Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясы
Математика институту

Ж. Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук университети

Д 01.24.701 Диссертациялык кеңеши

Кол жазма укугунда
УДК 517.968

Бапа кызы Айнура

Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдүү чыгарылыштарын изилдөөдөгү проекциялык-итерациялык методдор

01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу

Физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациянын

Автореферати

Бишкек – 2025

Диссертациялык иш К.Тыныстанов атындагы Ысык-Көл мамлекеттик университетинин математика жана маалыматтык технологиялар кафедрасында аткарылган.

Илимий жетекчи: **Алымбаев Асангул Темиркулович**, физика-математика илимдердин доктору, доцент, И.Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университетинин жаңы информациялык технологиялар институтунун профессорунун милдетин аткаруучу.

Расмий оппоненттер: **Аблабеков Бактыбай Сапарбекович**, физика-математика илимдеринин доктору, профессор, Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин колдонмо математика, информатика жана компьютердик технологиялар кафедрасынын профессору.

Эгембердиев Шайымбек Амантурович физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент, И.Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университетинин М.Р. Рахимова атындагы ККББИ табигый-математикалык дисциплиналар кафедрасынын доценти.

Жетектөөчү мекеме: М.М.Адышев атындагы Ош технологиялык университетинин колдонмо математика жана информатика кафедрасы, Кыргыз Республикасы, 723500, Ош шаары, Исанов көчөсү, 81.

Диссертацияны коргоо Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын математика институтунун жана Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин алдындагы Д 01.24.701 диссертациялык кеңешинин 2025-ж. 16-мартында, саат 14:00дө, 720001, Кыргыз Республикасы, Бишкек ш., Абдымомунов көчөсү 328, 126-бөлмө дарегинде өтө турган отурумунда болот. Диссертацияны коргоонун видеоконференциясына кирүү үчүн шилтеме: https://vc1.vak.kg/b/d_0-qxu-6yv-biz

Диссертация менен Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын (720071, Бишкек шаары, Чүй проспекти 265-а) жана Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин (720033, Бишкек шаары, Фрунзе көчөсү 547) китепканаларынан жана Улуттук аттестациялык комиссиянын сайтынан таанышууга болот: https://stepen.vak.kg/diss_sovety/d-01-24-701/

Диссертациялык кеңештин окумуштуу катчысы, физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент Шаршембиева Ф. К.

ИЗИЛДӨӨНҮН ЖАЛПЫ МҮНӨЗДӨМӨСҮ

Диссертациянын темасынын актуалдуулугу. Көптөгөн физикалык маселелерди изилдөө дифференциалдык жана чектүү же чексиз таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелердин системаларынын мезгилдик чыгарылыштарын окуп-үйрөнүүгө келтирилет.

Бул теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарын изилдөө үчүн А. Пуанкаре (1879-1912 ж.), Н.М. Крылов (1912-1955 ж.), Н.Н. Боголюбов (1934-1991 ж.), Ю.А. Митропольский (1951-2006 ж.), А.М. Самойленко (1973-1976 ж.) жана башка авторлор тарабынан түзүлгөн сапаттык, аналитикалык жана асимптотикалык ыкмалар бар. Аталган ыкмалар кичине параметрди кармаган, сызыктуу эместүүлүктүн эффектиси жай байкалган теңдемелер системалар үчүн ийгиликтүү колдонулат. Бирок, жалпы түрдөгү сызыктуу эмес теңдемелерди изилдөөдө алардын колдонулушу чектүү сандагы теңдемелердин класстары менен чектелет.

Бул жагдайга ылайык азыркы учурда жалпы түрдөгү сызыктуу эместүүлүгү күчтүү теңдемелер үчүн колдонулуучу ыкмаларды иштеп чыгуу жана колдонуу маанилүү, ошондой эле актуалдуу маселелердин бири болуп эсептелет.

Диссертациялык иште экинчи тартиптеги квазисызыктуу дифференциалдык, интегро-дифференциалдык жана автономдук касиетке ээ, кичине параметрди кармаган интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарынын жашашын изилдөө жана тургузуу маселеси каралган. Изилдөөдө Галеркин методунун идеяларын жана удаалаш жакындатуу ыкмасын айкалыштыруу менен проекциялык-итерациялык ыкма колдонулат жана негизделет. Бул суроолорду чечүү иштин актуалдуулугун аныктайт.

Диссертациянын темасынын окуу жана илимий мекемелер тарабынан жүргүзүлүүчү негизги изилдөө иштери менен байланышы.

Диссертациянын темасы боюнча изилдөө иштери К.Тыныстанов атындагы Ысык-Көл мамлекеттик университетинин окумуштуулар кеңеши тарабынан бекитилген «Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдүү чыгарылыштарын изилдөөнүн проекциялык-итерациялык методдору» деген теманын алкагында жүргүзүлдү. Протокол №2, 02.11.2021 ж.

Изилдөөнүн максаты жана коюлган маселелер. Диссертациялык иштин максаты , экинчи тартиптеги квазисызыктуу дифференциалдык жана чектүү, чексиз кечигип таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелердин, ошондой эле автономдук касиетке ээ, кичине параметрди кармаган биринчи тартиптеги интегро-дифференциалдык теңдемелердин системасынын мезгилдик чыгарылыштарын изилдөөдө проекциялык-итерациялык методдун колдонулушун негиздөө.

Иштин максатына жетүү үчүн төмөндөгүдөй маселелер чечилди:

1. Так мезгилдик чыгарылыштын аймагында Галеркиндин жакындашуусунун жашашын далилдөө жана жакындаштырылган жана так мезгилдик чыгарылыштардын айырмасынын катасын баалоо;

2. Тескерисинче Галеркиндин жакындашуусунун аймагында так мезгилдик чыгарылыштын жашашын далилдөө жана алардын айырмасынын катасын баалоо;

3. Гармоникалык баланс ыкмасынын негизинде Ван-дер-Польдун чектүү таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелер системасынын, Дюффингдин кечиккен аргументтүү биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемесинин жана Ван-дер-Польдун экинчи тартиптеги кечиккен аргументтүү теңдемесинин мезгилдик чыгарылыштарын биринчи жакындаштырууда тургузуу. Жакындаштырылган мезгилдик чыгарылыштын амплитуда-жыштык мүнөздөмөсүнө кечигүү параметринин таасиринин чоңдугун аныктоо;

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы.

– экинчи тартиптеги квазисызыктуу дифференциалдык жана чектүү, чексиз таасирлеген интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарынын жашашын изилдөөдө жана жакындаштырып тургузууда проекциялык-итерациялык методдун колдонулушун негиздөө;
– өз ара тескери тыянактар далилденген: экинчи тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн так мезгилдик чыгарылыштын аймагында Галеркиндин жакындашуусунун жашашы жана Галеркиндин жакындашуусунун аймагында так мезгилдик чыгарылыштын жашашы тууралуу теоремалар далилденген;
– кичине параметрди кармаган, чектүү таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелердин системасынын мезгилдик чыгарылышын тургузуу үчүн проекциялык-итерациялык методдун колдонулушунун негиздөөсү берилген;
– гармоникалык баланс ыкмасынын негизинде чектүү таасирленген Ван-дер-Польдун интегро-дифференциалдык теңдемелер системасынын, Дюффингдин кечиккен аргументтүү дифференциалдык теңдемесинин жана Ван-дер-Польдун кечиккен аргументтүү экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемесинин, мезгилдик чыгарылыштарынын биринчи жакындашуусун тургузуу маселеси каралган жана анализденген.

