделов, заключения и списка использованных источников из 73 наименований, 112 стр. компьютерного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Во введении излагаются цель и задачи исследования, обосновываются актуальность темы, научная новизна, практическая и теоретическая ценность работы.

В первой главе представлен краткий обзор научных работ, посвящённых проекционно-итерационным методам исследования периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, а также близких по содержанию задач, рассматриваемых в данной диссертационной работе.

Основы проекционного метода Галеркина заложены в работах В. Ритца, Б.Г. Галеркина, Л.В. Канторовича, М.В. Келдыша, И.В. Сварского, Н.И. Польского и других авторов. Вопросы построения периодических решений автономных и неавтономных систем дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, различных типов интегро-дифференциальных уравнений по методу Галеркина были изучены в трудах М. Урабе, А.М. Самойленко, О.Д. Нуржанова, Б. Вуйтовича, А.Б. Кибенко, П.П. Забрейко, С.О. Стрыгина, А. Stokes, Yamamoto Norio и других авторов.

Метод гармонического баланса, который относится к семейству методов Галеркина, был разработан и обоснован Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым. Широкий круг вопросов, связанных с методом гармонического баланса, его обобщениями и приложениями, рассмотрен Е.Н. Розенвассером, Л. Чезари, Дж. Хейлом. Один из наиболее эффективных вариантов метода гармонического баланса для определения предельных циклов в математических моделях нелинейной динамики предложен А.А. Кондратьевым, S. Zelik и B. Delamotte.

Следует выделить работу М. Урабе, посвящённую вопросам обоснования метода Галеркина применительно к системе дифференциальных уравнений.

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(t, x(t)), \quad (1)$$

где $X(t, x)$ - 2π периодическая по t вектор-функция.

М. Урабе в своей работе дал общие теоремы о взаимосвязях между точным решением и их приближениями по методу Галеркина. Он доказал утверждения, позволяющие на основании существования приближённых периодических решений сделать вывод о существовании точных периодических решений системы (1). Также доказано обратное утверждение о существовании приближений по методу Галеркина в окрестности точного периодического решения системы (1).

Во второй главе освещены методология и методы исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последствием. В пункте 2.1 определены объект, предмет и задачи исследования. В пункте 2.2 рассматривается необходимый аппарат для обоснования проекционного метода Галеркина построения периодических решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, как с конечным, так и бесконечным последствием.

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t), \quad (2)$$

где $f(t)$ – периодическая с периодом 2π функция, представимая в виде ряда Фурье:

$$f(t) = c_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos kt + d_k \sin kt) \quad (3)$$

На множестве периодических функций введен оператор S_m , такой, что

$$S_m f(t) = c_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^m (c_k \cos kt + d_k \sin kt).$$

С учетом (3) уравнение (2) записываем в виде:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = c_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos kt + d_k \sin kt) \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть $\hat{x} = \hat{x}(t) - 2\pi$ -периодическое решение (4). Если

$$c_0 = 0, \quad \hat{x}(0) = -\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^2}, \quad \frac{d\hat{x}(0)}{dt} = -\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{k},$$

тогда, 2π -периодическое решение $\hat{x} = \hat{x}(t)$ представимо в виде формулы

$$\hat{x}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (-c_k \cos kt + d_k \sin kt)$$

Теорема 2. Для разности $\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)$ имеет место оценка

$$|\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)|_0 \leq \sigma(m) |f|_0, \\ \|\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)\|_0 \leq \sigma_1(m) \|f\|_0$$

где

$$\sigma(m) = \left[\frac{2}{(m+1)^4} + \frac{2}{(m+2)^4} + \dots \right]^{1/2}, \quad \sigma_1(m) = \frac{\sqrt{2}}{(m+1)^2}.$$

Устанавливается критерий разрешимости системы алгебраических уравнений вида

$$D\alpha + F(\alpha) = 0, \quad (5)$$

D – действительная матрица, для которой $\det D \neq 0$, $F(0) = 0$, и $\frac{\partial F(0)}{\partial \alpha} \neq 0$.

Теорема 3. Предположим, что система (5) имеет приближенное решение $\alpha = \bar{\alpha}$ и существуют постоянные $\delta > 0, \eta > 0$ и $0 < \chi < 1$ для которых выполняются условия:

1. $\Delta_\delta = \{\alpha: \|\alpha - \bar{\alpha}\| \leq \delta\} \subset \Delta$.
2. $\|D^{-1}[F(\bar{\alpha})] + \bar{\alpha}\| \leq \eta, \quad \left\| \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha} \right\| \leq \frac{\chi}{M} \quad M = \|D^{-1}\|.$
3. $\frac{\eta}{1-\chi} \leq \delta,$

тогда система (5) имеет единственное решение $\alpha = \hat{\alpha}$ в области Δ_δ и имеет место оценка $\|\hat{\alpha} - \bar{\alpha}\| \leq \delta$.

Рассмотрена система алгебраических уравнений вида

$$D\alpha + F_1(\alpha) + F_2(\alpha, \varepsilon) = 0, \quad (6)$$

где α, F_1, F_2 - вектор-функции одинаковой размерности.

