

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. И.РАЗЗАКОВА

На правах рукописи

УДК: _____

ДУШЕНОВА УМУТ ДЖУМАКАЗЫЛОВНА

АНАЛИТИКО – ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Специальность: 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

член-корреспондент НАН КР

д.ф.-м.н., профессор Джаманбаев М.Дж.

Бишкек – 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Состояние вопроса, задачи и методика исследования.....	8
1.1. Обзор существующих работа в области температурного режима грунтов оснований и сооружений в мерзлых грунтах	8
1.2. Понятие и сущность аналитического решения математических моделей протаивания грунта, преимущества его использования.....	16
1.3 Основные понятия, термины и объяснения.....	18
1.4. Степень влияния различных климатических факторов на глубину таяния мерзлого грунта.....	24
1.5 Влияние температуры пульпы (отходов) на температурный режим основания хвостохранилища.....	26
Глава 2. Аналитико-численный метод решения задач переноса тепла, основанный на идее метода конечных элементов.....	27
2.1 Алгоритм определения коэффициентов теплопроводностей и значения температуры грунта аналитико-численным методом.....	27
2.2 Определение коэффициентов теплопроводностей, теплообмен между элементами и значения температуры в разные моменты времени.....	34
2.3 Определение коэффициента теплопроводностей и движение фронта таяния мерзлого грунта под основанием пруда, как решение начально-краевой задачи теплопереноса.....	35
2.4 Определить глубину таяния мерзлого грунта под влиянием температуры окружающей среды за теплый период года.....	37
2.5 Температурно-фильтрационный процесс под основанием водоема	39
Глава 3. Анализ и оценка аналитических решений математических моделей теплопереноса.....	43

3.1 Математическая модель конвективного теплопереноса в мерзлых грунтах и аналитические решения.	43
3.2 Значения температуры грунта в разные моменты времени.....	48
3.3 Математическая модель процесса таяния мерзлого грунта под основанием водоема с учетом теплообмена.....	50
3.4 Численный эксперимент аналитического решения математической модели влияния начального условия на глубину таяния мерзлого грунта.....	53
3.5 Сравнение результатов решение задачи таяния мерзлого грунта с разными математическими моделями.....	56
Заключение.....	59
Список использованной литературы.....	60
Приложения.....	65

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Исследование температурного режима гидротехнических сооружений, расположенных в зоне вечной мерзлоты, имеет важное значение для обеспечения их устойчивости и экологической безопасности. В условиях потепления и антропогенного воздействия процессы деградации мерзлых грунтов становятся всё более актуальными, особенно в высокогорных районах, где расположены многие промышленные объекты, включая гидротехнические сооружения.

Одной из серьёзных проблем является таяние мерзлого грунта под основаниями таких объектов, что может приводить к нежелательным последствиям. Например, при эксплуатации хвостохранилищ золоторудных комбинатов нарушение температурного режима приводит к оттаиванию основания, что создаёт условия для фильтрации токсичных веществ, в частности цианистых соединений, в окружающую среду. Это может стать причиной загрязнения подземных, грунтовых и поверхностных вод, нанося серьёзный экологический ущерб и угрожая здоровью населения.

Кроме того, нарушение теплового баланса мерзлого грунта под фундаментами гидротехнических сооружений приводит к его просадке, что вызывает деформации, потерю устойчивости конструкций и, в конечном итоге, их разрушение. Такие процессы могут повлечь за собой не только значительные экономические потери, связанные с восстановлением или полной заменой сооружений, но и представлять угрозу для жизни и здоровья людей.

Таким образом, исследование температурного режима гидротехнических сооружений в условиях вечной мерзлоты является актуальной задачей, направленной на предотвращение негативных последствий, повышение надёжности конструкций и минимизацию экологических рисков. Разработка методов расчёта и контроля тепловых процессов в мерзлых грунтах позволит повысить безопасность эксплуатации подобных объектов и сократить возможные экономические и экологические издержки.

Целью диссертационной работы является создание эффективного метода к построению аналитического решения задач теплопереноса и на основе численного анализа решений, формировать выводы, предложения, рекомендации специалистам, инженерам и соответствующим организациям.

В соответствии с поставленной целью сформулированы следующие основные задачи исследования:

- Под влиянием температуры воды в пруде хвостохранилища, расположенная в условиях вечной мерзлоты, начинается таяния основания пруда. Требуется определить движение фронта таяния мерзлого грунта и коэффициент температуропроводностей, как решение начально-краевой задачи тепло переноса.
- Определить глубину таяния основание водоема хвостохранилища, расположенная в условиях вечной мерзлоты под влиянием фильтрации воды из водоема глубиной H и температуры воды.
- Определить глубину таяния мерзлого грунта дневной поверхности, расположенные в условиях вечной мерзлоты под влиянием температуры окружающей среды за теплый период года с идентификацией коэффициента температуропроводности.
- Построение аналитического решения математической модели таяния мерзлого грунта и установить время перехода в стационарный режим и глубину таяния за это время.
- Изучение влияния начального условия на глубину таяния мерзлого грунта.
- Анализ аналитических решений математических моделей таяния мерзлого грунта

Научная новизна работы заключается в следующем:

- разработан численно аналитический подход к решению задач теплопереноса, основанный на идее МКЭ;
- предложена методика определение глубины таяния и идентификации коэффициента температуропроводности, как решение математической модели теплопереноса с использованием данных наблюдений температуры грунта;
- построение аналитического решение математической модели таяние мерзлого

грунта под основанием хвостохранилища и определение времени перехода к стационарному режиму и глубину таяние за это время;

- вывод о не влиянии начального условия на глубину таяние при долгосрочном прогнозе на основе численного эксперимента;

- анализ аналитических решений разных математических моделей процесса таяние мерзлого грунта и рекомендация выбора математической модели;

Теоретическая и практическая ценность. Предложенный подход и алгоритм могут служить основой для решения прикладных задач температурного режима сооружений, расположенные в зоне вечной мерзлоты с учетом различных климатических факторов, которая является основой при проектировании, строительстве и эксплуатации сооружений и зданий в зоне вечной мерзлоты.

Личный вклад соискателя заключается в использовании предложенной методики в решении различных задач теплопереноса, проведении исследований, анализе полученных данных, формулировке выводов и публикации статей; в установлении времени перехода в стационарный режим; на основе анализа аналитических решений различных математических моделей и численных результатов в формировании рекомендации о выборе более простой математической модели.

Апробация работы Полученные в ходе выполнения данной диссертационной работы результаты докладывались на следующих международных, республиканских конференциях и семинарах:

- Научно-практические конференции Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова, Бишкек, 2010, 2012, 2014, 2016, 2019, 2020 гг.;

- Международная научно - практическая конференция «Научные основы стратегии развития АПК», Волгоград 2014г.,

- Международная научно-техническая конференция молодых ученых «Инновация - вектор для молодежи» Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова (КГТУ), г. Бишкек, 2014 г.,

- Международно научно-практической конференции КГТУ, посвященной 65-летию университета, г. Бишкек, 2019 г.
- Научные исследования в Кыргызской Республике (Международный научный форум “Мировая наука и современные вызовы в эпоху глобализации и цифровой трансформации”) Бишкек, 2023 г.;
- Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы механики сплошных сред» Института геомеханики и освоения недр НАН КР, Бишкек, 2012, 2024 гг.
в сборнике статей,
- «VII Всемирный конгресс математиков тюркского мира» г.Туркистан, 2023г.
- ООО «Инженерный центр «Импульс» РГУ им. А.Н. Косыгина, Москва 2023г.,
- Международная-научная конференция «V Борубаевские чтения»г.Бишкек 2024г.
- на расширенном заседании научно-технического семинара кафедры 2024г.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях:

Основные результаты исследований опубликованы в 12 научных статьях, в том числе в научных журналах за пределами Кыргызской Республики, которые входят в базы данных Scopus (1), РИНЦ (2).

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 72 страницах машинописного текста, состоит из введения, 3 глав, заключения, списка литературы, приложений.

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, выводов, содержит 63 страниц машинописного текста, в том числе 18 рисунков, 3 таблицы и 30 наименований списка использованной литературы.

Автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. профессору, член-корр. НАН КР. Джаманбаеву М.Дж. за консультации и ценные советы при работе над диссертацией и обсуждении результатов исследований.

ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА, ЗАДАЧИ И МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1 Обзор существующих работ в области температурного режима в мерзлых грунтах

Несмотря на относительно небольшую территорию, Кыргызстан обладает значительным минерально-сырьевым потенциалом. Особую ценность представляют запасы золота, редких и редкоземельных металлов, а также нерудных полезных ископаемых. Обычно месторождения полезных ископаемых находятся на высокогорьях в условиях вечной мерзлоты. Их освоение связано со строительством и эксплуатацией гидрогеотехнических сооружений, расположенные в зонах мерзлого грунта. Поэтому требуются специальные исследования температурного режима в целях безопасности и устойчивости сооружений как при строительстве, так и при эксплуатации.

Существуют множество работ посвященные исследованию температурного режима гидрогеотехнических сооружений. Вопросами гидротехнического строительства на северных территориях для нужд гидроэнергетики, водоснабжения, создания хвостохранилищ посвящены работы Г.Ф.Биянова, Когодовский О. А., Макаров В. И, Соболев С. В , Смирнова Н.Н., Ананьян А.А., Н.А.Бучко, Биянов Г. Ф., Когодовский О. А., Макаров В. И. ,Г.А.Распопина, Е.А.Смирнова, Н.Г.Трупака, Р.В.Чжана. [1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8],[9],[10],[11],[12].

Расчетами температурного режима гидротехнических сооружений занимались Анискин Н. А., Биянов Г. Ф., В.С. Лукьянов, М.Д. Головкин, Чернядьев, А.Л. Чеховский, А.Я. Стремяков, В.А. Пакулин, Назарова Л. А, Г.А. Любославский, Цыбина А.М., А.В. Павло. [[11],[12],[13],[14],[15],[16],[17],[18],[19],[20],[21],[22].

Большая работа в рамках международного научного проекта по изучению температурного режима сооружений в криолитозоне проделана в совместном международном научном проекте с учеными из Института горного дела Сибир-

ского отделения РАН Л.А. Назаровой, Л.А. Назаровым и кыргызскими учеными Джаманбаевым М.Дж., Чыныбаевым М.К. Совместные исследования посвящены вопросам моделирования процессов тепломассопереноса в окрестности гидротехнических сооружений в криолитозоне. [6],[7],[10].