Алынган натыйжалардын теориялык жана практикалык мааниси. Диссертацияда алынган илимий жыйынтыктар теориялык жана колдонмо мүнөзгө ээ. Диссертициялык иштин жыйынтыктарын жаңы класстагы дифференциалдык, интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарын изилдөөдө колдонууга болот. Иштелип чыккан ыкмалардын алгоритмдери конкреттүү моделдик теңдемелердин чыгарылыштарын табууга мүмкүндүк берет, илимдин жана техниканын ар кандай областтарындагы маселелерди изилдөөгө ылыйыкташтырууга болот.

Диссертациянын коргоого алып чыгылуучу негизги жоболору.

– Галеркиндин проекциялык ыкмасы менен экинчи тартиптеги дифференциалдык жана чектүү, чексиз таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелердин так

мезгилдик чыгарылыштарынын аймагында жакындаштырылган мезгилдик чыгарылышынын жашашын далилдөө. Жакындаштырылган жана так чыгарылыштардын айырмасынын катасынын өлчөмүн баалоону көрсөтүү;

– Грин функциясынын негизинде, удаалаш жакындаштыруу методу менен экинчи тартиптеги дифференциалдык жана чектүү, чексиз таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелердин так мезгилдик чыгарылыштарынын Галеркиндин жакындашуусунун аймагында жашашын далилдөө. Алардын айырмаларынын катасынын чоңдугун баалоо;
– кичине параметрлүү, чектүү таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелердин системасынын мезгилдик чыгарылышын изилдөөдө проекциялык-итерациялык методду колдонууга боло тургандыгы;
– гармоникалык баланс ыкмасынын негизинде чектүү таасирленген Ван-дер-Польдун интегро-дифференциалдык теңдемелер системасынын, Дюффингдин кечиккен аргументтүү дифференциалдык теңдемесинин жана Ван-дер-Польдун экинчи тартиптеги кечиккен аргументтүү дифференциалдык теңдемесинин мезгилдик чыгарылыштарынын биринчи жакындаштырууларын аныктоо. Жакындаштырылган мезгилдик чыгарылыштын амплитуда-жыштык мүнөздөмөсүнө кечигүү параметринин таасиринин чоңдугун көрсөтүү.

Изилдөөнүн методдору. Проекциялык-итерациялык методду негиздөөдө колдонулган ыкмалар: Галеркиндин методу, удаалаш жакындаштыруу ыкмасы, Грин фукциясы, автономдук системаны автономдук эмес системага келтирүү ыкмасы жана Фурьенин тригонометриялык катары.

Изденүүчүнүн жеке салымы. Диссертациялык изилдөөнүн натыйжалары изденүүчү тарабынан алынган.Маселенин коюлушу жана анын жыйынтыктарын анализдөө илимий жетекчиси А.Т. Алымбаевдин жетекчилиги менен ишке ашырылган. Анын жетекчилиги менен изилдөөнүн негизги багыты аныкталып, негизги методологиялык ыкмалар иштелип чыккан. Теоремалардын далилденишин, анын тыянактарын аныктоо жана иллюстративдик материалдарды түзүү изденүүчүгө тиешелүү. Изденүүчү изилдөөнүн жыйынтыктарын эл аралык илимий-практикалык конференцияларда апробациялоого активдүү катышып, докладдарды талкуулоолордон оң пикир жана изилдөөнү улантуу тууралуу сунуштарды алган.

Диссертациянын жыйынтыктарын апробациялоо. Иштин жыйынтыгы эл аралык жана республикалык илимий конференцияларда баяндалган жана талкууланган:

–«СССР доору: мезгилге баа берүү» Эл-аралык илимий-практикалык конференциясы. К.Тыныстанов атындагы ЫМУ, 14-15-октябрь 2021-ж. Каракол
–Профессор Торогельдиева К.М. 70-жылдык юбилейине жана «Математика жана аны окутуунун технологиялары» кафедрасынын 70- жылдыгына арналган «Санариптештирүү шартында табигый математикалык илимдерди окутуу технологияларынын маселелери жана келечеги» аттуу эл-аралык илимий -

практикалык конференциясы. И. Арабаев атындагы КМУ, 21-22-май 2022-ж. Бишкек ш.

–«Кыргызстандын өнүгүүсүндөгү Каракол шаарынын тарыхый - агартуучулук мааниси» Эл-аралык илимий-практикалык конференциясы. К.Тыныстанов атындагы ЫМУ, 10-11-июнь 2022-ж. Каракол ш.

–КР баатыры, мамлекеттик жана коомдук ишмер А.Масалиевдин 90- жылдыгына карата «Ааламдаштыруу доорунда коомду, билим берүүнү жана илимди туруктуу өнүктүрүүнүн заманбап, санариптик трансформациялары: өткөндүн тажрыйбасы, учурдун мүмкүнчүлүктөрү, келечектин стратегиялары» Эл-аралык илимий-практикалык конференциясы. БатМУ, 28-29 апрель 2023-ж. Баткен ш.

– КР УИАнын ардактуу академиги, КР УИАнын корреспондент-мүчөсү, ф.-м. и. д., профессор Келдибай Алымкуловдун 80-жылдыгына арналган «Математика жана билим берүүнүн актуалдуу маселелери» Эл-аралык илимий конференциясы. ОшМУ, 12-13-май, 2023-ж.Ош ш.

– КР Эл мугалими, Илим жана техника жаатындагы мамлекеттик сыйлыктын лауреаты, КР УИА нын мүчө-корр., КББА нын академиги, п.и.д., проф. И.Бекбоевге арналган “И.Бекбоевдик алтынчы окуулары: билим берүүнүн заманбап моделинин көйгөйлөрү: актуалдуу маселелер, жетишкендиктер жана инновациялар” илимий-практикалык конференциясы.ТалМУ, 8-9 июнь 2023-ж. Талас ш.

– КР УИАнын 70- жылдыгына жана КР УИАнын Математика институтунун 40 -жылдыгына арналган “V Бөрүбаев окуулары” эл-аралык илимий конференциясы. КР УИА МИ, 20-21-июнь, 2024-ж. Бишкек ш.

Диссертациянын натыйжаларынын жарыяланышы. Диссертациянын негизги мазмуну 15 илимий макалага жарыяланып, анын ичинен 4 макала РИНЦ тин илимий базасына кирген илимий журналдарда жарыяланган, ал эми 2 макаланын импакт-фактору 0,1ден жогору. Макалалардын бири Web of Science маалымат базасында жарыяланган.

Диссертациянын структурасы жана көлөмү. Диссертациялык иш кыскартуулардын жана белгилөөлөрдүн тизмегинен, киришүү, 12 бөлүмдү камтыган төрт главадан, корутундудан, 73 сандагы колдонулган булактардын тизмесинен турат.Компьютердик текстте басылган барактардын саны 112 .

ДИССЕРТАЦИЯНЫН НЕГИЗГИ МАЗМУНУ

Киришүүдө ишти изилдөөнүн максаты жана маселелери чагылдырылган, теманын актуалдуулугу негизделген, илимий жаңылыгы, практикалык жана теориялык баалуулугу каралган.

Биринчи главада Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык тендемелердин мезгилдик чыгарылыштарын проекциялык-итерациялык ыкма менен изилдөөгө арналган жана диссертациялык иште каралуучу маселелерге жакын болгон илимий иштердин кыскача обзору берилген.

Галеркиндин проекциялык ыкмасынын негиздери В.Ритц, Б.Г.Галеркиндин, Л.В. Канторовичтин, М.В. Келдыштин, И.В. Свирскийдин, Н.Н.Польскийдин ж.б.авторлордун эмгектеринде түптөлүп түзүлгөн.

Автономдуу жана автономдуу эмес дифференциалдык теңдемелердин жана кечиккен аргументтүү дифференциалдык теңдемелердин системаларынын, ар кандай класстагы интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарын тургузуунун маселелери М.Урабе, А.М. Самойленко, О.Д.Нуржанов, Б. Вуйтович, А.Т. Алымбаев, А.Б. Кибенко, П.П.Забрейко, С.О. Стрыгин, A.Stokes, Yamomoto Noro ж.б. авторлордун эмгектеринде чагылдырылган.