F_1, F_2 – непрерывно дифференцируемые функции в области Δ , такие, что

$F_1(0) = 0, F_2(\alpha, 0) = 0, F_2(0, \varepsilon) \neq 0$ и $\frac{\partial F_1(0)}{\partial \alpha} \neq 0$, D -действительная матрица, для которой $\det D \neq 0$, ε – малый параметр.

Теорема 4. Предположим, что система (6) имеет приближенное решение $\alpha = \bar{\alpha}(\varepsilon)$ такое, что $\bar{\alpha}(0) = 0$ и есть постоянные $\delta > 0, \eta > 0, \varepsilon > 0$ и $0 < \chi < 1$ для которых выполняются условия:

1. $\Delta_\delta = \{\alpha: \|\alpha - \bar{\alpha}\| \leq \delta\} \subset \Delta$.

2. $\|D^{-1}[F_1(\bar{\alpha}) + F_1(\bar{\alpha}, \varepsilon)] + \bar{\alpha}\| \leq \eta \quad \left\| \frac{\partial F_1(\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_1(\alpha, \varepsilon)}{\partial \alpha} \right\| \leq \frac{\chi}{M} \quad M = \|D^{-1}\|$

3. $\frac{\eta}{1-\chi} \leq \delta$.

тогда система (6) имеет единственное решение $\alpha = \hat{\alpha}(\varepsilon)$ такое, что $\hat{\alpha}(0) = 0$ в области Δ_δ и имеет место оценка $\|\hat{\alpha}(\varepsilon) - \bar{\alpha}(\varepsilon)\| \leq \frac{\eta}{1-\chi}$.

Третья глава посвящена обоснованию проекционно- итерационного метода для исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последствием вида:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = Ax + f(t, x) \quad (7)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = Ax + f\left(t, x(t), \int_{t-\tau}^t \varphi(t, s, x(s)) ds\right) \quad (8)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = Ax + f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^t \varphi(t, s, x(s)) ds\right). \quad (9)$$

2π -периодическое решение дифференциального уравнения (7) ищется в виде

$$\bar{x}_m(t) = \bar{a}_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^m (\bar{a}_k \cos kt + \bar{b}_k \sin kt), \quad (10)$$

коэффициенты которого находятся из системы алгебраических уравнений

$$\frac{d^2 \bar{x}_m(t)}{dt^2} = A\bar{x}_m(t) + S_m f(t, \bar{x}_m(t))$$

или

$$D^{(m)} \bar{\alpha} + F^{(m)}(\bar{\alpha}) = 0 \quad (11)$$

$$D^{(m)} = \begin{pmatrix} A & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A + k^2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A + k^2 \end{pmatrix}, F^{(m)}(\alpha) = \begin{pmatrix} A_0^{(m)} \\ \vdots \\ A_k^{(m)} \\ B_k^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 \\ \vdots \\ \bar{a}_k \\ \bar{b}_k \end{pmatrix}.$$

$$k = \overline{1, m}.$$

$$A_0^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} f(t, \bar{x}_m(t)) dt, \quad A_k^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} f(t, \bar{x}_m) \cos ktdt,$$

$$B_k^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} f(t, \bar{x}_m) \sin ktdt$$

В пункте 3.1 показана разрешимость уравнения (11) и сходимость $\bar{x}_m(t)$ при $m \rightarrow \infty$ к точному 2π -периодическому решению $\hat{x}(t)$ уравнения (7), иными словами, существование приближённого 2π -периодического решения в окрестности точного 2π -периодического решения $\hat{x}(t)$.

Теорема 5. Пусть дифференциальное уравнение (7) удовлетворяет следующим условиям:

1. существует 2π -периодическое решение $\hat{x}(t)$, принадлежащее области $D \in R = (-\infty; +\infty)$;
2. удовлетворяет требованиям теоремы 3;
3. $\|\hat{\alpha} + [D^{(m)}]^{-1} F^m(\hat{\alpha})\| \leq \sigma_1(m) K |f|_1 \|f\|_0, \quad K = \|[D^{(m)}]^{-1}\|;$
4. $\left\| \frac{\partial F^m(\alpha)}{\partial \alpha} \right\| \leq \frac{\chi}{K}, \quad 0 < \chi < 1.$

Тогда существует достаточно большое m_0 , такое, что при всех $m \geq m_0$ существуют приближённые 2π -периодические решения $\bar{x}_m(t)$ уравнения (7), равномерно сходящиеся при $m \rightarrow \infty$ к точному периодическому решению $x = \hat{x}(t)$, такое что, справедлива оценка

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \leq \frac{\sqrt{2}|f|_0(1 + |f|_1)}{m^2(1 - \chi)}.$$

В пункте 3.2 рассматривается дифференциальное уравнение

$$x''(t) - Ax(t) = 0, \quad A > 0$$

с функцией Грина вида

$$G(t, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{A}} e^{\sqrt{A}(s-t)}, & -\infty < t \leq s, \\ -\frac{1}{2\sqrt{A}} e^{\sqrt{A}(t-s)}, & s < t < +\infty. \end{cases} \quad (12)$$

обладающая свойством

$$G(t, t-0) - G(t, t+0) = 0, \quad G'_t(t, t-0) - G'_t(t, t+0) = 1. \quad (13)$$

с учетом функции Грина (12) дифференциальное уравнение (7) приводим к интегральному уравнению вида

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s) f(s, x(s)) ds. \quad (14)$$

Доказано обратное утверждение теоремы 5, т.е. существование точного 2π -периодического решения $\hat{x}(t)$, уравнения (7) в окрестности приближенного 2π -периодического решения $\bar{x}_m(t)$.