Теоретические исследования

- Моделирование тепловых процессов в мерзлых грунтах с учетом фазовых переходов Г.А. Любославский [24]
- Теории теплообмена в многослойных грунтах и их влияние на устойчивость оснований (Ершов, 2012).[23]
- Разработка численных моделей с учетом гидротермических процессов Галкин А. Ф., Курта И. В. [14]

Экспериментальные исследования

- Лабораторные и полевые исследования теплофизических свойств мерзлых грунтов А.В. Мельников и др., 2015 <https://geoinfo.ru/products-pdf/cravnenie-metodov-laboratornyh-i-polevyh-ispytaniy-gruntov.pdf>
- Мониторинг температурных режимов в реальных сооружениях на вечной мерзлоте Д.Ю Кропачев, Е.В.Амосов <https://cyberleninka.ru/article/n/sistema-monitoringa-temperatur-protyazhennyh-obektov-v-vechnomerzlyh-gruntah/viewer>
- Влияние техногенных факторов на температурное поле грунтов А.В. Павлов. [25]

Технологии регулирования температурного режима

- Использование теплоизолирующих материалов для уменьшения протаивания (Поляков, 2016).
- Системы искусственного охлаждения грунта (термосифоны) в строительстве (Барышев, 2019).
- Разработка методов защиты фундаментов от термопросадки (Иванов, 2021).

Горнодобывающая промышленность Кыргызстана: структура и развитие. Горнодобывающая промышленность представляет собой совокупность отрас-

лей, занимающихся разведкой месторождений полезных ископаемых, их добычей из недр земли, а также первичной переработкой, известной как обогащение.

С учётом природных и экономических особенностей Кыргызстана, горнодобывающая отрасль делится на несколько ключевых направлений:

1. Золотодобывающая промышленность – ведущий сектор, обеспечивающий значительную долю экспортных доходов страны.

2. Топливо-добывающая отрасль – включает угледобычу и нефтедобычу, обеспечивающие внутренний рынок энергоресурсами.

3. Рудодобывающая промышленность – охватывает добычу железных руд, редких и цветных металлов, а также радиоактивных элементов.

4. Производство строительных материалов и добыча неметаллических полезных ископаемых – включает гранит, мрамор, доломит, глину, гипс, известняк и другие материалы, используемые в строительстве.

5. Гидроминеральная отрасль – связана с добычей питьевой и минеральной воды для водоснабжения.

6. Поисково-разведочная деятельность – включает геологоразведку новых месторождений полезных ископаемых.

Золотодобыча остается ключевой отраслью экономики Кыргызстана. Несмотря на существующие проблемы, страна имеет значительный потенциал для дальнейшего развития этой сферы. Важным фактором успеха является баланс между экономической выгодой, социальной ответственностью и экологической безопасностью.

Большинство месторождений золота в Кыргызстане находятся в высокогорных районах, где преобладают сложные климатические условия и зоны вечной мерзлоты. Исследования таких условий, проведенные учеными, включая Ю.М. Гончарова, Р.М. Каменского, В.И. Макарова, Г.М. Долгих С.Н. Окунева, [27] показывают, что эффективное использование несущей способности мерзлых и оттаивающих грунтов при строительстве инженерных сооружений остается актуальной задачей. Опыт проектирования и эксплуатации грунтовых

сооружений в условиях вечной мерзлоты Севера демонстрирует, что полностью решить эти проблемы пока не удалось.

Анализ работ Г.Ф. Биянова, О.А. Когодовский, В.И. Макаров Н.А. Бучко, Я.А. [4] и ряда других исследователей в области гидротехнического строительства показывает, что выбор типа плотин, конструктивных решений противofильтрационных систем и их сопряжения с основанием зависит от природных особенностей территории. Важную роль играет температурное состояние грунтов в системе "плотина-основание", изменяющееся в процессе эксплуатации гидроузлов.

Согласно СНиП 2.02.04-88, проектирование сооружений в условиях таломерзлых оснований должно основываться на одном из двух принципов. Однако исследования, проведенные И.А. Максимовым, Ю.Н. Мызниковым, Н.А. Теном, Б.Е. Полдомасовым и другими специалистами, показывают, что в ряде случаев возможно комбинированное применение этих принципов по всей конструкции. При этом важным условием остается обеспечение стабильности грунтов на границах мерзлых и талых зон, предотвращение фильтрационных потерь и выноса грунта.

Для поддержания температурного режима грунтов в системе "плотина-основание" применяются различные терморегулирующие устройства, включая сезонно действующие охлаждающие системы (СОУ), холодильные машины и методы естественной конвекции. Исследования в этой области проведены Н.А. Бучко, Буйских А. А., Замощ М. Н., В.И. Макаровым Буйских А. А., Замощ М. Н. [26] и другими специалистами. Наибольшее распространение получили воздушные и жидкостные, сезоннодействующие охлаждающие устройства (СОУ) с различными типами циркуляции теплоносителя, а также системы с естественной и принудительной вентиляцией.

Методы предварительного оттаивания многолетнемерзлых грунтов известны с 1930-х годов, но их научное обоснование было разработано только в 1958 году В.Ф. Жуковым. В строительстве применяются гидро-, паро- и электрооттаивание, выбор которых зависит от геологических условий и доступности источни-

ков тепла. Исследования в этой области проводились П.А. Богословским, В.Г. Гольдтманом, В.В. Знаменским и другими учеными.

Процессы теплообмена в грунтах, особенно в горных районах, играют ключевую роль в обеспечении надежности инженерных сооружений. Вклад в изучение теплового баланса внесли В.Т. Балобаев, В.Н. Будыко, А.И. Воейков, В.А. Кудрявцев и многие другие. Они показали, что основные компоненты теплового баланса включают радиационный баланс, турбулентный теплообмен и испарение, при этом приток солнечной радиации является главным энергетическим фактором в этих процессах.

Теплопроводность грунтов, описываемая уравнением Фурье, изучалась такими учеными, как Н.А. Анискин [29], Ф.Е. Попенко [28] и И.А. Павлов [17]. Для решения задач теплообмена широко используются численные методы, включая метод конечных разностей и метод конечных элементов. Они позволяют моделировать процессы распространения тепла в сложных средах, что особенно важно при проектировании инженерных сооружений в зонах вечной мерзлоты.

1.2 Понятие и сущность аналитического решения математических моделей протаивания грунта, преимущества его использования.

Существуют 3 вида решений уравнения в частных производных второго порядка: аналитический, численно-аналитический, численный метод.

Аналитический метод приводит к определенному результату или формуле с помощью последовательных проведений математических преобразований исследуемой модели. В уравнениях теплопроводности применяются тогда, когда данное уравнение может решиться определенным методом. При этом в вычислениях задачи, погрешность результатов сводится к минимуму за счет использования реальных данных (точных данных) в полученной формуле. Когда аналитическим методом невозможно найти решение уравнения применяются численные методы.

Численный метод работает в вычислительной математике, заменяя одну математическую задачу другим. Интерпретируя и аппроксимируя, находятся

приближенные значения выражения. Используя различные методы, можно добиться быстрых и более точных результатов.

По исследованиям всех решений задач промерзания и протаивания грунта в вечной мерзлоте были использованы численные методы при условии Стефана с учетом фазовых переходов [18, с. 329-331; 2, с. 11; 3, с. 71] т.е. задачи решались подвижными граничными условиями [1, с. 43-52] и численными методами в программе ELCUT – моделированием методов конечных элементов; применялись численно-аналитические методы (метод вариаций и метод конечных разностей) и редко где встречались статьи с применением математических моделей теплопроводности с однородными и неоднородными граничными условиями для многолетнемерзлого грунта.

Рассмотрим описание статьи, вычисленных численным и численно-аналитическим методами. Численное решение задачи о процессах промерзания и протаивания в многолетнемерзлых грунтах

Гидрогеотехнические сооружения зданий строятся на вечной мерзлоте с учетом процессов протаивания-промерзания в грунтах. Под влиянием теплоты сезонного отопления мерзлый грунт под зданием начинает подтаивать – происходит осадка фундамента здания, что может привести к аварийным последствиям. Математическое моделирование процесса распространения тепла в многолетнемерзлых грунтах с учетом фазовых переходов описывается уравнением теплопроводности и условием Стефана. В работе [32] представлена численная реализация такой модели в трехмерной области. В постановке задачи, математическая модель, записана в форме для решения сквозным счетом без явного выделения фронта протаивания. Дискретизация проведена с помощью метода конечных элементов. Расчеты проведены с использованием библиотеки FEniCS для решателя и программы GMSH для построения сетки.

Преимуществом является применение данного вычислительного алгоритма с минимальными изменениями для решения многомерной задачи

- Решение уравнения теплопроводности для различных граничных условий

Для учета температурных воздействий используется дифференциальное уравнение теплопроводности. При решении дифференциального уравнения в частных производных численными методами необходимо обосновать достоверность получаемого численного решения. В настоящей работе проведено сравнение численного решения уравнения второго порядка в частных производных и аналитического решения. Для получения аналитического решения используется метод вариационных итераций. Этот метод был использован в работах для решения уравнения, описывающего перемещение тонкой прямоугольной пластины. Применяемый метод вариационных итераций обладает рядом преимуществ. Этот метод позволяет свести исходное дифференциальное уравнение в частных производных к решению обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и избавляет от необходимости выбирать начальное приближение, удовлетворяющее граничным условиям, как в методе Бубнова-Галеркина. Заданные вначале функции, выбранные произвольно, в процессе вычислений уточняются, исходя из решения системы дифференциальных уравнений. Данный подход позволит сравнить решения уравнения теплопроводности, полученные двумя принципиально разными методами: аналитически – методом вариационных итераций и численно – методом конечных разностей.

Проанализировав статьи протаивания и промерзания мерзлого грунта в вечной мерзлоте, стало необходимым решить данную задачу аналитическим методом уравнениями теплопроводности с однородными и граничными условиями.

1.3. Формирование цели и задачи исследования

На основе анализа работ, посвященные исследованию температурного режима гидрогеотехнических сооружений, расположенные в зонах мерзлого грунта как прикладных, так и теоретических задач применительно объекту исследования. Объектам исследования является температурный режим золото извлекающая фабрика Кумтор, расположенная на высоте 4000м. Исследованию

температурно-фильтрационного режима рудника Кумтор и исследованию влияния климатических и техногенных факторов на процесс протаивания и промерзания грунта посвящены работы Назарова Л.А., Назаровой Л.А. и работы Джаманбаева М.Дж. [9], в которых приведены прогнозные расчеты для различных случаев в криолитизоне. В данных работах оставались открытыми интересные вопросы для практики такие как определение времени перехода в стационарный режим, предельная глубина таяния под основанием хвостохранилища, методика определения коэффициентов температуропроводностей, теплообмена как решения задачи и методика определения температуры грунта. Целью диссертационной работы является обоснование ответов на эти вопросы, важные для практики.