Гармоникалык баланс ыкмасы Галеркиндин ыкмасынын классына кирип, аны негиздеп иштеп чыгуу маселеси Н.М.Крылов жана Н.Н. Боголюбов тарабынан ишке ашырылган.Гармоникалык баланс ыкмасын өнүктүрүү, колдонуу Е.Н.Розенвассер, Л.Чезари, Дж.Хейл сыяктуу авторлор тарабынан дагы каралган.Гармоникалык баланс методунун эффективдүү варианттардын бири сызыктуу эмес динамикалык системалардын математикалык моделдеринин пределдик циклдерин аныктоо үчүн А.А.Кондратьева, S.Zebik, B.Delamotte тарабынан иштелип чыгып, сунушталган.

Дифференциалдык теңдемелердин системасына карата Галеркиндин ыкмасын колдонууну негиздөө маселесине арналган М.Урабенин эмгегине өзгөчө көңүл буруууга болот

$$\frac{dx(t)}{dt} = X\big(t, x(t)\big), \tag{1}$$

мында $X(t,x)$- t боюнча 2π мезгилдүү вектор-функция.

М.Урабе өзүнүн эмгегинде Галеркиндин методу боюнча так жана жакындаштырылган чыгарылыштардын ортосундагы байланыштардын жалпы теоремасын далилдеген. Ал жакындаштырылган мезгилдик чыгарылыштын бар экендиги жөнүндөгү шарттaшуудан, (1) системанын так мезгилдик чыгарылышы болоорун, тескерисинче так мезгилдик чыгарылыштын аймагында жакындаштырылган мезгилдик чыгарылыштын жашашы тууралуу ырастоону далилдеген.

Экинчи глава квазисызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык чектүү жана чексиз таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарын изилдөөнүн методология жана меттоддоруна арналган. 2.1 пунктта изилдөөнүн объектиси, предмети жана маселеси аныкталган. 2.2 пунктта экинчи тартиптеги дифференциалдык жана чектүү, чексиз таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылышын проекциялык-итерациялык ыкма боюнча тургузууга жана негиздөөгө мүмкүндүк бере турган зарыл аппараттар каралган.

Экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени карайлы

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t), \tag{2}$$

мында $f(t) - 2\pi$- мезгилдүү, Фурьенин тригонометриялык катарына ажыралуучу функция

$$f(t) = \text{c}_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}(c_k coskt + d_k sinkt). \quad (3)$$

Мезгилдик функциялардын көптүгүндө S_m оператору каралат

$$S_m f(t) = \text{c}_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}(c_k coskt + d_k sinkt).$$

(3) туюнтманы эске алып, (2) теңдемени төмөндөгүдөй түрдө жазабыз:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \text{c}_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}(c_k coskt + d_k sinkt) \quad (4)$$

Теорема 1. $\hat{x} = \hat{x}(t)$ (4) теңдеменин 2π-мезгилдүү чыгарылышы болсун дейли. Эгерде

$$\text{c}_0 = 0, \qquad \hat{x}(0) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\text{c}_k}{k^2}, \quad \frac{d\hat{x}(0)}{dt} = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k},$$

анда 2π-мезгилдүү $\hat{x} = \hat{x}(t)$ чыгарылышы

$$\hat{x}(t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,(-c_k coskt + d_k sinkt)$$

формуласы аркылуу аныкталат.

Теорема 2. $\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)$ айырмасынын чоңдугу төмөндөгүдөй барабарсыздыктар аркылуу бааланат

$$|\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)|_0 \leq \sigma(m)|f|_0,$$
$$\|\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)\|_0 \leq \sigma_1(m)\|f\|_0,$$

мында

$$\sigma(m) = \left[\frac{2}{(m+1)^4} + \frac{2}{(m+2)^4} + \cdots\right]^{1/2}, \quad \sigma_1(m) = \frac{\sqrt{2}}{(m+1)^2}.$$

Төмөндөгүдөй алгебралык теңдемелердин системасынын чечилишинин критерийи каралат

$$D\alpha + F(\alpha) = 0, \quad (5)$$

$D -$ чыныгы матрица, $detD \neq 0, F(0) = 0$, жана $\frac{\partial F(0)}{\partial \alpha} \neq 0.$

Теорема 3. (5) системанын жакындаштырылган $\alpha = \bar{\alpha}$ чыгарылышы бар болуп, $\delta > 0, \eta > 0$ жана $0 < \chi < 1$ үчүн төмөнкүдөй шарттар аткарылсын:

1. $\Delta_\delta = \{\alpha: \|\alpha - \bar{\alpha}\| \leq \delta\} \subset \Delta.$
2. $\|D^{-1}[F(\bar{\alpha})] + \bar{\alpha}\| \leq \eta \qquad \left\|\frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha}\right\| \leq \frac{\chi}{M} \qquad M = \|D^{-1}\|$
3. $\frac{\eta}{1-\chi} \leq \delta,$

анда, Δ_δ областында (5) системасынын жалгыз $\alpha = \hat{\alpha}$ чыгарылышы болот жана $\|\hat{\alpha} - \bar{\alpha}\| \leq \delta$ баалоосу орун алат.

Алгебралык теңдемелердин системасын карайлы

$$D\alpha + F_1(\alpha) + F_2(\alpha, \varepsilon) = 0\,, \tag{6}$$

мында α, F_1, F_2- бирдей өлчөмдөгү вектор-функциялар.

F_1, F_2 – Δ областында үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функциялар, ошондой эле $F_1(0) = F_2(\alpha, 0) = 0,\quad F_2(0, \varepsilon) \neq 0$ жана $\frac{\partial F_1(0)}{\partial \alpha} \neq 0$, D- чыныгы, $detD \neq 0$ матрица, $\varepsilon -$ чексиз кичине параметр.

Теорема 4. (6) системанын жакындаштырылган $\alpha = \bar{\alpha}(\varepsilon)$ чыгарылышы бар болсун дейли, мында $\bar{\alpha}(0) = 0$. Ошондой эле $\delta > 0, \eta > 0, \varepsilon > 0$ турактуулары бар болуп жана $0 < \chi < 1$ үчүн төмөндөгүдөй шарттар аткарылсын:

1. $\Delta_\delta = \{\alpha: \|\alpha - \bar{\alpha}\| \leq \delta\} \subset \Delta$.
2. $\|D^{-1}[F_1(\bar{\alpha}) + F_1(\bar{\alpha}, \varepsilon)] + \bar{\alpha}\| \leq \eta \quad \left\|\frac{\partial F_1(\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_1(\alpha,\varepsilon)}{\partial \alpha}\right\| \leq \frac{\chi}{M} \qquad M = \|D^{-1}\|$
3. $\frac{\eta}{1-\chi} \leq \delta$,

анда (6) система Δ_δ областында жалгыз $\alpha = \hat{\alpha}(\varepsilon)$ чыгарылышына ээ болот $\hat{\alpha}(0) = 0$ жана $\|\hat{\alpha}(\varepsilon) - \bar{\alpha}(\varepsilon)\| \leq \frac{\eta}{1-\chi}$ баалоосу орун алат.