Теорема 6. Пусть функция $x = x(t)$ является решением уравнения (7) и существует функция Грина вида (12), обладающая свойством (13). Тогда функция $x = x(t)$ также является решением интегрального уравнения (14).

Теорема 7. Пусть выполняется условие теоремы 6. Если выполняется условие $q = \frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda} < 1$, то существует 2π -периодическое решение $x = \hat{x}(t)$ интегрального уравнения (14), а вместе с ним и периодическое решение дифференциального уравнения (7) и для разности $\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)$ справедлива оценка

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 < \frac{2\sqrt{2}M|f|_0}{m^2(1-q)}.$$

В пунктах 3.3, 3.4, 3.5 результаты пункта 3.2 перенесены в интегро-дифференциальные уравнения вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Ax(t) + f(t, x(t), \int_{t-\tau}^t \varphi(t, s, x(s))ds) \quad (15)$$

A – положительное вещественное число, $f(t, x, u), \varphi(t, s, x)$ – непрерывно-дифференцируемые 2π -периодические по t, s функции, $\tau = \text{const} > 0$.
и вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Ax(t) + f(t, x(t), \int_{-\infty}^t \varphi(t-s, x(s))ds), \quad (16)$$

где $\varphi(t-s, x)$ – непрерывная по t, s и дифференцируемая по x и удовлетворяющая следующему неравенству функция:

$$|\varphi'_x(t-s, x(s))|_0 \leq K_0 e^{-\gamma(t-s)}, \quad \text{при } t, s \in R, \quad K_0 > 0, \gamma > 0. \quad (17)$$

Периодическое решение уравнения (15), (16) ищем в виде

$$\bar{x}_m(t) = \bar{a}_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^m (\bar{a}_k \cos kt + \bar{b}_k \sin kt). \quad (18)$$

Поставим (18) в уравнение (15), получим:

$$\frac{d^2\bar{x}_m(t)}{dt^2} = A\bar{x}_m(t) + S_m f\left(t, \bar{x}_m(t), \int_{t-\tau}^t \varphi(t, s, \bar{x}_m(s))ds\right).$$

Отсюда имеем

$$D^{(m)}\bar{\alpha} + F^{(m)}(\bar{\alpha}) = 0 \quad (19)$$

$$D^{(m)} = \begin{pmatrix} A & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A + k^2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A + k^2 \end{pmatrix}, F^{(m)}(\alpha) = \begin{pmatrix} A_0^{(m)} \\ \vdots \\ A_k^{(m)} \\ B_k^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 \\ \vdots \\ \bar{a}_k \\ \bar{b}_k \end{pmatrix}.$$

$$k = \overline{1, m}.$$

$$A_0^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} f(t, \bar{x}_m(t), u_m(t)) dt, \quad A_k^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} f(t, \bar{x}_m(t), u_m(t)) \cos k t dt,$$

$$B_k^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} f(t, \bar{x}_m(t), u_m(t)) \sin k t dt, \quad u_m(t) = \int_{t-\tau}^t \varphi(t, s, \bar{x}_m(s)) ds.$$

Теорема 8. Пусть интегро-дифференциальное уравнение (15) имеет 2π -периодическое решение $\hat{x}(t)$ и удовлетворяет следующим требованиям:

а) выполняется требование теоремы 2;

б) $\|\hat{\alpha} + (D^{(m)})^{-1} F^{(m)}(\hat{\alpha})\| \leq \sigma_1(m) K \|f\|_0 \|f\|_1 (1 + |\varphi|_1 \tau)$;

в) $\left\| \frac{\partial F^{(m)}(\alpha)}{\partial \alpha} \right\| \leq \frac{\chi}{K}, \quad 0 < \chi < 1, \quad \sigma_1(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}.$

Тогда, алгебраическое уравнение (19) имеет единственное решение $\bar{\alpha} = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \dots, \bar{a}_m, \bar{b}_m)$, такое, что для разности между точным $\hat{x}(t)$ и приближённым решением $\bar{x}_m(t)$ справедлива оценка

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \leq \frac{\sqrt{2} \|f\|_0 [1 + K \|f\|_1 (1 + |\varphi|_1 \tau)]}{m^2 (1 - \chi)}, \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Поставив ряд (18) в (16) уравнение, получим уравнение, аналогичное алгебраическому уравнению (19):

$$D^{(m)} \bar{\alpha} + F^{(m)}(\bar{\alpha}) = 0 \quad (20)$$

здесь

$$u_m(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(t - s, x(s)) ds.$$

Для уравнения (16) доказано, что при выполнении условия (17) утверждение аналогичное теореме 8, и для разности $\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)$ получена оценка:

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \leq \frac{\sqrt{2} \|f\|_0 [1 + \|f\|_1 (K + \gamma)]}{m^2 (1 - \chi)}, \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Пункт 3.6. посвящен одному из вариантов проекционно-итерационного метода нахождения периодических решений интегро-дифференциального уравнения (15), и для разности периодического решения $x(t)$ и приближённого решения $x_i^m(t)$ получена оценка:

$$|x(t) - x_i^m(t)|_0 \leq \frac{\lambda^i}{2A\lambda(1 - \lambda)} [(1 + \gamma(m)) \|f\|_0 + 2A \|x_0(t)\|_0], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

В четвертой главе рассматриваются задачи исследования периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, обладающей свойством автономности.