1.3. Основные понятия, термины и объяснения

Дифференциальное уравнение в частных производных (частные случаи также известны как уравнения математической физики, УМФ) — дифференциальное уравнение, содержащее неизвестные функции нескольких переменных и их частные производные.[3]

Краевая задача (граничная задача) — задача о нахождении решения заданного дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений), удовлетворяющего краевым (граничным) условиям в концах интервала или на границе области. Краевые задачи для гиперболических и параболических уравнений часто называют начально-краевыми или смешанными, потому что в них задаются не только граничные, но и начальные условия.[6]

Математической моделью называется совокупность уравнений или других математических соотношений, отражающих основные свойства изучаемого объекта или явления в рамках принятой умозрительной физической модели и особенности его взаимодействия с окружающей средой на пространственно-временных границах области его локализации. Математические модели различных процессов в континуальных системах строятся, как правило, на языке дифференциальных. Обобщенная математическая модель уравнений,

позволяющих наиболее точно описать состояние процесса в любой точке пространства в произвольный момент времени. Основными свойствами математических моделей являются адекватность и простота, указывающие на степень соответствия модели изучаемому объекту и возможности ее реализации. Процесс формулировки математической модели называется постановкой задачи [5, с. 123]

Метод конечных разностей — численный метод решения дифференциальных уравнений, основанный на замене производных разностными схемами. Является сеточным методом. Для простых задач построение разностной схемы выполняется быстрее, чем метод конечных разностей (МКЭ). [8]

Метод конечных элементов (МКЭ) — это численный метод решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также интегральных уравнений, возникающих при решении задач прикладной физики. Метод широко используется для решения задач механики деформируемого твёрдого тела, теплообмена, гидродинамики, электродинамики и топологической оптимизации. [9]

Метод Крамера (правило Крамера) — способ решения систем линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных с ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы (причем для таких уравнений решение существует и единственно).[10]

Метод разделения переменных — метод решения дифференциальных уравнений, основанный на алгебраическом преобразовании исходного уравнения к равенству двух выражений, зависящих от разных переменных величин, причем одни из них являются функциями других. В применении к уравнениям в частных производных схема разделения переменных приводит к нахождению решения в виде ряда или интеграла Фурье. В этом случае метод также называют методом Фурье (в честь Жана Батиста Фурье, построившего решения уравнения теплопроводности в виде тригонометрических рядов) и методом стоячих волн.[11]

Многолетнемерзлые грунты («вечная мерзлота», криолитозона) — районы распространения грунтовых толщ, имеющих отрицательную температуру в течение трехлетнего периода и более, вечная мерзлота - не менее ста лет. Вечную мерзлоту по температуре на границе нулевых годовых амплитуд подразделяют на высокотемпературную (до минус 2°С, преимущественно минус 0,5 + 1,5°С и выше) и низкотемпературную (ниже минус 2°С, преимущественно минус 3 5°С и ниже). По условиям распространения различают сплошную, прерывистую и островную вечную мерзлоту (криолитозону). Мощность вечной мерзлоты составляет от нескольких метров в умеренных широтах (южная подзона), до 1,5 км в высоких.

Вечная мерзлота (многолетняя криолитозона, многолетняя мерзлота) — часть криолитозоны, характеризующаяся отсутствием периодического протаивания. Общая площадь - 35 млн км².

В северном полушарии регионы с многолетней мерзлотой составляют около 25% (23 млн. км²) поверхности. Толщина многолетней мерзлоты колеблется от менее 1 м до даже более 1500 м. [12]

Начальные (НУ) и граничные условия (ГУ) — дополнение к основному дифференциальному уравнению (обыкновенному или в частных производных), задающее его поведение в начальный момент времени или на границе рассматриваемой области соответственно [16]

Нестационарное состояние — состояние квантовой системы, при котором её энергия и другие динамические величины, характеризующие квантовое состояние, изменяются со временем

Параболические уравнения — класс дифференциальных уравнений в частных производных. Один из видов уравнений, описывающих нестационарные процессы.

Песчаник — обломочная осадочная горная порода, представляющая собой однородный или слоистый агрегат обломочных зёрен размером от 0,05

мм (по российским критериям) или от 0,0625 мм (по зарубежным критериям) до 2 мм (песчинок), связанных каким-либо минеральным веществом (цементом). Песчаники образуются в результате разрушения горных пород, переноса обломков водой или ветром и отложения с последующей цементацией. Степень окатанности обломков и степень отсортированности по величине зёрен указывают на протяжённость переноса обломков от места первоначального образования. В подавляющем большинстве разновидностей песчаников преобладает кварц, как наиболее устойчивый физически и химически минерал.[13]

Пульпа — суспензия — смесь тонкоизмельченных (<1 мм) полезных ископаемых с водой. Пульпа образованная при измельчении руд перед обогащением, при гидродобыче, гидротранспорте и т.п. Вязкость пульпы возрастает, а скорость оседания твердых частиц уменьшается с повышением плотности (отношение масс твердых и жидких фаз) и увеличением количества тонких классов частиц (микроразмеров). Концентрация пульпы (отношение масс твердой и жидкой фаз) измеряется в процентах твердого или в соотношении твердой фазы к жидкой (Т:Ж). Пульпа используется при обогащении полезных ископаемых, в гидромеханизации, при гидравлическом транспортировании, при тушении пожаров.[14]

Трубопроводы, по которым транспортируется пульпа при её промышленном транспортировании, называются пульпопроводами.

Стационарное состояние (точка покоя, особая точка, состояние равновесия)

В стационарном состоянии значения переменных в системе не меняются со временем. На языке дифференциальных уравнений это означает:

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Если левая часть уравнения равна нулю, значит равна нулю и его правая часть:

$$f(x) = 0$$

Суглинок — рыхлая осадочная порода с преимущественным содержанием частиц размера пыли и песка, и значительным количеством глинистых

частиц. В состав суглинка входит: глина — около 60 % и кварцевый песок различной фракции – 40 %.

Температуропроводность (коэффициент температуропроводности) — физическая величина, характеризующая скорость изменения (выравнивания) температуры вещества в неравновесных тепловых процессах. Численно равна отношению теплопроводности к удельной теплоёмкости при постоянном давлении. В СИ измеряется в м²/с. Обычно обозначается греческой буквой α . [15]

Теплообмен или теплоотдача - конвективный теплообмен между движущейся средой и поверхностью

Коэффициент теплоотдачи α – характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Коэффициент α показывает, какое количество тепла передается от единицы поверхности стенки к жидкости в единицу времени при разности температур между стенкой и жидкостью в 1 градус (К). [16]

Условия теплообмена на поверхности — комплекс природных и техногенных факторов, влияющих на процесс тепло- и массообмена на поверхности с окружающей средой: температура воздуха, солнечная радиация, испарение, транспирация, альbedo поверхностей, их расположение (север, юг и т.д.) и угол наклона к лучам солнца, тип почвенных покровов (растительность, снег, вода, торфяная, торфо-глинистая или скальная обсыпка и т.п.), рельеф местности, режим и характер обводнённости, различные искусственные покрытия (теплоизолирующие, теплодиодные, солнцезащитные, дорожные и т.д.). При теплотехнических расчётах условия теплообмена на поверхности учитываются путём введения в расчётную схему обобщённых параметров в виде температуры воздуха приведённой к температуре поверхности с учётом поправочных данных

Осадка оттаивания мёрзлого грунта основания насыпи – это процесс деформации уплотнения оттаивающего грунта под нагрузками (от веса насыпи

и оттаявших слоёв основания, а также веса и динамического воздействия подвижной нагрузки). Он обусловлен увеличением плотности оттаивающих под нагрузкой грунтовых слоёв, в связи с уменьшением их пористости, при выдавливании воздуха (газов) и воды из пор грунта в условиях затруднённости (или невозможности, например, в чаше мерзлотного оттаивания и др.) бокового расширения, а также затруднённости (или отсутствии) краевого выдавливания грунта вверх (выпора), по краям площади нагружения. При этом происходит боковое (в края площадки нагружения) выдавливание отжимаемой воды, а также инфильтрация её в оседающую нижнюю часть насыпи (особенно при отсыпке её из дренирующего грунта).

Просадка грунта – это осадка грунта, вызванная его замачиванием водой, как при оттаивании, так и при инфильтрации, напитывании водой и т.д. Грунт считается просадочным, при относительной деформации просадочности не менее $\epsilon_{si} > 0,01$. [17]

Хвостохранилище — это комплекс специальных сооружений и оборудования, предназначенный для хранения или захоронения радиоактивных, токсичных и других материалов, оставшихся после процесса отделения ценной фракции от нерентабельной фракции (пустой породы) руды.

Современные хвостохранилища представляют собой сложные инженерные сооружения с надёжной дамбой и противофильтрационным экраном из пластиковых плёнок, который не даёт вредным веществам проникать во внешнюю среду.

Как правило, хвостохранилища располагаются в нескольких километрах от производства, в понижениях рельефа (котловинах, ущельях, распадках).

Особую опасность для окружающей среды представляют старые хвостохранилища. Некоторые из них организованы на природных прудах и озерах, не ограждены и не охраняются. Ещё одна опасность - загрязнение воздушных потоков в районе хвостохранилищ. В воздухе может наблюдаться повышенное содержание вредных газов, включая диоксид серы и диметилсульфид. [21]

Основные обозначения:

T_0 - начальная температура воды (или T_v), °С;
 T_1 - начальная температура грунта при $x_1=0$ м (или T_g), °С;
 T_2 - температура грунта при $x_2=1.27$ м, °С;
 T_3 - температура грунта на глубине $x_3=30$ м, °С;
 α - коэффициент температуропроводности, 0.004283 м²/с;
 h - коэффициент теплообмена, Вт*м²/град;

1.4. Степень влияния различных климатических факторов на глубину таяния мерзлого грунта.

Процессы, связанные с глобальным изменением климата, делают актуальным изучение таяния в зоне распространения многолетнемерзлых грунтов. Глубины протаивания и промерзания зависят от множества факторов, в первую очередь — от климатических характеристик региона. Основные климатические факторы, влияющие на температурный режим грунтов, включают: температуру и скорость приземного воздуха, солнечную радиацию, высоту снежного покрова, а также высоту местности, состав, влажность и теплофизические свойства грунтов.