Үчүнчү главада экинчи тартиптеги квазисызыктуу дифференциалдык жана чектүү, чексиз таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарын проекциялык-итерациялык ыкма аркылуу табууга мүмкүн экендигин негиздөө маселеси каралган

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Ax + f(t, x) \tag{7}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Ax + f\left(t, x(t), \int_{t-\tau}^{t} \varphi\big(t, s, x(s)\big)ds\right) \tag{8}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Ax + f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^{t} \varphi\big(t, s, x(s)\big)ds\right). \tag{9}$$

(7) теңдеменин 2π-мезгилдүү чыгарылышы

$$\bar{x}_m(t) = \bar{a}_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}\big(\bar{a}_k coskt + \bar{b}_k sinkt\big), \tag{10}$$

түрүндө изделет жана коэффициенттери

$$\frac{d^2\bar{x}_m(t)}{dt^2} = A\bar{x}_m(t) + S_m f\big(t, \bar{x}_m(t)\big)$$

же

$$D^{(m)}\bar{\alpha} + F^{(m)}(\bar{\alpha}) = 0 \tag{11}$$

$$D^{(m)} = \begin{pmatrix} A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & A+k^2 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & A+k^2 \end{pmatrix}, F^{(m)}(\alpha) = \begin{pmatrix} A_0^{(m)} \\ \vdots \\ A_k^{(m)} \\ B_k^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 \\ \vdots \\ \bar{a}_k \\ \bar{b}_k \end{pmatrix}.$$

$$k = \overline{1,m}.$$

$$A_0^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} f(t, \bar{x}_m(t))\,dt, \quad A_k^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} f(t, \bar{x}_m)\,cosktdt,$$

$$B_k^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} f(t, \bar{x}_m)\,sinktdt$$

түрдөгү алгебралык теңдемелердин системасынан аныкталат.

3.1 пунктта (11) теңдеменин чечилиши жана $\bar{x}_m(t)$ чыгарылышы $m \to \infty$ учурда (7) теңдеменин 2π-мезгилдүү $\hat{x}(t)$ так чыгарылышына умтулаары көрсөтүлөт б.а. 2π-мезгилдүү $\hat{x}(t)$ так чыгарылыштын аймагында 2π-мезгилдүү жакындаштырылган чыгарылыштын жашаары далилденет.

Теорема 5. (7) дифференциалдык теңдеме, төмөндөгүдөй шарттарды канагаттандырсын:

1. $D\epsilon R = (-\infty; +\infty)$ областында 2π-мезгилдүү $\hat{x}(t)$ так чыгарылыш жашасын;
2. Теорема 4 шарттары аткарылсын;
3. $\left\| \hat{\alpha} + \left[D^{(m)}\right]^{-1} F^m(\hat{\alpha}) \right\| \leq \sigma_1(m) K |f|_1 \|f\|_0, \quad K = \left\| \left[D^{(m)}\right]^{-1} \right\|$;
4. $\left\| \frac{\partial F^m(\alpha)}{\partial \alpha} \right\| \leq \frac{\chi}{K}, \; 0 < \chi < 1,$

анда, $m_0 -$ эң чоң саны табылып, бардык $m \geq m_0$ үчүн, (7) теңдеменин 2π-мезгилдүү $\bar{x}_m(t)$, жакындаштырылган чыгарылышы жашайт жана $m \to \infty$ умтулганда, $x = \hat{x}(t)$ так чыгарылышка бир калыпта жыйналат, так жана жакындаштырылган чыгарылыштардын ортосундагы айырманын чоңдугу

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \leq \frac{\sqrt{2}|f|_0(1 + |f|_1)}{m^2(1-\chi)}$$

барабарсыздыктын өлчөмү менен аныкталат.

3.2 пунктта төмөндөгүдөй дифференциалдык теңдеме каралат.

$x''(t) - Ax(t) = 0, \quad A > 0$ теңдеменин

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{A}} e^{\sqrt{A}(s-t)}, & -\infty < t \leq s, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{A}} e^{\sqrt{A}(t-s)}, & s < t < +\infty. \end{cases} \tag{12}$$

$$G(t, t-0) - G(t, t+0) = 0, \quad G'_t(t, t-0) - G'_t(t, t+0) = 1. \tag{13}$$

касиетке ээ болгон (12) Грин функциясы аркылуу, (7) дифференциалдык теңдемени, интегралдык теңдемеге келтиребиз

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f\big(s,x(s)\big)ds. \qquad (14)$$

теорема 5 тескери ырастоосу далилденди б.а. (7) теңдеменин жакындаштырылган 2π-мезгилдүү $\bar{x}_m(t)$ чыгарылышынын аймагында, анын 2π-мезгилдүү так $\hat{x}(t)$ чыгарылышы болоору далилденди.

Теорема 6. $x = x(t)$ функциясы (7) теңдеменин чыгарылышы болсун жана (13) касиетке ээ болгон (12) Грин функциясы жашасын. Анда $x = x(t)$ функциясы (14) интегралдык теңдеменин дагы чыгарылышы боло алат.

Теорема 7. Теорема 6 шарттары орун алсын. Эгерде $q = \frac{2M\cdot|f|_1}{\lambda} < 1$ шарты аткарылса, анда (14) интегралдык теңдеменин 2π-мезгилдүү $x = \hat{x}(t)$ чыгарылышы (7) дифференциалдык теңдеменин дагы мезгилдик чыгарылышы боло алат жана $\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)$ айырмасы үчүн төмөндөгүдөй баалоо орун алат

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 < \frac{2\sqrt{2}M|f|_0}{m^2(1-q)}.$$

3.4, 3.5, 3.6 пункттарда 3.2 пункта алынган жыйынтыктар төмөндөгүдөй интегро-дифференциалдык теңдемеге жайылтылат

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \mathrm{A}x(t) + f(t,x(t), \int_{t-\tau}^{t} \varphi(t,s,x(s)ds) \qquad (15)$$

$A > 0$, $f(t,x,u), \varphi(t,s,x) -$ үзгүлтүксүз-дифференцирленүүчү, t,s боюнча 2π-мезгилдүү функциялар, $\tau = const > 0$,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Ax(t) + f(t,x(t), \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-s,x(s))ds)\ , \qquad (16)$$

Мында, $\varphi\big(t-s,x(s)\big) -$ t,s боюнча үзгүлтүксүз жана x боюнча дифференцирленүүчү

$$\left|\varphi'_x\big(t-s,x(s)\big)\right|_0 \le K_0e^{-\gamma(t-s)}, \qquad \text{при } t,s \in R, \qquad K_0 > 0, \gamma > 0. \qquad (17$$

барабарсыздыгын канагаттандыруучу функция.

(15), (16) теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарын

$$\bar{x}_m(t) = \bar{a}_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}\big(\bar{a}_k coskt + \bar{b}_k sinkt\big). \qquad (18)$$

түрдө издейбиз.

(18) катарды (15) коюп

$$\frac{d^2\bar{x}_m(t)}{dt^2} = A\bar{x}_m(t) + S_m f\left(t, \bar{x}_m(t), \int_{t-\tau}^{t} \varphi\big(t,s,\bar{x}_m(s)\big)ds\right),$$

мындан

$$D^{(m)}\bar{\alpha} + F^{(m)}(\bar{\alpha}) = 0 \tag{19}$$

$$D^{(m)} = \begin{pmatrix} A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & A+k^2 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & A+k^2 \end{pmatrix}, F^{(m)}(\alpha) = \begin{pmatrix} A_0^{(m)} \\ \vdots \\ A_k^{(m)} \\ B_k^{(m)} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 \\ \vdots \\ \bar{a}_k \\ \bar{b}_k \end{pmatrix}.$$

$k = \overline{1, m}.$

$$A_0^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} f\big(t, \bar{x}_m(t), u_m(t)\big)dt,$$

$$A_k^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} f\big(t, \bar{x}_m(t), u_m(t)\big)cosktdt,$$

$$B_k^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} f\big(t, \bar{x}_m(t), u_m(t)\big)sinktdt, \quad u_m(t) = \int_{t-\tau}^{t} \varphi\big(t, s, \bar{x}_m(s)\big)ds, \ k = 1,2,..$$

Теорема 8. (15) интегро-дифференциалдык теңдеменин $2\pi -$ мезгилдүү $\hat{x}(t)$чыгарылышы бар болсун жана ал төмөндөгү шарттарды канагаттандырсын:

а) теорема 2 талаптары орун алсын;

б) $\left\| \hat{\alpha} + \left(D^{(m)}\right)^{-1} F^{(m)}(\hat{\alpha}) \right\| \le \sigma_1(m) K \|f\|_0 |f|_1 (1 + |\varphi|_1 \tau);$

в) $\left\| \frac{\partial F^{(m)}(\alpha)}{\partial \alpha} \right\| \le \frac{\chi}{K}, \quad 0 < \chi < 1, \quad \sigma_1(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2},$

анда (19) алгебралык теңдеме $\bar{\alpha} = \left(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \cdots, \bar{a}_m, \bar{b}_m\right)$ түрдөгү жалгыз чыгарылышка ээ болот, $\hat{x}(t)$ так жана $\bar{x}_m(t)$ жакындаштырылган чыгарылыштардын ортосундагы айырма үчүн

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \le \frac{\sqrt{2}|f|_0[1 + K|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau)]}{m^2(1-\chi)}, \quad m \to \infty$$

баалоосу орун алат.