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \varepsilon f(x, \int_t^{t+T_0} P(t-s, x(s))ds, \varepsilon). \quad (22)$$

Предположим, что для невозмущенной системы ($\varepsilon = 0$) найдено периодическое решение $x = x_0(\omega_0 t)$, периода $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

В пункте 4.1 заменой переменных

$$x(\varphi) = x_0(\varphi) + B(\varphi)h, \quad (23)$$

где $B(\varphi)$ – $n \times (n-1)$ -мерная 2π -периодическая матрица, система (22) сведена к 2π -периодической системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\varphi} = & \frac{G_1(\varphi, h)}{\omega_0 + \mathcal{F}_1(\varphi, h) + f_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0} \int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1))d\varphi_1, \varepsilon\right)} + \\ & + \frac{g_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0} \int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1))d\varphi_1, \varepsilon\right)}{\omega_0 + \mathcal{F}_1(\varphi, h) + f_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0} \int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1))d\varphi_1, \varepsilon\right)}. \end{aligned} \quad (24)$$

В качестве примера рассматривается задача приводимости к неавтономной системе уравнений, уравнения Дюффинга с интегральным членом вида:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x - \varepsilon_1 x^3 + \varepsilon \int_t^{t+T_0} x(s)ds,$$

где ε_1 – достаточно малое число, ε – малый параметр, $T_0 > 0$.

В пункте 4.2 представив систему (24) в виде

$$\frac{dh}{d\varphi} = C(\varphi)h + \mathcal{F}(\varphi, h) + H\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0} \int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1))d\varphi_1, \varepsilon\right) \quad (25)$$

показана применимость проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений. Решение системы (25) будем находить в виде тригонометрического полинома

$$h_m(\varphi) = a_0 + \sqrt{2} \sum_{n=1}^m (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (26)$$

коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ определяем из системы алгебраических уравнений вида

$$D^{(m)}\alpha + F_1^{(m)}(\alpha) + F_1^{(m)}(\alpha, \varepsilon) = 0 \quad (27)$$

где $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m)$,

Обозначим через $G(\varphi, \tau)$ функцию Грина обладающей свойствами:

а) $G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = E$, E – единичная матрица;

б) $\|G(\varphi, \tau)\| \leq M_0 e^{-\lambda_0 |\varphi - \tau|}$, $\varphi, \tau \in R$,

которая удовлетворяет систему уравнений

$$\frac{dh(\varphi)}{d\varphi} = C(\varphi)h(\varphi), \quad (28)$$

Теорема 9. Пусть система (27) имеет функцию Грина $G(\varphi, \tau)$, обладающую свойствами а) и б), тогда $\det D^{(m)} \neq 0$ и систему (25) можно записывать в виде:

$$\alpha = -(D^{(m)})^{-1} (F_1^{(m)}(\alpha) + F_1^{(m)}(\alpha, \varepsilon)). \quad (29)$$

Решаем систему алгебраических уравнений (29) методом последовательных приближений

$$\alpha_{k+1} = -(D^{(m)})^{-1} [F_1^{(m)}(\alpha_k) + F_2^{(m)}(\alpha_k, \varepsilon)], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

Теорема 10. Пусть система (28) имеет 2π -периодическое по φ решение $\hat{h}(\varphi, \varepsilon)$ в области $R_1 \times E$, $E = [0, \varepsilon_0]$, $R = (-\infty, +\infty)$ и удовлетворяют условиям

$$\text{а) } \hat{h}_m(\varphi, \varepsilon) = S_m \hat{h}(\varphi, \varepsilon) = \hat{a}_0 + \sqrt{2} \sum_{n=1}^m (\hat{a}_n \cos n\varphi + \hat{b}_n \sin n\varphi);$$

$$\text{б) } \left\| \frac{\partial F_1^{(m)}(\hat{\alpha})}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_2^{(m)}(\hat{\alpha}, \varepsilon)}{\partial \alpha} \right\| \leq \frac{\chi}{M}, \quad 0 < \chi < 1, \quad M = \|(D^{(m)})^{-1}\|;$$

$$\text{в) } \text{Линейная система } \frac{dh(\varphi)}{d\varphi} = C(\varphi)h(\varphi) \text{ имеет функцию Грина } G(\varphi, \tau),$$