Температурные режимы грунтов на естественных, оголенных или забеленных поверхностях могут существенно различаться в зависимости от альбедо поверхности. Экспериментальные исследования глубины протаивания и промерзания [1] показывают, что на оголенных и забеленных участках, где зимой снег был удален, средняя температура грунтов была значительно ниже, чем на естественных участках. Снежный покров, благодаря своим теплоизоляционным свойствам, замедляет охлаждение и промерзание грунтов. Наблюдения [1] показывают, что на участках, где снежный покров счищался и грунт дополнительно белился известью, наблюдается самая низкая среднегодовая температура грунта.

Летний приток солнечной радиации повышает температуру поверхности грунта, что приводит к её значительному повышению по сравнению с температурой воздуха на $2.5-4.0$ °С [2]. В горах радиационный баланс увеличивается с вы-

сотой. Например, если суммарная радиация равна $R = 115$ ккал/м²ч, на склонах с наклоном 40° интенсивность радиации на 30% выше, чем на горизонтальной поверхности, и зависит от ориентации склона [2].

Существует множество исследований, посвященных определению глубины протаивания и промерзания при различных исходных условиях. Например, работы И. Стефана (1889), М.М. Крылова (1940), Д.В. Резодубова, Н.И. Салтыкова, Х.Р. Хакимова, Х.М. Пейтера, Ф.Н. Шехтера, И.А. Золотаря, А.В. Павлова, Г.М. Фельдмана, Н.А. Цытовича и других. Однако аналитическое решение, учитывающее все факторы, влияющие на процесс таяния вечной мерзлоты, не получено из-за сложности уравнений и краевых условий. В данной работе используется методика расчета глубины протаивания, разработанная В.В. Докучаевым, И.А. Золотарем, В.Т. Балобаевым, С.П. Филиповским, с учетом компонентов теплового баланса, таких как радиационный баланс R , теплота на испарение LE , температура грунта и воздуха, коэффициент теплообмена атмосферой и поверхностью грунта.

Постановка задачи.

Задача состоит в определении степени влияния различных климатических и конструктивных факторов на глубину таяния мерзлого грунта. В частности, необходимо оценить воздействие радиационного баланса, затрат тепла на испарение, влажности и использования асфальтовой изоляции на глубину протаивания мерзлоты в области основания плотины, расположенной в условиях вечной мерзлоты.

Для этого необходимо:

1. Оценить влияние радиационного баланса, который зависит от солнечной радиации, угла наклона поверхности и ориентации склона.
2. Учесть теплоту, затрачиваемую на испарение влаги с поверхности грунта, и её влияние на температурный режим.
3. Исследовать влияние влажности грунта, поскольку она оказывает значительное воздействие на теплоперенос в почвах.

4. Проанализировать влияние асфальтовой изоляции, которая может изменить теплопередачу через грунт, замедляя или ускоряя процесс таяния.

Математическая модель должна учесть все эти факторы и предоставить возможность количественно оценить глубину таяния мерзлого грунта на основе расчетов для плотины, расположенной в условиях вечной мерзлоты.

1.5 Влияние температуры пульпы (отходов) на температурный режим основания хвостохранилища.

Современные исследования, прогнозирование и управление температурными полями в грунтовых средах играют важную роль в инженерно-геологическом обосновании строительства объектов горнодобывающей отрасли, особенно в районах с вечномерзлыми грунтами. На практике изменения температурного режима грунтов прогнозируются с использованием приближенных методов [1].

Цель данной работы — разработка математической модели, которая позволит эффективно исследовать взаимное влияние температурных полей пульпы и основания хвостохранилища.

Постановка задачи.

В данной работе не рассматривается фазовый переход, а сосредоточено внимание на математической модели теплопереноса в грунте. В процессе работы золоторудной фабрики в хвостохранилище сбрасываются отходы в виде жидкой массы, состоящей примерно на 55% из жидкости, а оставшиеся 45% составляют мелкодисперсные твердые частицы в виде пульпы. Пульпа поступает в виде жидкости, и её придонный слой имеет положительную температуру.

Положительная температура придонного слоя воды способствует оттаиванию мерзлого грунта. На начальном этапе времени грунт считается мерзлым. Задача состоит в исследовании распространения тепла в грунте для различных начальных температур пульпы и температуры грунта основания хвостохранилища.

Процесс теплопереноса исследовался многими известными учеными, такими как А.И. Воейков, В.Н. Будыко, Г.М. Фельдман, Н.А. Цытович, А.В. Павлов и другие. В большинстве работ теплоперенос моделируется отдельно для талой и мерзлой зоны грунта, с учетом фазового перехода на границе этих зон.

В этой работе теплоперенос рассматривается отдельно для зоны отложения пульпы и для зоны грунта основания хвостохранилища, при этом на границе этих областей ставится условие непрерывности температуры грунта.

ГЛАВА 2. АНАЛИТИКО - ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА, ОСНОВАННЫЙ НА ИДЕЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

2.1 Алгоритм определения коэффициентов температуропроводностей и значения температуры грунта аналитико-численным методом.

Методом идентификации аналитического решения математической модели теплопереноса определить коэффициенты температуропроводностей мерзлых и талых грунтов, а также значения температуры грунта, используя данные натурных наблюдений температуры грунта. В качестве примера рассмотрены данные наблюдения температуры в скважине в районе Кумтор на уровне 3800м. глубиной 30м. (ВН93-12 от 23 июня 1993 г.)

Методика решения. Разработана аналитико-численный подход, основанная на сочетании аналитического метода с методом конечных элементов (МКЭ). Сущность которого заключается в том, что приближенное решение математической модели строится не с помощью произвольных базисных функций как в МКЭ, а используются линейно-независимые частные решения уравнения теплопроводности. В результате получается аналитическое решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее начально-краевым условиям задачи для одного элемента. С помощью построенного аналитического решения, из начального условия задачи, определяется коэффициент температуропроводности, как решение трансцендентного уравнения.

Математическая модель процесса переноса тепла в талых и в мерзлых грунтах в одномерной постановке описывается следующим образом (Фельдмана, Томиардо)

$$\left. \frac{\partial T_T}{\partial t} = a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq h \right\} \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$t = 0; \quad x \in [0, h]; \quad T_T = f_1(x); \quad x \in [h, L], \quad T_M = f_2(x). \quad (2)$$

$$x=0, \quad T_T = T_b, ; \quad x=h, \quad T_T = T_M = T_0; \quad x=L, \quad T_M = T_1. \quad (3)$$

где h – глубина таяния; L – область мерзлого грунта за которой начинается вечная мерзлота; соответственно - T_0, T_1, T_b температура таяния мерзлого грунта, температура вечной мерзлоты, температура окружающей среды; соответственно - $f_1(x), f_2(x)$ начальные условия для талой и мерзлой зоны, a_T, a_M коэффициенты теплопроводности талого и мерзлого грунта.

Неизвестная подвижная граница таяния мерзлого грунта определяется через условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта уравнением Стефана:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x} \right]_{x=h} = q_0 w \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4)$$

где T_T – температура зоны талого грунта; T_M - температура зоны мерзлого грунта. Для упрощения задачи считается, что температура воды и грунта на основании пруда при долгосрочном прогнозировании считается одинаковыми, λ_T, λ_M – коэффициенты теплопроводности талого и мерзлого грунта; w - количество льда в грунте; q_0 - теплота плавления льда.

Для построения аналитико-численного решения данной задачи (1) – (4) согласно идее МКЭ в качестве базисных функций выбирается линейно-независимые частные решения уравнении теплопереноса. Вид частного

решения выбирается в отличие от работы [34] не произвольно, а так, чтобы она соответствовала физике процесса, т.е. по глубине температура грунта убывает, а по времени периодически изменяется

$$T_1(x, t, a) = e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x} \cos(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x - 4\pi t), T_2(x, t, a) = e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x} \sin(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x - 4\pi t) \quad (5)$$

Рассматриваемая область разбивается на конечные элементы согласно температурного режима грунта, т.е., где изменение температуры происходит быстрее, разбивается на мелкие элементы, а где изменение температуры происходит медленнее, разбивается на крупные элементы. В каждом элементе аналитическое решение строится по аналогии МКЭ следующим образом

$$T_T(x, t, a) = N_i^1(x, t, a) * T_e + N_j^1(x, t, a) * T_0,$$

$$T_M(x, t, a) = N_i^2(x, t, a) * T_0 + N_j^2(x, t, a) * T_1, \quad (6)$$

где
$$N_i^k(x, ta) = \frac{T_2(x_j, t, a) * T_1(x, t, a) - T_2(x_{\square}, t, a) * T_1(x_j, t, a)}{T_2(x_j, t, a) * T_1(x_j, t, a) - T_2(x_i, t, a) * T_1(x_j, t, a)},$$

$$N_j^k(x, ta) = \frac{T_2(x_{\square}, t, a) * T_1(x_i, t, a) - T_2(x_i, t, a) * T_1(x_{\square}, t, a)}{T_2(x_j, t, a) * T_1(x_j, t, a) - T_2(x_i, t, a) * T_1(x_j, t, a)}. \quad (7)$$

аналоги функции формы МКЭ, k – номер элемента. Коэффициенты температуропроводности « a » каждого элемента находятся как решение трансцендентного уравнения (6), удовлетворяя начальному условию (2). Для нахождения поля температуры грунта в любое другое время, здесь получается не решением системы линейных алгебраических уравнений как в МКЭ, а находится из условия сшивания решений между конечными элементами области. В качестве условие сшивания в МКЭ используются условие непрерывность теплопереноса. В данной работе в качестве условия сшивания впервые рассмотрено условие теплообмена между элементами области т.е. конвективный теплоперенос. Трудность такого подхода заключалась в неизвестности коэффициента теплообмена между окружающей средой и грунтом на дневной поверхности, а также аналоги коэффициента теплообмена

между разнородными грунтами т.е. между элементами области. Коэффициенты теплообмена на стыке элементов будут разными и они зависят от величины тепловых потоков, идущих с разных сторон элемента. Используя начальное условие и аналитические решения для температуры из уравнения граничного условия третьего рода т.е. из условий теплообмена находятся коэффициенты теплообмена.