(18) катарды (16) теңдемеге коюп, бул теңдеме үчүн (19) алгебралык теңдеме сыяктуу алгебралык теңдемени алабыз

$$D^{(m)}\bar{\alpha} + F^{(m)}(\bar{\alpha}) = 0 \tag{20}$$

мында

$$u_m(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(t - s, x(s))\, ds.$$

(16) теңдеме үчүн (17) шарты орун алса, анда теорема 6 сыяктуу жыйынтыкты алууга болот жана $\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)$ айырма үчүн

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \leq \frac{\sqrt{2}|f|_0[1 + |f|_1(K + \gamma)]}{m^2(1 - \chi)}, \quad m \to \infty$$

баалоосун көрсөтүүгө болот.

3.6.пункт (15) интегро-дифференциалдык теңдеменин мезгилдик чыгарылышын изилдөөнүн проекциялык-итерациялык ыкмасынын дагы бир вариантына арналып, мезгилдик $x(t)$ чыгарылыш менен жакындаштырылган чыгарылыштын $x_i^m(t)$ ортосундагы айырмалардын катасынын чоңдугу үчүн төмөндөгүдөй баалоонун аткарылышы көрсөтүлдү

$$|x(t) - x_i^m(t)|_0 \leq \frac{\lambda^i}{2A\lambda(1 - \lambda)}\left[\big(1 + \gamma(m)\big)|f|_0 + 2A|x_0(t)|_0\right], \quad i = 0,1,2, \ldots (21)$$

Төртүнчү глава кичине параметрлүү, автономдук касиетке ээ болгон интегро-дифференциалдык теңдемелердин системасынын мезгилдик чыгарылышын изилдөө маселесине арналат

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{X}(x) + \varepsilon f(x, \int_t^{t+T_0} P(t - s, x(s)ds, \varepsilon), \qquad (22)$$

дүүлүкпөгөн ($\varepsilon = 0$) системанын $\frac{2\pi}{\omega_0}$ мезгилдүү $x = x_0(\omega_0 t)$ чыгарылышы болсун, деген шарт аткарылсын.

4.1 пунктта өзгөрмөнү алмаштыруу менен

$$x(\varphi) = x_0(\varphi) + B(\varphi)h, \qquad (23)$$

мында $B(\varphi)-$ $n \times (n-1)$-өлчөмдүү 2π-мезгилдүү матрица, (22) система, 2π-мезгилдүү системага келтирилет:

$$\frac{dh}{d\varphi} = \frac{G_1(\varphi, h)}{\omega_0 + \mathcal{F}_1(\varphi, h) + f_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_\varphi^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big)d\varphi_1, \varepsilon\right)} +$$

$$+ \frac{g_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_\varphi^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big)d\varphi_1, \varepsilon\right)}{\omega_0 + \mathcal{F}_1(\varphi, h) + f_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_\varphi^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big)d\varphi_1, \varepsilon\right)}. \qquad (24)$$

Мисал катары Дюффингдин интегро-дифференциалдык теңдемесин, автономдук эмес теңдемелер системасына келтирүү маселеси каралган:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - \varepsilon_1 x^3 + \varepsilon \int_t^{t+T_0} x(s)ds,$$

мында $\varepsilon_1 -$ жетишээрлик кичине сан, $\varepsilon -$кичине параметр, $T_0 > 0$.

4.2 пунктта (24) системаны

$$\frac{dh}{d\varphi} = C(\varphi)h + \mathcal{F}(\varphi, h) + H\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_\varphi^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big)d\varphi_1, \varepsilon\right) \quad (25)$$

түрүндө жазып алуу менен (25) системанын мезгилдик чыгарылышын изилдөө үчүн проекциялык-итерациялык ыкманы колдонууга боло тургандыгы көрсөтүлгөн. (25) системанын мезгилдик чыгарылышы тригонометриялык полином түрүндө изделет

$$h_m(\varphi) = a_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{m}(a_n cosn\varphi + b_n sinn\varphi) \ . \qquad (26)$$

$$D^{(m)}\alpha + F_1^{(m)}(\alpha) + F_1^{(m)}(\alpha,\varepsilon) = 0, \qquad (27)$$

$a_0, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ коэффициенттерин (27) алгебралык теңдемелер системасынан аныктайбыз.

$G(\varphi,\tau)$ символу аркылуу

а) $G(\tau+0,\tau) - G(\tau-0,\tau) = E,\ E$ –бирдик матрица;

б) $\|G(\varphi,\tau)\| \le M_0 e^{-\lambda_0|\varphi-\tau|}, \qquad \varphi,\tau \in R,$

касиеттерге ээ болгон жана

$$\frac{dh(\varphi)}{d\varphi} = C(\varphi)h(\varphi), \qquad (28)$$

системаны канагаттандырган Грин функциясын белгилейбиз.

Теорема 9. (28) системанын а), б) касиеттерине ээ болгон $G(\varphi,\tau)$ Грин функциясы бар болсун, анда $detD^{(m)} \neq 0$ жана (27) системаны

$$\alpha = -\left(D^{(m)}\right)^{-1}\left(F_1^{(m)}(\alpha) + F_1^{(m)}(\alpha,\varepsilon)\right), \qquad (29)$$

түрдө жазууга болот.

(29) системаны удаалаш жакындаштыруу методу менен чыгарабыз

$$\alpha_{k+1} = -\left(D^{(m)}\right)^{-1}\left[F_1^{(m)}(\alpha_k) + F_2^{(m)}(\alpha_k,\varepsilon)\right], \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (30)$$

Теорема 10. (28) системанын , $R \times E,\ E = [0,\varepsilon_0],\ R = (-\infty,+\infty)$ областында φ боюнча 2π-мезгилдүү $\hat{h}(\varphi,\varepsilon)$ чыгарылышы бар болсун жана төмөндөгүдөй шарттарды канагаттандырсын:

а) $\hat{h}_m(\varphi,\varepsilon) = S_m\hat{h}(\varphi,\varepsilon) = \hat{a}_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{m}\left(\hat{a}_n cosn\varphi + \hat{b}_n sinn\varphi\right)$;

б) $\left\|\frac{\partial F_1^{(m)}(\hat{\alpha})}{\partial\alpha} + \frac{\partial F_2^{(m)}(\hat{\alpha},\varepsilon)}{\partial\alpha}\right\| \le \frac{\chi}{M}, \qquad 0 < \chi < 1,\ M = \left\|\left(D^{(m)}\right)^{-1}\right\|$;

в) $\frac{dh(\varphi)}{d\varphi} = C(\varphi)h(\varphi)$ сызыктуу система $G(\varphi,\tau)$ Грин функциясына ээ болуп, төмөндөгүдөй шарттарды канагаттандырсын:

1) $G(\tau+0,\tau) - G(\tau-0,\tau) = E; \quad E$ – бирдик матрица;