обладающую свойством

$$1) G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = E; \quad E - \text{единичная матрица};$$

$$2) \|G(\varphi, \tau)\| \leq M_0 e^{-\lambda_0 |\varphi - \tau|}, \quad \varphi, \tau \in R, \quad \varphi \neq \tau, \text{ где } M_0, \lambda_0 > 0$$

$$3) \frac{\eta_m}{1-\chi} \leq \delta, \text{ при } \alpha \in \Delta_\delta = \{\alpha: \|\alpha - \hat{\alpha}\| \leq \delta\},$$

$$\eta_m = \sigma_1(m)MK|Ch + \mathcal{F} + H|_1, \quad K = \|C\|_0 + |\mathcal{F}|_1 + |H|_1(1 + T_0)|P_1|_1).$$

Тогда в окрестности точного решения $\hat{h}(\varphi, \varepsilon)$ существуют приближения Галеркина $\bar{h}_m(\varphi, \varepsilon)$, и для разности $|\hat{h}(\varphi, \varepsilon) - \bar{h}_m(\varphi, \varepsilon)|_0$ верна оценка

$$|\hat{h}(\varphi, \varepsilon) - \bar{h}_m(\varphi, \varepsilon)|_0 \leq \frac{\sqrt{2}}{m} \left(1 + \frac{\sqrt{2m+1}MK}{1-\chi} \right) |Ch + \mathcal{F} + H|_0.$$

В пункте 4.3 доказано обратное утверждение теоремы 9, т.е. существование точного решения $\hat{h}(\varphi, \varepsilon)$ системы (25) в окрестности приближения Галеркина $\bar{h}_m(\varphi, \varepsilon)$.

Теорема 11. Пусть система интегро-дифференциальных уравнений (25) такова, что выполняются условия:

а) существуют приближения Галеркина $\bar{h}_m(\varphi, \varepsilon)$ всех порядков $m \geq m_0$, принадлежащие области D ;

б) Линейная система $\frac{dh}{d\varphi} = C(\varphi)h$ имеет функцию Грина $G(\varphi, \tau)$ обладающую свойством 1), 2) теоремы 10.

$$\text{в) } \chi = \frac{2M_0}{\lambda_0} (|\mathcal{F}|_1 + |H|_1(1 + T_0)|P_1|_1) < 1.$$

Тогда система (25) имеет в окрестности приближения Галеркина $\bar{h}_m(\varphi, \varepsilon)$ точное 2π -периодическое решение $\hat{h}(\varphi, \varepsilon)$.

Для разности $|\hat{h}(\varphi, \varepsilon) - \bar{h}_m(\varphi, \varepsilon)|_0$ справедлива оценка

$$|\hat{h}(\varphi, \varepsilon) - \bar{h}_m(\varphi, \varepsilon)|_0 \leq \frac{2M_0(|Ch|_1 + |\mathcal{F}|_1 + |H|_1)}{\lambda_0(1 - \chi)} \sigma(m), \quad 0 < \chi < 1.$$

Далее в пункте 4.4 рассматривается задача построения периодических решений в первом приближении:

- системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-Дер-Поля:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - \lambda(x^2 - 1)y + \lambda \int_t^{t+\tau} x(s)ds. \end{cases} \quad (31)$$

где $\lambda > 0$ параметр;

- дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка с запаздывающим аргументом:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) - \varepsilon_1 x^3(t) + \lambda x(t - \tau), \quad (32)$$

где ε_1 – малый параметр, λ – численный параметр, τ – величина запаздывания

- дифференциального уравнения Ван-дер-Поля второго порядка с запаздывающим аргументом:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \lambda(x^2(t) - 1)x'(t) + x(t - \tau) = 0, \quad (33)$$

где $\lambda > 0$, τ – величина запаздывания и $\tau > 0$.

Периодическое решение системы (31) в первом приближении ищется в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \\ y(t) &= d_0 + d_1 \cos \omega t + c_1 \sin \omega t, \end{aligned}$$

где ω – частота колебания, $a_0, a_1, b_1, d_0, d_1, c_1$ подлежащее к выборам коэффициенты.

Вычисление показывает, что

$$a_0 = 0, \quad d_0 = 0, \quad d_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = -\omega a_1 \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^3}{6}}}, \quad a_1 = 2\sqrt{1 - \frac{\tau^2}{2}},$$

$$x(t) = 2\sqrt{1 - \frac{\tau^2}{2}} \cos \left(\sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^3}{6}}} t \right),$$

$$y(t) = -2 \sqrt{\frac{1 + \lambda\tau}{1 + \frac{\tau^3}{6}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{2}} \sin \left(\sqrt{\frac{1 + \lambda\tau}{1 + \frac{\tau^3}{6}}} t \right).$$

На фазовой плоскости (x, y) получено периодическое решение системы (31) которое образует семейство эллипсов вида

$$\frac{x^2(t)}{4(1 - \frac{\tau^2}{2})} + \frac{y^2(t)}{4(1 - \frac{\tau^2}{2}) \frac{1 + \lambda\tau}{1 + \frac{\tau^3}{6}}} = 1.$$

Далее периодическое решение в первом приближении уравнении Дюффинга (32) ищется в виде