После определения коэффициентов температуропроводностей и теплообмена, температурное поле грунта для последующих времен находятся из условия разности температурных потоков между элементами области. Временной шаг берется не очень большим, а выбирается из физики процесса так, чтобы изменение температуры грунта была незначительной. Затем вычисленные значения температуры грунта в другом временном шаге, используя их как начальное условие и процесс определения коэффициентов температуропроводностей, теплообмена и температуры грунта повторяется заново по изложенному алгоритму. На стыках границ или элементов области ставится два условия теплообмена т.е. на основании пруда ставится два условия для теплового потока, идущий со стороны пруда и со стороны грунта

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_e}{\partial x} &= \gamma_1^{-i(T_e - T_1), x=0, \delta} \\ \frac{\partial T_z}{\partial x} &= \gamma_1^{+i(T_z - T_e), x=0, \delta} \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь условие (8) означает поток тепла, идущий со стороны окружающей среды или от пруда, а условие (9) поток тепла со стороны грунта основания хвостохранилища, T_e - температура воды пруда или температура окружающей среды; $T_1 - i$ температура грунта основания пруда или температура грунта на дневной поверхности; $T_r = T^k(x, t, a) = N_i^k(x, t, a) * T_i + N_j^k(x, t, a) * T_j$, аналитическое решение температура грунта в k -ом элемента, с помощью которой находятся коэффициенты температуропроводностей для каждого элемента; $\gamma_1^{-i, \gamma_1^{+i}}$ - аналоги коэффициента теплообмена между водой(окружающей среды) и грунтом,

грунтом и водой (окружающей среды). Коэффициенты теплообмена находятся, используя начальные условия температуры и вычисленные коэффициенты температуропроводностей при $t_0 = 0$.

$$Y_{1-}^{-i,i} = \frac{\partial T_2 / \partial x}{T_2^{(0)} - T_1^{(0)}}, \quad Y_{1+}^{+i,i} = \frac{\partial T_2 / \partial x}{T_1^{(0)} - T_2^{(0)}} \quad (10)$$

Используя найденные значения коэффициентов теплообмена, находятся значения температуры в последующие моменты времени для первого элемента «1»

$$T_1 = i, i, \quad T_2 = i, i \quad (11)$$

Температура грунта для последующих элементов находятся из условия сшивания, т.е. из уравнения, характеризующее разность температурных потоков на стыках элементов. На стыке элементов «1» и «2» имеем уравнение

$$\frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial T_2^{(2)}}{\partial x} = Y_2^{-i,i} (T_2 - T_3) - Y_2^{+i,i} (T_2 - T_1) i, i$$

или

$$T_3 = \frac{-i, i T_2 - \frac{Y_2^{+i,i} \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial x} T_2}{Y_2^{-i,i} - \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial x} i, i}}{Y_2^{-i,i}} i, i \quad (12)$$

Аналоги коэффициентов теплообмена $Y_2^{-i,i}, i, i$ $Y_2^{+i,i}$ находятся из условия теплообмена, используя начальное условие для температуры

$$\square_{Y_2^{-i,i}} \quad \square_{Y_2^{+i,i}} \quad (13)$$

Повторяя этот алгоритм находятся последующие значения температуры грунта. Согласно изложенному алгоритму решена задача на основе данных наблюдения температуры в скважине (ВН93-12 от 23 июня 1993 г.) глубиной 30 м. определены коэффициенты температуропроводностей и значения температуры в разные моменты. Достоверность полученных результатов проверялась сравнением с данными наблюдений температуры этой скважины. Сравнение показано на рис.1.1. Глубина скважины подразделена на 17 элементов.

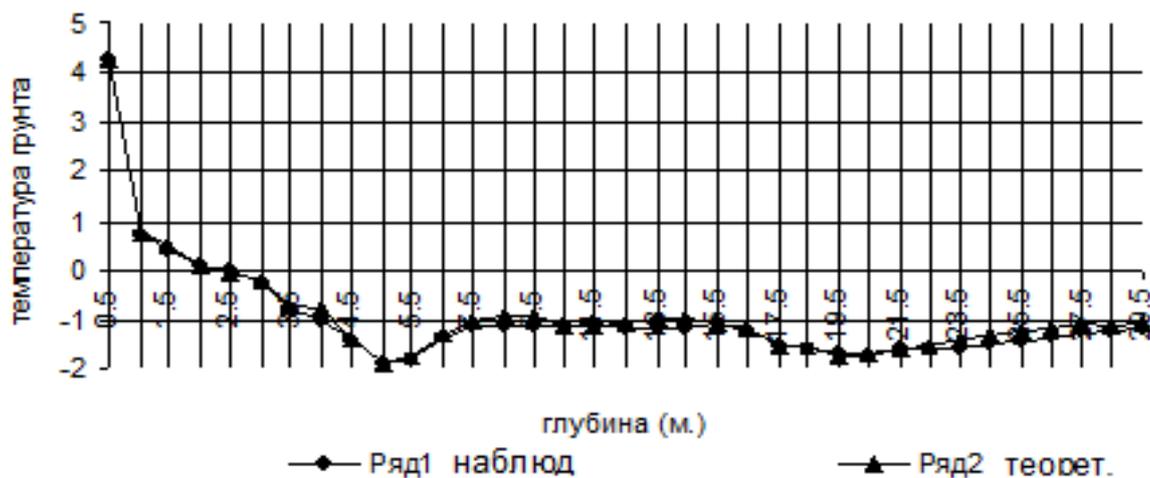


Рис. 2.1. Температура грунта.

В табл. 2.1 приведены результаты определения коэффициента температуропроводности для талого (до 2м.) и мерзлого грунта (более 2 м.), как решения трансцендентных уравнений. В первой строке приведены номера элементов, во второй строке соответствующая глубина грунта, в третьей строке соответствующее значение коэффициента температуропроводности $a^2 = k / \rho r$. Мелкое разбиение проводилась в зоне активного слоя, где изменение температуры происходит заметнее и более крупное разбиение в зоне вечной мерзлоты, где изменение температуры происходит незначительно.

Таблица 2.1

Значения коэффициента температуропроводности

№ №	1	2	3	4	5
X (м)	0.5 - 1.5	1.5 - 2.5	2.5 - 3.5	3.5 - 4.5	4.5 - 6.5
a^2	$0.272 \cdot 10^{-4}$	$0.145 \cdot 10^{-4}$	$0.247 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.500 \cdot 10^{-4}$
№ №	6	7	8	9	10
X (м)	6.5 - 8.5	8.5 - 10.5	10.5 - 12.5	12.5 - 14.5	14.5 - 16.5
a^2	$0.143 \cdot 10^{-4}$	$0.339 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.164 \cdot 10^{-4}$

№ №	11	12	13	14	15
X (м)	16.5 - 18.5	18.5 - 20.5	20.5 - 22.5	22.5 - 24.5	24.5 - 26.5
a^2	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.209 \cdot 10^{-4}$	$0.240 \cdot 10^{-4}$	$0.196 \cdot 10^{-4}$	$0.259 \cdot 10^{-4}$

Следует отметить одну особенность предложенного подхода. При получении результатов расчета не использовалась прямая информация о коэффициенте теплопроводности, а использовалась косвенная информация-данные наблюдения температуры. Такой подход в отличие от обычных численных методов, дискретизация области производится на произвольные размеры элементов в зависимости от физики строения среды и не проводится решение системы алгебраических уравнений, т.е. нет операций приближенного вычисления производных и интегралов, а они вычисляются аналитически. В таком случае избавляемся от вычислительных погрешностей.

Задача 2.2. Согласно изложенному алгоритму рассматривается задача определение коэффициентов температуропроводностей, теплообмена между элементами и значения температуры в разные моменты времени.

В качестве примера рассматривается данные другой наблюдательной скважины глубиной 20м. Исходными данными являются значения температуры грунта по глубине скважины, полученные из термисторов. Здесь область с размерностью 20м. разбивается неравномерно на 10 элементов. В табл.1.2 приведено значения коэффициентов температуропроводностей по глубинам, найденные как решения трансцендентного уравнения (6) с точностью $\varepsilon = 0.002$. Как видно из табл.2.2 значения коэффициентов температуропроводностей до глубины 7.53м. постоянны и равны 0.2765, а от 7.53м. до 20м. также постоянны и равны 4.402. В табл.2.3 приведены значения коэффициентов теплообмена на стыках элементов, вычисленные по формуле (13).

Таблица 2.2.

Значения коэффициентов температуропроводностей

x	4.53-5.53	5.53-6.53	6.53-7.53	7.53-8.53	8.53-9.53	9.53-11.53	11.53-14.53	14.53-19.53
a	0,2765501	0,27655	0,27655	4,40155	4,40155	4,40155	4,40155	4,40155

Таблица.2.3

Значения коэффициентов теплообмена на стыках элементов

x	4,53	5,53	6,53	7,53	8,53	9,53	11,53	14,53
M[k]	- 0,53800 83	- 17,852 91	- 9,3111 28	- 100,32 99	- 54,040 02	- 5,5546 11	- 17,771 61	- 5,3587 85
M1[k]	- 0,07216 88	- 19,100 33	- 52,693 99	- 25,184 57	- 3,6987 98	- 25,889 69	- 3,7800 1	- 10,966 62

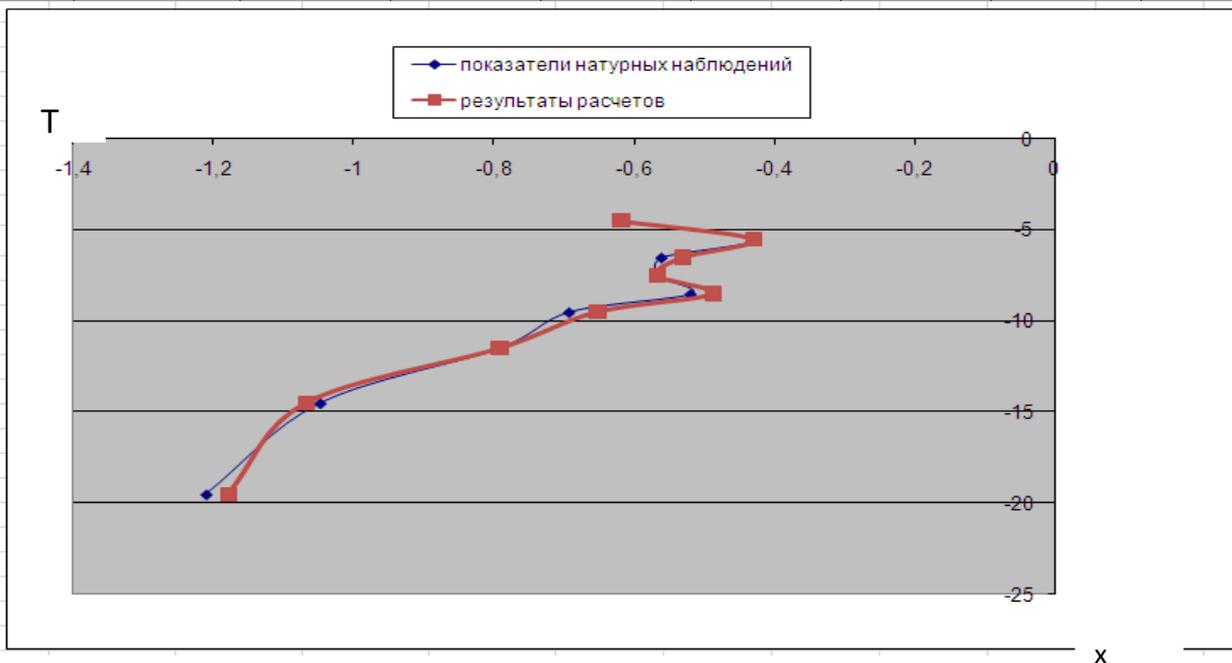


Рис.2.2. Температура грунта

Вторая строка табл.2.3 соответствует коэффициентам теплообмена, характеризующий поток тепла, идущий со стороны с дневной поверхности или с дна пруда, а третья строка соответствует коэффициентам теплообмена, характеризующий поток тепла идущей со стороны вечной мерзлоты. Используя

найденные теплофизические параметры, определены значения температуры грунта в разные времена и в разных глубинах по формуле (12) и (13). На рис.2.2 показаны графики значения температуры, вычисленные теоретическим способом и данные из натуральных наблюдений. Как видно из графика они почти совпадают. Это подтверждает правильность подхода и алгоритма определения температуры грунта, коэффициентов теплопроводностей и теплообмена.