2) $\|G(\varphi,\tau)\| \le M_0 e^{-\lambda_0|\varphi-\tau|}, \qquad \varphi,\tau\epsilon R\ , \quad \varphi \neq \tau\ ,$ мында M_0, λ_0 –оң маанидеги турактуулар;

3) $\frac{\eta_m}{1-\chi} \le \delta,$ при $\alpha\epsilon\Delta_\delta = \{\alpha: \|\alpha - \hat{\alpha}\| \le \delta\},$

$\eta_m = \sigma_1(m)MK|Ch + \mathcal{F} + H|_1,\ K = \|C\|_0 + |\mathcal{F}|_1 + |H|_1\,(1 + T_0)|P_1|_1)$

анда $\hat{h}(\varphi,\varepsilon)$ так чыгарылыштын аймагында Галеркиндин $\bar{h}_m(\varphi,\varepsilon)$ жакындаштырылган чыгарылышы жашайт $\left|\hat{h}(\varphi,\varepsilon) - \bar{h}_m(\varphi,\varepsilon)\right|_0$ айырмасы үчүн төмөндөгүдөй баалоо орун алат:

$$\left|\hat{h}(\varphi,\varepsilon)-\bar{h}_m(\varphi,\varepsilon)\right|_0 \le \frac{\sqrt{2}}{m}\left(1+\frac{\sqrt{2m+1}MK}{1-\chi}\right)|Ch+\mathcal{F}+H|_0, \ \ m\to\infty.$$

4.3 пунктта теорема 9 тескери тыянагы далилденет. Галеркиндин жакындашуусунун $\bar{h}_m(\varphi,\varepsilon)$ аймагында (25) системанын так мезгилдик чыгарылышынын жашашы далилденет.

Теорема 11. (25) интегро-дифференциалдык теңдемелердин системасы төмөндөгүдөй шарттарды канагаттандырсын :

а) $m \ge m_0$, санынын бардык маанилери үчүн , D областында Галеркиндин $\bar{h}_m(\varphi,\varepsilon)$ жакындаштырылган мезгилдик чыгарылыштары бар болсун;

б) $\frac{dh}{d\varphi}=C(\varphi)h$ сызыктуу системасы 9 теореманын 1), 2) касиеттерине ээ болгон $G(\varphi,\tau)$ Грин функциясы бар болсун;

в) $\chi=\frac{2M_0}{\lambda_0}(|\mathcal{F}|_1+|H|_1\,(1+T_0)|P_1|_1)<1,$

анда (25) система Галеркиндин $\bar{h}_m(\varphi,\varepsilon)$ жакындаштырылган чыгарылышынын аймагында 2π-мезгилдүү так $\hat{h}(\varphi,\varepsilon)$ чыгарылышынына ээ болот жана $\left|\hat{h}(\varphi,\varepsilon)-\bar{h}_m(\varphi,\varepsilon)\right|_0$ айырмасы үчүн төмөндөгүдөй баалоо орун алат.

$$\left|\hat{h}(\varphi,\varepsilon)-\bar{h}_m(\varphi,\varepsilon)\right|_0 \le \frac{2M_0(|Ch|_1+|\mathcal{F}|_1+|H|_1)}{\lambda_0(1-\chi)}\sigma(m), \ \ 0<\chi<1.$$

4.4 пунктта

- Ван-Дер-Польдун интегро-дифференциалдык теңдемелер системасынын

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-\lambda(x^2-1)y+\lambda\displaystyle\int_t^{t+\tau}x(s)ds.\end{cases} \tag{31}$$

- Кечиккен аргументтүү Дюффингдин биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемесинин

$$\frac{dx(t)}{dt}=-x(t)-\varepsilon_1x^3(t)+\lambda x(t-\tau), \tag{32}$$

мында ε_1 – кичине параметр, λ - сандык параметр, τ – кечигүү чоңдугу ,

- Ван-дер-Польдун кечиккен аргументтүү экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемесинин

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\lambda(x^2(t)-1)x'(t)+x(t-\tau)=0, \tag{33}$$

мында $\lambda>0,\tau$ – кечигүү параметри.

биринчи жакындаштыруудагы мезгилдик чыгарылыштарын тургузуу маселеси каралган.

(31) системанын мезгилдик чыгарлышы биринчи жакындаштырууда төмөндөгүдөй түрдө изделет

$$x(t)=a_0+a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t,$$

$$y(t) = d_0 + d_1 \cos \omega t + c_1 \sin \omega t,$$

мында $\omega -$ термелүү жыштыгы, $a_0, a_1, b_1, d_0, d_1, c_1$ тандалып алынуучу коэффициенттер.

Эсептөөнүн жыйынтыгында $a_0 = 0,\ d_0 = 0,\ d_1 = 0,\ b_1 = 0,\ c_1 = -\omega a_1$ жана

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^3}{6}}}, \quad a_1 = 2\sqrt{1-\frac{\tau^2}{2}}\ ,$$

$$x(t) = 2\sqrt{1-\frac{\tau^2}{2}}\cos\left(\sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^3}{6}}}\right)t,$$

$$y(t) = -2\sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^3}{6}}}\cdot\sqrt{1-\frac{\tau^2}{2}}\sin\left(\sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^3}{6}}}\right)t.$$

(x, y) фазалык тегиздикте (31) системанын мезгилдик чыгарылыштары эллипстик сызыктардын көптүгүн сүрөттөйт

$$\frac{x^2(t)}{4(1-\frac{\tau^2}{2})} + \frac{y^2(t)}{4(1-\frac{\tau^2}{2})\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^3}{6}}} = 1.$$

Дюффингдин (32) теңдемесинин мезгилдик чыгарылышы биринчи жакындаштырууда төмөндөгүдөй түрдө изделет

$$x(t) = a_0 + a_1 cos\omega t + b_1 sin\omega t$$

Эсептөөлөрдүн негизинде ω жыштыгынын жана a_0, a_1, b_1 коэффициенттеринин маанилери алынды

$$\omega = \frac{\sqrt{6}}{\tau},\ 21\lambda - \frac{36}{\tau^2} - 3 < 0, \quad b_1 = 0,\ a_0 = \sqrt{\frac{7\lambda - \frac{12}{\tau^2} - 1}{\varepsilon_1 - 6}}\ ,\ \ a_1 = \sqrt{\frac{(4\varepsilon_1+1)\lambda + \frac{8}{\tau^2} + 1}{\varepsilon_1 - 6}}.$$

Биринчи жакындаштырууда (32) теңдеменин мезгилдик чыгарылышы төмөндөгүдөй түрдө жазыла тургандыгы көрсөтүлгөн

$$x(t) = \sqrt{\frac{7\lambda - \frac{12}{\tau^2} - 1}{\varepsilon_1 - 6}} + \sqrt{\frac{(4\varepsilon_1 + 1)\lambda + \frac{8}{\tau^2} + 1}{\varepsilon_1 - 6}} \cdot cos\frac{\sqrt{6}}{\tau}t.$$

Ван-дер-Полдун (33) теңдемеси каралып, анын жакындаштырылган мезгилдик чыгарылышы

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t,$$

түрдө изделет.
ω жыштыкты жана a_0, a_1, b_1 коэффициенттерин эсептөөнүн негизинде:

$$a_0 = 0, \qquad b_1 = 0, \quad a_1 = \pm 2\sqrt{1+\frac{\tau}{\lambda}} \qquad \text{и} \quad \omega = \pm\sqrt{\frac{2}{2+\tau^2}}, \quad \tau \geq 0.$$

Мезгилдик чыгарылыш биринчи жакындаштырууда төмөндөгүдөй туюнтма түрүндө жазылат:

$$x(t) = 2\sqrt{1+\frac{\tau}{\lambda}}cos\sqrt{\frac{2}{2+\tau^2}}\,t,$$

Мындан

$$\dot{x}(t) = -2\sqrt{\frac{2}{2+\tau^2}\left(1+\frac{\tau}{\lambda}\right)}sin\sqrt{\frac{2}{2+\tau^2}}\;t.$$

$(x, \dot{x})$ фазалык тегиздигинде сызыктын төмөндөгүдөй теңдемесин алабыз:

$$\frac{x^2(t)}{\left(2\sqrt{1+\frac{\tau}{\lambda}}\right)^2} + \frac{\dot{x}^2(t)}{\left(2\sqrt{\frac{2}{2+\tau^2}\left(1+\frac{\tau}{\lambda}\right)}\right)^2} = 1$$

Бул теңдеме $(x, \dot{x})$ тегиздигинде эллипсттик сызыктардын көптүгүн сүрөттөйт.