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t.$$

Получены следующие значения частоты ω и коэффициентов a_0, a_1, b_1 :

$$\omega = \frac{\sqrt{6}}{\tau}, \text{ при } 21\lambda - \frac{36}{\tau^2} - 3 < 0, \quad b_1 = 0, \quad a_0 = \sqrt{\frac{7\lambda - \frac{12}{\tau^2} - 1}{\varepsilon_1 - 6}}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{(4\varepsilon_1 + 1)\lambda + \frac{8}{\tau^2} + 1}{\varepsilon_1 - 6}}$$

В первом приближении периодическое решение уравнения (32) имеет вид

$$x(t) = \sqrt{\frac{7\lambda - \frac{12}{\tau^2} - 1}{\varepsilon_1 - 6}} + \sqrt{\frac{(4\varepsilon_1 + 1)\lambda + \frac{8}{\tau^2} + 1}{\varepsilon_1 - 6}} \cdot \cos \frac{\sqrt{6}}{\tau} t.$$

Приближенное периодическое решение уравнения Ван-дер-Поля (33) ищется согласно формуле $x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$.

Вычислив частоту ω и коэффициентов a_0, a_1, b_1 , найдены числовые значения:

$$a_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad a_1 = \pm 2 \sqrt{1 + \frac{\tau}{\lambda}} \quad \text{и} \quad \omega = \pm \sqrt{\frac{2}{2 + \tau^2}}, \quad \text{для } \tau \geq 0.$$

В первом приближении периодическое решение уравнению записывается согласно выражениям

$$x(t) = 2 \sqrt{1 + \frac{\tau}{\lambda}} \cos \sqrt{\frac{2}{2 + \tau^2}} t,$$

отсюда

$$\dot{x}(t) = -2 \sqrt{\frac{2}{2 + \tau^2}} \left(1 + \frac{\tau}{\lambda}\right) \sin \sqrt{\frac{2}{2 + \tau^2}} t.$$

На фазовой плоскости (x, \dot{x}) получим:

$$\frac{x^2(t)}{\left(2\sqrt{1+\frac{\tau}{\lambda}}\right)^2} + \frac{\dot{x}^2(t)}{\left(2\sqrt{\frac{2}{2+\tau^2}\left(1+\frac{\tau}{\lambda}\right)}\right)^2} = 1$$

уравнение эллипса.

ВЫВОДЫ

В диссертации излагаются вопросы существования и отыскания периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последствием второго порядка, а также системы интегро-дифференциальных уравнений с конечным последствием первого порядка с малым параметром, обладающим свойством автономности. Для исследования периодических решений дается обоснование применимости проекционно-итерационного метода, сочетающего идеи проекционного метода Галеркина и метода последовательных приближений.

Получены следующие результаты:

1. Дано обоснование применимости проекционно-итерационного метода исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последствием второго порядка, а также системы интегро-дифференциального уравнения с конечным последствием первого порядка с малым параметром, обладающим свойством автономности.
2. Доказана теорема о существовании приближения Галеркина в окрестности точного периодического решения и оценена величина разности приближенных и точных периодических решений.
3. Доказаны обратные теоремы существования точных периодических решений в окрестности приближений Галеркина и оценена их разность.
4. В первом приближении методом гармонического баланса, построены периодические решения системы интегро-дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля с конечным последствием, дифференциального уравнения Дюффинга первого порядка с запаздыванием и дифференциального уравнения второго порядка Ван-дер-Поля с запаздыванием. Показано, что величина параметра запаздывания существенно влияет на амплитудно-частотные характеристики периодических решений.

Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Все результаты, представленные в диссертационной работе, обладают новизной и теоретической значимостью. Эти результаты могут быть использованы для анализа периодических решений новых классов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Научные выводы, полученные в рамках

исследования, применимы к изучению решений конкретных модельных уравнений и могут быть адаптированы для использования в различных областях науки и техники

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Бапа, кызы А.** Влияние интегрального члена к решению системы уравнений Ван-дер-Поля [Текст] /А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2022. – № 1. – С. 3–7. <http://www.science-journal.kg/ru/journal/1/archive/15102>
2. **Бапа, кызы А.** Квасисызыктуу дифференциалдык тендемелердин системасынын мезгилдик чыгарылышы [Текст] / А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // Изв. ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2022. – № 2. – С. 21–26. <http://www.science-journal.kg/media/Papers/ivk/2022/1/%D0%98%D0%92%D0%9A- 2 2022%D0%B3 pdf 21-26.pdf>
3. **Бапа, кызы А.** О методе Галеркина построения периодических решений квазилинейной интегро-дифференциальной уравнении второго порядка [Текст] / А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // Вестник ОшГУ. – Ош, 2024. – №1. – С.13–21. <https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=67964643>
4. **Бапа, кызы А.** О методе гармонического баланса построения периодического решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последствием [Текст] / А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // ALATOO ACADEMIC STUDIES. – Бишкек, 2022. – № 2. – С. 459-463. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49469587>
5. **Бапа, кызы А.** Периодическое решение квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // Вестн. Иссык-Кул. ун-та. – Каракол, 2022. – № 53. – С. 28–33. <http://libraryysu.kg/vestnik>
6. **Бапа, кызы А.** Периодическое решение системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последствием [Текст] /А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // Вестн. науки и образования. – Иваново, 2022. – № 1 (121). – С. 5–12. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48007904>
7. **Бапа, кызы А** Существование периодического решения дифференциального уравнения второго порядка. Метод функции Грина [Текст] /А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // Вестн. Иссык-Кул. ун-та. – Каракол, 2023. – № 55. – С.7–14. <https://libraryysu.kg/vestnik/arhiv/75>
8. **Бапа, кызы А.** Экинчи тартиптеги туундусуна карата чечилбеген дифференциалдык тендеме үчүн чектик маселенин чыгарылышын коллокация-асимптотикалык метод менен табуу [Текст] / А. Т. Алымбаев, Б. Мусаева, А. Бапа кызы // Вестн. Иссык-Кул. ун-та. – Каракол, 2024. – № 57. – С.83–89. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=68570909>
9. **Бапа, кызы А.** Дюффингдин кечиккен аргументтүү мүчөнү кармаган экинчи тартиптеги дифференциалдык тендемесинин мезгилдик чыгарылышы [Текст] / А. Бапа кызы // Вестн. Кыргызстана. – Бишкек, 2023. – № 2 (1). – С. 312–316. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=60061648>