Задача 2.3. Водохранилище наполняется отходами и цианистой водой золоторудной фабрики, расположенная в условиях вечной мерзлоты. Под влиянием плюсовой температуры воды начинается таяния основания пруда. Требуется определить коэффициент теплопроводностей и движение фронта таяния мерзлого грунта под основанием пруда, как решение начально-краевой задачи теплопереноса.

Методика решения. Область решения будем рассматривать как состоящая из двух элементов независимо от размера области. Первый элемент будет зоной талого грунта. Второй элемент - зоной мерзлого грунта. Причем размеры обоих элементов изменятся с течением времени из-за таяния мерзлого грунта под влиянием температуры воды в пруде. Математическая модель процесса таяния мерзлого грунта будет (1)-(4). Построение аналитического решения такой математической модели рассматривалась в предыдущих задачах.

В начале заполнения водоема длина первого элемента (зона таяние) будет маленькой по сравнению со второй. С течением времени этот элемент будет увеличиваться т.е. будет происходить таяния мерзлого грунта под влиянием плюсовой температуры воды в пруде, а второй элемент будет уменьшатся. Подвижная точка (фронт таяния) находится численно, решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (4), методом Рунге-Кутты. Особенность данного подхода заключается в том, что все время используется три заданные постоянные температуры: на основании пруда поддерживается постоянная температура воды T_b , на границе таяния постоянная $T_0 = +0.01C^0$, которая двигается вместе с фронтом таяния и на конце

глубины L за которой поддерживается постоянная минусовая температура (вечная мерзлота) $T_1 = -1.86\text{C}^0$. Используя данные температуры в каждые моменты времени как начальное условие на каждом элементе численно находятся коэффициенты температуропроводностей как решение трансцендентного уравнения (6)

$$N_i^1(x, t, a) * T_e + N_j^1(x, t, a) * T_0 = T^*, \quad N_i^2(x, t, a) * T_0 + N_j^2(x, t, a) * T_1 = T^{**},$$

где T^* , T^{**} средние значения температуры в середине каждого элемента.

Результаты исследований. Данный алгоритм апробирован на конкретном примере, предполагая температуру воды на дне пруде хвостохранилища постоянной равной $+4\text{C}^0$, $+6\text{C}^0$, $+8\text{C}^0$, $+10\text{C}^0$ на период одного года произведены расчеты согласно изложенного алгоритма. Результаты численного эксперимента приведены на рис. 1.2.1. Как видно из рис 1.2.1. при температуре воды $+4\text{C}^0$ в течении года глубина таяния достигает 3,65м., а при $+6\text{C}^0$ достигает 4,48м.

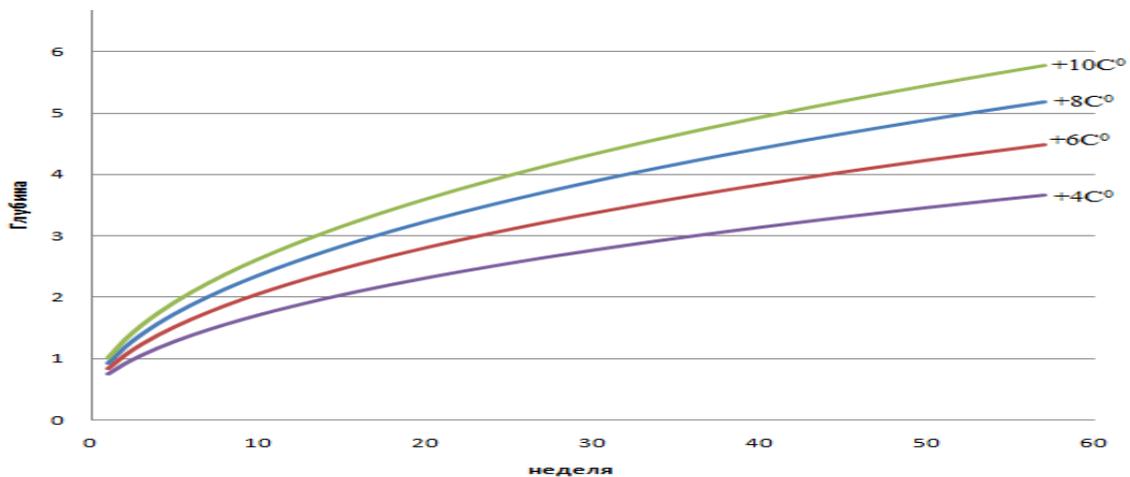


Рис. 2.3 Глубина таяния основание хвостохранилища в зависимости температуры воды.

Полученные результаты согласуются с данными полученными в работах (Назаров Л.А., Назарова Л.А.(2015), Востриков В.М.(2015), что подтверждает достоверность алгоритма реализации математической модели предложенным подходом.

Задача 2.4. Требуется определить глубину таяния мерзлого грунта, расположенные в условиях вечной мерзлоты под влиянием температуры окружающей среды за теплый период года с идентификацией коэффициента температуропроводности.

Задачи изучения таяния вечной мерзлоты под влиянием температуры окружающей среды является одним из важных вопросов изучения устойчивости гидротехнических сооружений, расположенные в условиях вечной мерзлоты, а также изучения вопросов потепления климата. В качестве примера рассматривается грунты, расположенные на уровне 4000м. в условиях вечной мерзлоты. Значения температуры окружающей среды использовались из данных наблюдений метеостанции Кумтора. Теплый период длится почти до пяти месяцев начиная с мая до сентября.

Методика решения. На основе математической модели теплопроводности в талых и мерзлых грунтах (1)–(4) согласно вышеизложенному алгоритму определяются значения коэффициентов температуропроводностей из начального условия модели (2). Затем строится аналитическое решение задачи теплопроводности отдельно для зоны таяния и для мерзлой зоны (6). Используя эти аналитические решения, численно находятся глубина таяния мерзлого грунта под влиянием температуры окружающей среды из условия сопряжения температурных потоков на границе зоны талого и мерзлого грунта решением уравнение Стефана (4).

Результаты исследований. Данный алгоритм апробирован на примере, имитирующее условие Кумтора т.е. использована температура окружающей среды за теплый период 2011 года, грунт глубиной 20м. и за которой начинается вечная мерзлота, температура которой равна -1.86°C , теплофизические характеристики λ_{T} , λ_{M} , w , q_0 принималась предположительно равной $\lambda_{\text{T}}=1.21$ ккал/(ч·м· $^{\circ}\text{C}$), $\lambda_{\text{M}}=1.54$ ккал/(ч·м· $^{\circ}\text{C}$), $w=0.11$, $q_0=650$. В результате расчета на каждом шаге времени путем идентификации аналитического решения с натурными данными определялись коэффициенты температуропроводностей, для талого и мерзлого грунта. Они почти не изменялись с течением времени и равнялись

$a=1.893 \text{ м}^2/\text{ч}$. Результаты расчета по определению глубины таяния вечной мерзлоты под влиянием температуры окружающей среды за теплый период года представлены на рис. 2. 4



Рис. 2.4. Глубина таяние вечной мерзлоты за теплый период года.

Как видно из рис. 2.4 глубина таяния в течении 5 месяцев с мая по сентябрь месяцы глубина таяния мерзлого грунта достигает до 1.8м. Натурные наблюдения за глубиной таяния на территории Кумтора колеблется в пределах 1.78 м. до 2.6 м., что подтверждает достоверность полученных результатов, а также предложенного подхода.

Задача 2.5 Рассматривается процесс таяние мерзлого грунта под основанием водоема глубиной H под влиянием фильтрации и температуры воды. Температурно-фильтрационный процесс под основанием водоема рассматривался как одномерный процесс.

Математическая модель. Считая, что температура грунта и температура фильтрующейся воды одинаковыми, т.е. принимается модель Фурье-Кирхгофа (Фельдман...Томиардо..). В зоне талого грунта учитывается фильтрация воды из водоема, а в зоне мерзлого грунта фильтрация не учитывается. Математическая модель такого процесса имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} \frac{\partial T_T}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2} - v \frac{\partial T_T}{\partial x}, 0 \leq x \leq h. \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \\ \dot{\rho} \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \leq x \leq L \end{aligned} \right\} \quad (2.5.1) \quad (2.5.2)$$

Начально-граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 t = 0; \quad x \in [0, L]; \quad T_M &= f_1(x). \\
 x=0, \quad T_T &= T_B, \\
 x=h, \quad T_T &= T_M = T_0 \\
 x=L, \quad T_M &= T_1,
 \end{aligned}
 \tag{2.5.3}$$

где соответственно – T_B , T_0 , T_1 температура воды в пруде, температура таяния мерзлого грунта и температура вечной мерзлоты. Условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта описывается уравнением:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x} \right]_{x=h} = q_0 w \gamma \frac{\partial h}{\partial t},
 \tag{2.5.4}$$

где T_T – температура зоны талого грунта, T_M - температура мерзлого грунта, являющиеся решением начально-краевой задачи (2.5.1) - (2.5.2); T_B - температура дна пруда; a_t , a_m , λ_t , λ_m - коэффициенты теплопроводности и температуропроводности грунта в талых и мерзлых грунтах; h - глубина таяния; w - количество льда в грунте; q_0 - теплота плавления льда, γ - удельный вес грунта, v – скорость фильтрации воды из водоема.