КОРУТУНДУ

Диссертациялык иште экинчи тартиптеги квазисызыктуу дифференциалдык жана чектүү, чексиз таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелердин жана автономдук касиетке ээ, кичине параметрди кармаган биринчи тартиптеги чектүү таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелердин системасынын мезгилдик чыгарылыштарынын жашашын изилдөө жана тургузуу маселеси каралган. Изилдөөдө Галеркин методунун идеяларын жана удаалаш жакындаштыруу ыкмасын айкалыштыруу менен проекциялык-итерациялык ыкманын колдонулушу негизделет.

Төмөндөгүдөй жыйынтыктар алынды:

1. Экинчи тартиптеги квазисызыктуу дифференциалдык жана чектүү, чексиз таасирлеген интегро-дифференциалдык теңдемелердин, ошондой эле автономдук касиетке ээ кичине параметрлүү биринчи тартиптеги чектүү таасирленген интегро-дифференциалдык тендемелердин системасынын мезгилдик чыгарылыштарынын жашашын изилдөөдө проекциялык-итерациялык методдун колдонулушу негизделди.
2. Так мезгилдик чыгарылыштын аймагында Галеркиндин жакындашуусунун жашашы тууралуу теорема далилденди жана жакындаштырылган жана так мезгилдик чыгарылыштардын айырмасынын катасы бааланды.
3. Тескерисинче Галеркиндин жакындашуусунун аймагында так мезгилдик чыгарылыштын жашашы далилденип жана алардын айырмасынын катасы бааланды.

4. Гармоникалык баланс ыкмасынын негизинде Ван-дер-Польдун чектүү таасирленген интегро-дифференциалдык теңдемелер системасынын, Дюффингдин кечиккен аргументтүү биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемесинин жана Ван-дер-Польдун экинчи тартиптеги кечиккен аргументтүү теңдемесинин мезгилдик чыгарылыштары биринчи жакындаштырууда тургузулду. Жакындаштырылган мезгилдик чыгарылыштын амплитуда-жыштык мүнөздөмөсүнө кечигүү параметринин таасири жана чоңдугу аныкталды.

Диссертациянын жыйынтыктары так далилдөөлөр менен берилген.

ПРАКТИКАЛЫК СУНУШТАР

Диссертацияда алынган бардык натыйжалар жаңы жана теориялык жактан маанилүү. Бул жыйынтыктар дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин жаңы класстарынын мезгилдүү чыгарылыштарын талдоо үчүн колдонулушу мүмкүн. Изилдөөнүн алкагында алынган илимий корутундулар конкреттүү моделдик теңдемелердин чечимдерин изилдөө үчүн колдонулат жана илим менен техниканын ар кандай тармактарында колдонууга ылайыкташтырылышы мүмкүн.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН ТЕМАСЫ БОЮНЧА ЖАРЫЯЛАНГАН ЭМГЕКТЕРДИН ТИЗМЕСИ

1. **Бапа, кызы А.** Влияние интегрального члена к решению системы уравнений Ван-дер-Поля [Текст] /А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2022. – № 1. – С. 3–7. http://www.science-journal.kg/ru/journal/1/archive/15102
2. **Бапа, кызы А.** Квазисызыктуу дифференциалдык теңдемелердин системасынын мезгилдик чыгарылышы [Текст] / А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // Изв. ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2022. – № 2. – С. 21–26. http://www.science-journal.kg/media/Papers/ivk/2022/1/%D0%98%D0%92%D0%9A-_2_2022%D0%B3_pdf_21-26.pdf
3. **Бапа, кызы А.** О методе Галеркина построения периодических решений квазилинейной интегро-дифференциальной уравнении второго порядка [Текст] / А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // Вестник ОшГУ. – Ош, 2024. – №1. – С.13–21. https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=67964643
4. **Бапа, кызы А.** О методе гармонического баланса построения периодического решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием [Текст] / А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // ALATOO ACADEMIC STUDIES. – Бишкек, 2022. – № 2. – С. 459-463. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49469587
5. **Бапа, кызы А.** Периодическое решение квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // Вестн. Иссык-Кул. ун-та. – Каракол, 2022. – № 53. – С. 28–33. http://libraryiksu.kg/vestnik
6. **Бапа, кызы А.** Периодическое решение системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием [Текст] /А. Т. Алымбаев,

А. Бапа кызы // Вестн. науки и образования. – Иваново, 2022. – № 1 (121). – С. 5–12. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48007904
7. **Бапа, кызы А** Существование периодического решения дифференциального уравнения второго порядка. Метод функции Грина [Текст] /А. Т. Алымбаев, А. Бапа кызы // Вестн. Иссык-Кул. ун-та. – Каракол, 2023. – № 55. – С.7–14. https ://libraryiksu.kg/vestnik/arhiv/75
8. **Бапа, кызы А.** Экинчи тартиптеги туундусуна карата чечилбеген дифференциалдык теңдеме үчүн чектик маселенин чыгарылышын коллокация-асимптотикалык метод менен табуу [Текст] / А. Т. Алымбаев, Б. Мусаева, А. Бапа кызы // Вестн. Иссык-Кул. ун-та. – Каракол, 2024. – № 57. – С.83–89. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=68570909
9. **Бапа, кызы А.** Дюффингдин кечиккен аргументтүү мүчөнү кармаган экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемесинин мезгилдик чыгарылышы [Текст] / А. Бапа кызы // Вестн. Кыргызстана. – Бишкек, 2023. – № 2 (1). – С. 312–316. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=60061648
10. **Бапа, кызы А.** О существовании периодического решения системы нелинейных автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последействием [Текст] / А. Бапа кызы // Вестн. науки и образования. – Иваново, 2022. – № 1 (121). – С.16–21. URL:http://scientificjournal.ru/images/PDF/2022/121/o-sushchestvovanii-.pdf
11. **Бапа, кызы А.** Периодическое решение дифференциального уравнения Ван-дер-Поля с запаздыванием [Текст] / А. Бапа кызы // Вестн. БатМУ. –Баткен, 2023. – № 1. – С.3–6.
12. **Бапа, кызы А.** Построение решения системы квазилинейных уравнений методом простой итерации [Текст] / А. Бапа кызы // ALATOO ACADEMIC STUDIES. – Бишкек, 2022. – № 3. – С. 402–406 . https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49822432
13. **Bapa, kyzy A.** Application of the summary-difference method with a regularizer to construct an asymptotic solution to the boundary value problem of a system of nonlinear difference equations [Текст] / A.T. Alymbaev, K. M. Myrzakylova, A. Bapa kyzy // Вестн. Ин-та математики Нац. АН Кырг. Респ. – Бишкек, 2021. – № 2. – С. 74–80. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49308086
14. **Bapa, kyzy A.** Periodic solutions of a second- order nonlinear Volterra integro-differential equation [Text] / A. T Alymbaev, A. Bapa kyzy, F. K. Sharshembieva // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2024.–Vol.31,N2.–P.285–297.
https://www.pphmjopenaccess.com/index.php/adecp/article/view/1744
15. **Bapa, kyzy A.** The Galerkin method for constructing solutions to a quasilinear differential equation of the second order [Текст] / A. Bapa, kyzy // Вестн. Ин-та математики Нац. АН Кырг. Респ. – 2022. – № 1. . – С. 99–108 https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49328828

Бапа кызы Айнуранын «Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарын изилдөөнүн проекциялык-итерациялык ыкмалары» деген темада 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр. Мезгилдик чыгарылыш, квазисызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер, автономдук касиетке ээ кичине параметрлүү интегро-дифференциалдык теңдемелер системасы, проекциялык-итерациялык ыкма, удаалаш жакындатуу ыкмасы.