10. **Бапа, кызы А.** О существовании периодического решения системы нелинейных автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последствием [Текст] / А. Бапа кызы // Вестн. науки и образования. – Иваново, 2022. – № 1 (121). – С.16–21. :<http://scientificjournal.ru/images/PDF/2022/121/o-sushchestvovanii-.pdf>
11. **Бапа, кызы А.** Периодическое решение дифференциального уравнения Ван-дер-Поля с запаздыванием [Текст] / А. Бапа кызы // Вестн. БатМУ. –Баткен, 2023. – № 1. – С.3–6.
12. **Бапа, кызы А.** Построение решения системы квазилинейных уравнений методом простой итерации [Текст] / А. Бапа кызы // ALATOO ACADEMIC STUDIES. – Бишкек, 2022. – № 3. – С. 402–406 .
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49822432>
13. **Вара, kyzy А.** Application of the summary-difference method with a regularizer to construct an asymptotic solution to the boundary value problem of a system of nonlinear difference equations [Текст] / А.Т. Alymbaev, К. М. Myrzakylola, А. Вара kyzy // Вестн. Ин-та математики Нац. АН Кырг. Респ. – Бишкек, 2021. – № 2. – С. 74–80.
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49308086>
14. **Вара, kyzy А.** Periodic solutions of a second- order nonlinear Volterra integro-differential equation [Text] / А. Т Alymbaev, А. Вара kyzy, F. K. Sharshembieva // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2024. – Vol. 31, N 2. – P. 285–297. <https://www.pphmjopenaccess.com/index.php/adeqp/article/view/1744>
15. **Вара, kyzy А.** The Galerkin method for constructing solutions to a quasilinear differential equation of the second order [Текст] / А. Вара, kyzy // Вестн. Ин-та математики Нац. АН Кырг. Респ. – 2022. – № 1. . – С. 99–108
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49328828>

РЕЗЮМЕ

диссертации Бапа кызы Айнуры на тему : “Проекционно – итерационные методы исследования периодических решений интегро – дифференциальных уравнений типа Вольтерра” на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова. Периодические решения, квазилинейные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения второго порядка, система интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, проекционно-итерационный метод, метод последовательных приближений.

Объект исследования. Периодическая краевая задача для квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра, системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром, обладающей свойством автономности.

Предмет исследования. Исследование разрешимости и построение решений периодической краевой задачи для квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра, а также системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром, обладающей свойством автономности.

Цели работы. Обоснование применимости проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечным и бесконечным последствием, а также системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром, обладающей свойством автономности.

Методы исследования и аппаратура. при обосновании проекционно-итерационного метода применены: метод Галеркина, метод последовательных приближений, функция Грина.

Полученные результаты и их новизна. Доказаны взаимнообратные утверждения: теорема о существовании приближений Галеркина в окрестности точного периодического решения, а также теорема о существовании точного периодического решения в окрестности приближений Галеркина для квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, а также системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром и конечным последствием.

Рекомендации по использованию. Рекомендуется распространять результаты данной работы для исследования периодических решений квазилинейных конечно-разностных уравнений второго порядка.

Область применения. Алгоритмы проекционно-итерационного метода могут быть применены в задачах физики, механики, математической физики и теории одночастотных колебаний.

Бапа кызы Айнуранын «Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык тендемелердин мезгилдик чыгарылыштарын изилдөөнүн проекциялык-итерациялык ыкмалары» деген темада 01.01.02 - дифференциалдык тендемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр. Мезгилдик чыгарылыш, квазисызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык тендемелер, автономдук касиетке ээ кичине параметрлүү интегро-дифференциалдык тендемелер системасы, проекциялык-итерациялык ыкма, удаалаш жакындатуу ыкмасы.

Изилдөө объектиси. Квазисызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык жана Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык тендемелер жана автономдук касиетке ээ, кичине параметрлүү интегро-дифференциалдык тендемелердин системасы. үчүн мезгилдүү чектик маселелер.