Методика решения. Строится аналитико-частное решение начально-краевой задачи (2.5.1)-(2.5.3), удовлетворяющее начальным и граничным условиям задачи отдельно для талой зоны и для мерзлой зоны. В качестве базисных функций для талой зоны используются линейно-независимые частные решения уравнения теплопроводности (2.5.1), а для зоны мерзлого грунта уравнения (2.5.2). Для построения аналитического решения для талой зоны с учетом фильтрации из водоема используется преобразование вида

$$T(x, t, a) = e^{\frac{v|x-vt|}{2a}} U(x, t, a),
 \tag{2.5.5}$$

которое преобразует уравнение (1.3.1) к виду

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (2.5.6)$$

где $U(x, t, a)$ – новая неизвестная функция. Она находится как решение соответствующей начально-краевой задачи через преобразование (2.5.5), a – коэффициент температуропроводности. Тогда аналитическое решение начально-краевой задачи (2.5.1)-(2.5.3) запишется

$$T_T(x, t, a) = e^{\frac{v|x-vt|}{2a}} (N_i(x, t, a)U_i + N_j(x, t, a)U_j), \quad (2.5.7)$$

$$\text{где } U_i = T_i e^{\frac{-v_i(x_i - v_i t)}{2a}}, U_j = T_j e^{\frac{-v_j(x_j - v_j t)}{2a}}.$$

Начальная область мерзлого грунта длиной L разбивается на два элемента. Первый элемент начинается от дневной поверхности до фронта таяния, которая является неизвестной и подвижной. Второй элемент начинается от фронта таяния до вечной мерзлоты глубины L в которой отсутствует фильтрация воды. С течением времени размеры элементов будут изменяться т.е. происходят таяние мерзлого грунта под влиянием температуры и фильтрации воды из водоема. Подвижная граница (фронт таяния) находится численно решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (2.5.4) методом Рунге-Кутты. Шаг по времени принималась равной одной сутки. Расчеты проводились на период одного года. Температура на дне водоема поддерживается постоянной равной температуры воды, на фронте таяния - постоянная температура равной $+0.01\text{C}^0$ (температура плавления льда), которая двигается вместе с фронтом таяния и на конце глубины L поддерживается постоянная минусовая температура (вечная мерзлота) -1.86C^0 . Используя данные температуры в каждые моменты времени на каждом элементе численно находятся коэффициенты температуропроводности как решение трансцендентных уравнений

$$N_i^{(2)}(x, t, b) * T_6 + N_j^{(2)}(x, t, b) * T_0 = T^*,$$

$$e^{\frac{v|x-vt|}{2a}} (N_i^{(1)}(x, t, a) * U_0 + N_j^{(1)}(x, t, a) * U_1) = T^{**},$$

где T^* , T^{**} средние значения температуры в середине каждого элемента.

Для иллюстрации влияния фильтрации воды из водоема на глубину таяния основание пруда рассмотрено различные варианты решение задачи: без учета и с учетом фильтрации из водоема.

Вариант 1. Процесс протаивания под основанием водоема рассматривается без учета фильтрации воды из водоема т.е. уровень воды в водоеме не учитывалась, а учитывалась только ее температура. Исходные данные считались равными. $\lambda_T=1.24, \lambda_M=1.54. L=21m$. Температура воды на дне водоема считалась равной $+6^{\circ}C$. Результаты показывают, что в течении одного года глубина протаивания достигает 4.51м.

Вариант 2. Процесс протаивание под основанием водоема рассматривается с учетом глубины водоема равной $H=8m$. и фильтрации воды из водоема. Коэффициент фильтрации считалась равным $k_f=0.0312$, пористость $m_p=0.22$. Скорость фильтрации вычислялась по формуле Дарси. В этом случае глубина протаивание в течении года достигла до 6.45м. График результатов расчета приведены на рис.2.5.1.

Вариант 3. Рассматривается этот же случай, но глубина воды водоема на два метра больше, т.е. глубина считалась равной 10м. В этом случае скорость фильтрации будет больше чем в предыдущем варианте и глубина протаивание достигает за один год до 8.58м. Увеличение уровня воды в пруде на два метра с учетом фильтрации приводит к увеличению зоны таяния мерзлого грунта на 2.13м.

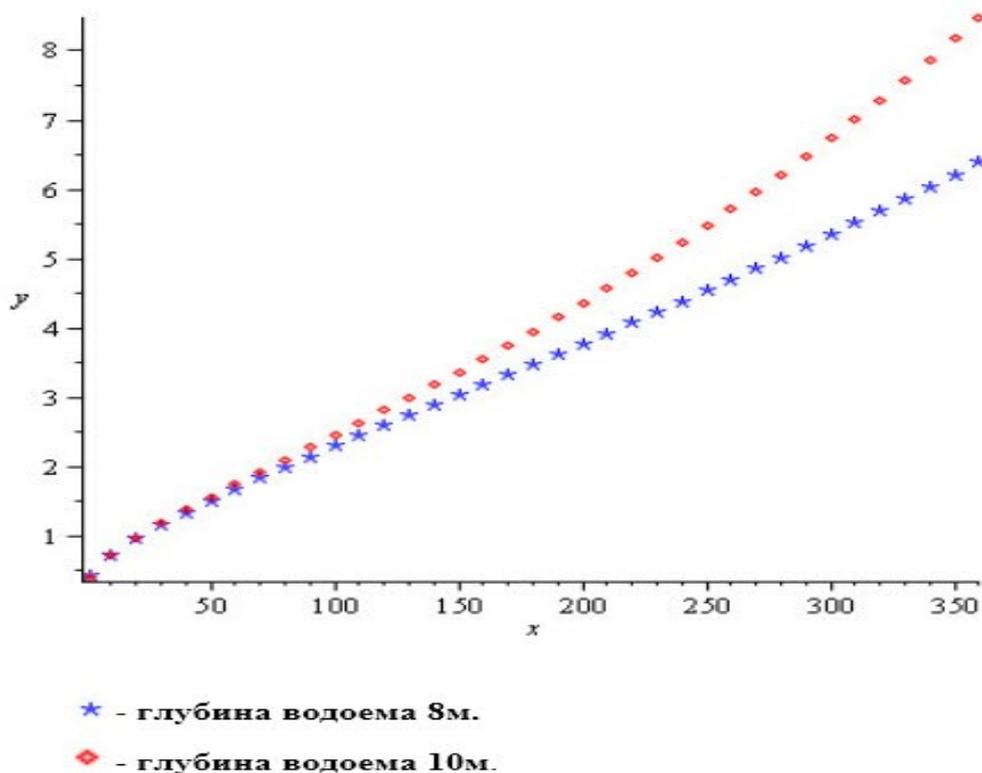
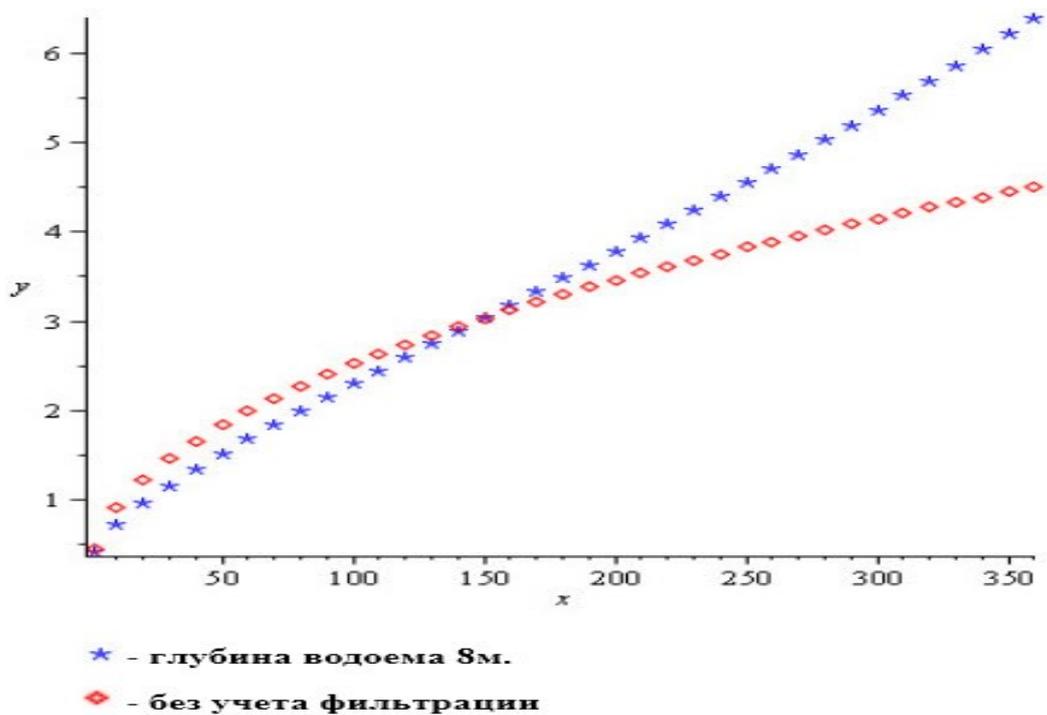


Рис. 2.5.1. Глубина таяния основание хвостохранилища в зависимости от уровня воды в пруде.

Из вычислительного эксперимента следует, что глубина протаивания под основанием водоема значительно зависит от уровня воды в пруде или от

скорости фильтрации воды из водоема т.е. чем выше уровень воды в водоеме, тем больше размеры зоны таяния мерзлого грунта под основанием. При эксплуатации хвостохранилища и в целях экологической безопасности окружающей среды следует уделить внимание уровню воды в водоеме в случае фильтрации под основанием хвостохранилища.

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ И ОЦЕНКА АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПЕРЕНОСА.

3.1 Математическая модель конвективного теплопереноса в мерзлых грунтах и аналитические решения.

Рассматривается математическая модель таяния мерзлого грунта в отличие от математической модели, рассмотренной во второй главе, где процесс таяния мерзлого грунта моделируется отдельно для талой зоны в виде начально-краевой задачи и отдельно для мерзлой зоны в виде (1) - (3). Неизвестная подвижная граница находится как решение уравнение Стефана (4). В данной главе процесс таяния мерзлого грунта моделируется одним уравнением с начально-краевыми условиями. Неизвестная подвижная граница находится местоположением нулевой изотермы. Такой подход позволяет эффективно находить время перехода в стационарный режим, анализировать степень влияния начального и граничных условий на процесс таяния.

Постановка задачи. Вариант 1. Процесс таяния мерзлого грунта рассматривается как задача переноса тепла в одной области под влиянием изменения вида граничного и начального условия. Фронт таяния находится местоположением нулевой изотермы. Математически задача формулируется следующими уравнениями в частных производных:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

и граничными условиями

$$T(0, t) = T_1, \quad T(L, t) = T_2 \quad (3.2)$$

Начальное условие температуры грунта под основанием строится на основе данных наблюдений.