Изилдөө объектиси. Квазисызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык жана Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер жана автономдук касиетке ээ, кичине параметрлүү интегро-дифференциалдык теңдемелердин системасы. үчүн мезгилдүү чектик маселелер.

Изилдөөнүн предмети. Квазисызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык жана Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер, биринчи тартиптеги автономдук касиетке ээ, кичине параметрлүү интегро-дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн чектик маселелердин чыгарылыштарынын чечилишин жана тургузууну изилдөө.

Иштин максаты. Квазисызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык, чектүү, чексиз таасирленген интегро-дифференциалдык тендемелердин жана автономдук касиетке ээ, кичине параметрлүү интегро-дифференциалдык тендемелердин системасынын мезгилдүү чыгарылыштарын изилдөө үчүн проекциялык-итерациялык ыкманын колдонулушун негиздөө.

Изилдөө ыкмалары. Проекциялык-итерациялык ыкманын колдонулушун негиздөөдө төмөнкү ыкмалар колдонулган: Галеркин методу, удаалаш жакындатуу ыкмасы жана Грин функциясы.

Алынган жыйынтыктар жана анын жаңылыгы. Квазисызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык тендемелер , биринчи тартиптеги кичине параметрлүү жана чектүү таасирленген интегро-дифференциалдык тендемелердин системалары үчүн өз ара тескери ырастоолор: так мезгилдик чыгарылыштын аймагында Галеркиндин жакындаштырууларынын жана тескерисинче, Галеркиндин жакындаштырууларынын аймагында так мезгилдик чыгарылыштын жашашы тууралуу теоремалар далилденген.

Колдонуу боюнча сунуштар. Иштин жыйынтыктарын экинчи тартиптеги квазисызыктуу чектүү-айырмадагы теңдемелердин мезгилдик чыгарылыштарын изилдөөгө жайылтууну сунуштайбыз.

Колдонуу аймагы. Проекциялык-итерациялык ыкманын алгоритмдерин физика, механика, математикалык физика жана бир өлчөмдүү жыштыктуу термелүү теориясынын маселелеринде колдонууга болот.

РЕЗЮМЕ

диссертации Бапа кызы Айнуры на тему : “Проекционно-итерационные методы исследования периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра” на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова. Периодические решения, квазилинейные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения второго порядка, система интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, проекционно-итерационный метод, метод последовательных приближений.

Объект исследования. Периодическая краевая задача для квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра, системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром, обладающей свойством автономности.

Предмет исследования. Исследование разрешимости и построение решений периодической краевой задачи для квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра, а также системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром, обладающей свойством автономности.

Цели работы. Обоснование применимости проекционно-итерационного метода для исследования периодических решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с конечным и бесконечным последействием, а также системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром, обладающей свойством автономности.

Методы исследования и аппаратура. при обосновании проекционно-итерационного метода применены: метод Галеркина, метод последовательных приближений, функция Грина.

Полученные результаты и их новизна. Доказаны взаимообратные утверждения: теорема о существовании приближений Галеркина в окрестности точного периодического решения, а также теорема о существовании точного периодического решения в окрестности приближений Галеркина для квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, а также системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром и конечным последействием.

Рекомендации по использованию. Рекомендуется распространять результаты данной работы для исследования периодических решений квазилинейных конечно-разностных уравнений второго порядка.

Область применения. Алгоритмы проекционно-итерационного метода могут быть применены в задачах физики, механики, математической физики и теории одночастотных колебаний.

RESUME

of the dissertation by Bapa kyzy Ainura on the topic: "Projection-iteration methods for studying periodic solutions of integro-differential equations of Volterra type" for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words. Periodic solution, quasilinear differential and integro-differential equations of the second order, system of integro-differential equations with a small parameter, projection-iteration method, method of successive approximations.

Object of research. Periodic boundary value problem for quasilinear differential and integro-differential equations of the second order of the Volterra type, a system of integro-differential equations of the first order with a small parameter, possessing the property of autonomy.

Subject of research. Study of solvability and construction of solutions of periodic boundary value problems for quasilinear differential and integro-differential equations of the second order of Volterra type, as well as a system of integro-differential equations of the first order with a small parameter, possessing the property of autonomy.

Objectives of the work. Justification of the applicability of the projection-iteration method for studying periodic solutions of quasilinear differential and integro-differential equations of the second order with finite and infinite aftereffect, as well as a system of integro-differential equations of the first order with a small parameter, possessing the property of autonomy.

Research methods and equipment. The following were used to substantiate the projection-iteration method: Galerkin's method, the method of successive approximations, and Green's function.

The results obtained and their novelty. The following inverse statements are proven: the theorem on the existence of Galerkin approximations in the neighborhood of an exact periodic solution, as well as the theorem on the existence of an exact periodic solution in the neighborhood of Galerkin approximations for quasilinear differential and integro-differential equations of the second order, as well as systems of integro-differential equations of the first order with a small parameter and finite aftereffect.

Recommendations for use. It is recommended to extend the results of this work for the study of periodic solutions of quasilinear finite-difference equations of the second order.

Scope of application. Algorithms of the projection-iteration method can be applied in problems of physics, mechanics, mathematical physics and the theory of single-frequency oscillations.

ШАРТТУУ БЕЛГИЛЕРДИН ЖАНА СИМВОЛДОРДУН ТИЗМЕСИ

1. $C[0,2\pi] -$ $[0,2\pi]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болгон $|x|_0 = \max\limits_{t\in[0,2\pi]}|x(t)|$ нормага ээ функциялардын мейкиндиги.
2. $C^r(\mathcal{F}\times D\times D\times \mathcal{E}) - (t,x,u,\varepsilon)\in \mathcal{F}\times D\times D\times \mathcal{E}$ карата r жолу үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү, t боюнча 2π мезгилдүү $f(t,x,u,\varepsilon)$ функцияларынын мейкиндиги. , $\mathcal{F} = [0,2\pi]$, D чектелген, томпок област $R = (-\infty,+\infty)$, $\mathcal{E}\in R$.
3. $|f|_r = \max\limits_{0\le\nu\le r}|D^\nu f|_0 -$ дифференциалдык норма.
4. $|f|_0 = \max\limits_{\mathcal{F}\times D\times D\times\mathcal{E}}|f(t,x,u,\varepsilon)|$.
5. $\Omega_\delta \subset D, \Omega_\delta = \{\alpha: |\alpha - \hat{\alpha}| \le \delta\}$.
6. $colon(x_1,x_2,\dots,x_n) -$ мамыча матрица .
7. $C^2_{xx}(D) -$ $x\in D$ га карата эки жолу үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү $X(x)$ функцияларынын мейкиндиги.
8. $C^{'}_{xy}(\mathcal{F}\times D\times D) - (x,y)\in(D\times D)$ карата үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү $f(x,y,\varepsilon)$ функцяларынын көптүгү.
9. $\hat{x}(t) -$ так мезгилдик чыгарылыш.
10. $\bar{x}_m(t) -$ жакындатылган мезгилдик чыгарылыш.