Изилдөөнүн предмети. Квазисызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык жана Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык тендемелер, биринчи тартиптеги автономдук касиетке ээ, кичине параметрлүү интегро-дифференциалдык тендемелердин системасы үчүн чектик маселелердин чыгарылыштарынын чечилишин жана тургузууну изилдөө.

Иштин максаты. Квазисызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык, чектүү, чексиз таасирленген интегро-дифференциалдык тендемелердин жана автономдук касиетке ээ, кичине параметрлүү интегро-дифференциалдык тендемелердин системасынын мезгилдүү чыгарылыштарын изилдөө үчүн проекциялык-итерациялык ыкманын колдонулушун негиздөө.

Изилдөө ыкмалары. Проекциялык-итерациялык ыкманын колдонулушун негиздөөдө төмөнкү ыкмалар колдонулган: Галеркин методу, удаалаш жакындатуу ыкмасы жана Грин функциясы.

Алынган жыйынтыктар жана анын жаңылыгы. Квазисызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык тендемелер , биринчи тартиптеги кичине параметрлүү жана чектүү таасирленген интегро-дифференциалдык тендемелердин системалары үчүн өз ара тескери ырастоолор: так мезгилдик чыгарылыштын аймагында Галеркиндин жакындаштырууларынын жана тескерисинче, Галеркиндин жакындаштырууларынын аймагында так мезгилдик чыгарылыштын жашашы тууралуу теоремалар далилденген.

Колдонуу боюнча сунуштар. Иштин жыйынтыктарын экинчи тартиптеги квазисызыктуу чектүү-айырмадагы тендемелердин мезгилдик чыгарылыштарын изилдөөгө жайылтууну сунуштайбыз.

Колдонуу аймагы. Проекциялык-итерациялык ыкманын алгоритмдерин физика, механика, математикалык физика жана бир өлчөмдүү жыштыктуу термелүү теориясынын маселелеринде колдонууга болот.

RESUME

of the dissertation by Bapa kzyy Ainura on the topic: “Projection-iteration methods for studying periodic solutions of integro-differential equations of Volterra type” for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words. Periodic solution, quasilinear differential and integro-differential equations of the second order, system of integro-differential equations with a small parameter, projection-iteration method, method of successive approximations.

Object of research. Periodic boundary value problem for quasilinear differential and integro-differential equations of the second order of the Volterra type, a system of integro-differential equations of the first order with a small parameter, possessing the property of autonomy.

Subject of research. Study of solvability and construction of solutions of periodic boundary value problems for quasilinear differential and integro-differential equations of the second order of Volterra type, as well as a system of integro-differential equations of the first order with a small parameter, possessing the property of autonomy.

Objectives of the work. Justification of the applicability of the projection-iteration method for studying periodic solutions of quasilinear differential and integro-differential equations of the second order with finite and infinite aftereffect, as well as a system of integro-differential equations of the first order with a small parameter, possessing the property of autonomy.

Research methods and equipment. The following were used to substantiate the projection-iteration method: Galerkin's method, the method of successive approximations, and Green's function.

The results obtained and their novelty. The following inverse statements are proven: the theorem on the existence of Galerkin approximations in the neighborhood of an exact periodic solution, as well as the theorem on the existence of an exact periodic solution in the neighborhood of Galerkin approximations for quasilinear differential and integro-differential equations of the second order, as well as systems of integro-differential equations of the first order with a small parameter and finite aftereffect.

Recommendations for use. It is recommended to extend the results of this work for the study of periodic solutions of quasilinear finite-difference equations of the second order.

Scope of application. Algorithms of the projection-iteration method can be applied in problems of physics, mechanics, mathematical physics and the theory of single-frequency oscillations.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СИМВОЛОВ

1. $C[0, 2\pi]$ – пространство непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций с нормой $|x|_0 = \max_{t \in [0, 2\pi]} |x(t)|$.
2. $C^r(\mathcal{F} \times D \times D \times \mathcal{E})$ – пространство r раз непрерывно дифференцируемых относительно $(t, x, u, \varepsilon) \in \mathcal{F} \times D \times D \times \mathcal{E}$ функций $f(t, x, u, \varepsilon)$ периодических по t с периодом 2π , $\mathcal{F} = [0, 2\pi]$, D ограниченная выпуклая область $R = (-\infty, +\infty)$, $\mathcal{E} \in R$.
3. $|f|_r = \max_{0 \leq \nu \leq r} |D^\nu f|_0$ – дифференциальная норма.
4. $|f|_0 = \max_{\mathcal{F} \times D \times D \times \mathcal{E}} |f(t, x, u, \varepsilon)|$.
5. $\Omega_\delta \subset D$, $\Omega_\delta = \{\alpha: |\alpha - \hat{\alpha}| \leq \delta\}$.
6. $colon(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – матрица столбец.
7. $C_{xx}^2(D)$ – пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций $X(x)$ относительно $x \in D$.
8. $C'_{xy}(\mathcal{F} \times D \times D)$ – пространство непрерывно дифференцируемых относительно $(x, y) \in (D \times D)$ функций $f(x, y, \varepsilon)$.
9. $\hat{x}(t)$ – точное периодическое решение.
10. $\bar{x}_m(t)$ – приближенное периодическое решение.