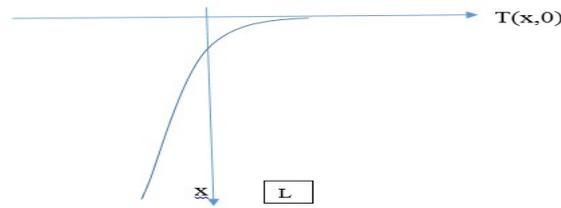


Рис.3.1. Начальное условие температуры

Аналитически начальное условие аппроксимировалось в виде одной ветви параболы

$$T(x,0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c \quad (3.3)$$

Постоянные коэффициенты a , b , c – определяются из данных наблюдений температуры грунта методом наименьших квадратов.

Аналитическое решение задачи строится в виде двух слагаемых

$$T(x,t) = T_{CT}(x) + T_{HC}(x,t) \quad (3.4)$$

где $T_{CT}(x)$ – стационарная часть решения, которая строится на основе неоднородных граничных условий, $T_{HC}(x,t)$ – нестационарная часть решения. Она строится на основе начального и однородных граничных условий и имеют вид:

$$T_{CT}(X) = Ax + B = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1, \quad T_{HC}(X,t) = \sum_1^n b_n e^{-\frac{\pi n^2 a^2 t}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \overline{\varphi(x)} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx = \\ &= \frac{2a}{L} \left[-\frac{L^3}{\pi n} (-1)^n + 2 \frac{L^3}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right] + \\ &+ \frac{2}{L} (b - A) \left[-\frac{L^2}{\pi n} (-1)^n \right] + \frac{2}{L} (c - B) - \left[\frac{L}{\pi n} ((-1)^n - 1) \right]. \\ \overline{\varphi(x)} &= ax^2 + bx + c - (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1, \end{aligned}$$

Аналитическое решение данной краевой задачи удовлетворяющие начально-краевым условиям запишется

$$T(x, t) = T_{cm}(x) + (x, t) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1 + \sum_i^n b_n e^{-\left(\frac{\pi * i}{L}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi * i}{L} x\right) \quad (3.5)$$

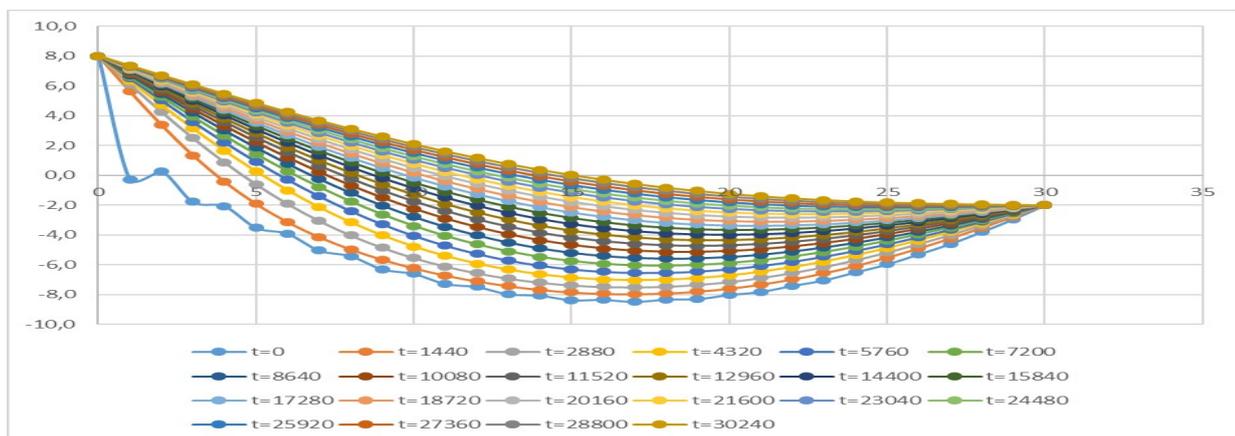
С помощью аналитического решения (3.5) математической модели (3.1) - (3.3) рассмотрены следующие задачи:

ЗАДАЧА 3.1. Начальное условие температуры грунта под основанием водоема имели значение в точках 1. $x_1=0\text{m.}$, $T_1^0=+2^0\text{C.}$ 2. $x_2=1.7\text{m.}$, $T_0^0=0^0\text{C.}$ 3. $x_3=L=30\text{m.}$, $T_2^0 = -2^0\text{C.}$ Грунт под основанием водоема считается песчанником, коэффициент температуропроводности, которого равен $0.004283^2 \text{ м}^2/\text{час.}$ Затем водоем заполняется водой, температура которого равна $T_1= +8^0\text{C.}$ На глубине $L = 30 \text{ m.}$ находится вечная мерзлота, температура которой равна $T_2 = -2^0\text{C.}$ Требуется определить, через какое время процесс таяния мерзлого грунта остановится и перейдет в стационарный режим, а также определить предельную глубину таяния мерзлого грунта за это время.

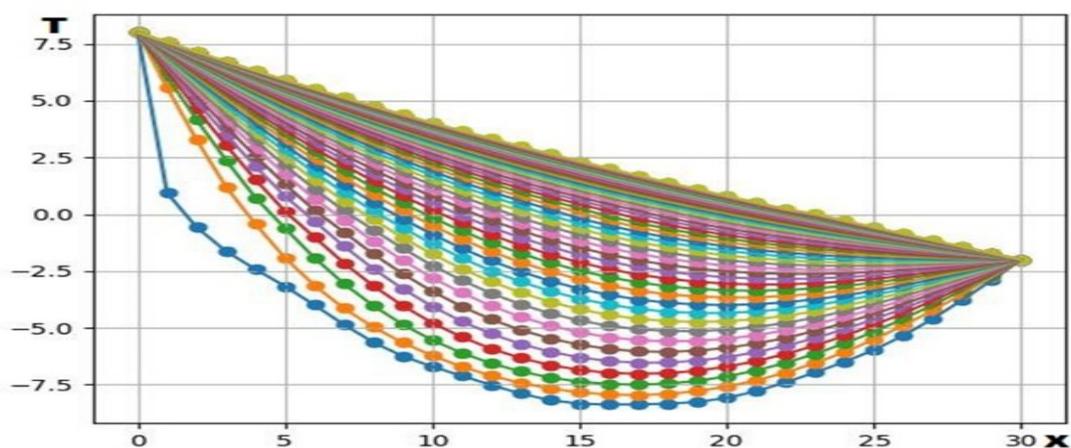
Для решения данной задачи из условия сходимости ряда (3.5) с точностью 0.0003 находится количество членов и она равнялась $n = 25.$ Начальное условие аппроксимировалось одной ветвью параболы с помощью заданных значений температуры в трех точках

$$\varphi(x) = 0.036859737x^2 - 1.2391325435x + 2$$

Результаты расчета, проведенные с помощью аналитического решения (3.5), приведены на рис.3.1 а), б). На рис. 3.1 а) показано, когда процесс таяния еще не установился за 3.5 года и за это время глубина таяния достигла 15 метров.



а)



б)

Рис.3.1. Значения температуры грунта под основанием водоема в различные моменты времени

Из графика на рис. 3.2. б) видно, что для песчаника теплоперенос устанавливается после 70080 часов, что примерно соответствует 8.06 годам. За это время процесс таяния доходит до глубины 23.2 метра. Это указывает на то, что нестационарный процесс переходит к стационарному процессу примерно через 8.06 лет и затем не изменяется, что соответствует физическим свойствам процесса.

Затем приводится численный анализ решений, позволяющие определять степень влияния на глубину таяния мерзлого грунта температуры воды в пруду.

На Рис.3.2 показаны результаты расчета для случая, когда температура воды в водоеме $+6^{\circ}\text{C}$. На Рис. 3.3 показаны результаты расчета, когда температура воды в водоеме равнялась $+10^{\circ}\text{C}$. Как видно из результатов расчета за время, равное 30240 часов или примерно 3.5 года, глубина таяния при температуре $+6^{\circ}\text{C}$ доходит до 13 метров, при $+8^{\circ}\text{C}$ доходит до 15м., при $+10^{\circ}\text{C}$ доходит до 17 метров. Отсюда следует, что изменение температуры воды на два градуса влечет изменение глубины таяния на 2 метра за 3.5 года.

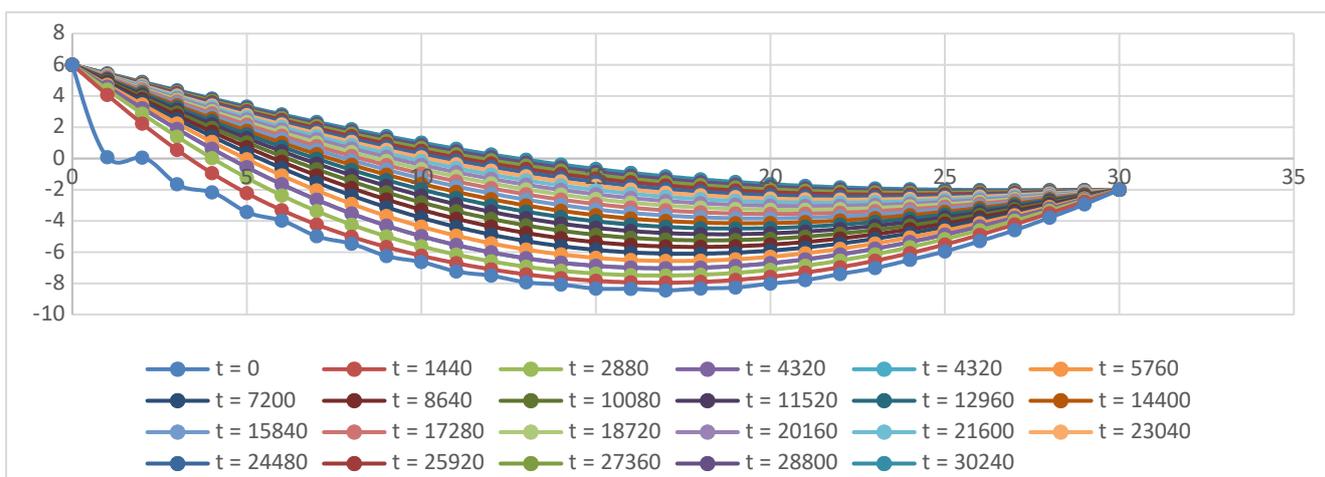


Рис. 3.2. Значения температуры в разные моменты времени по глубине

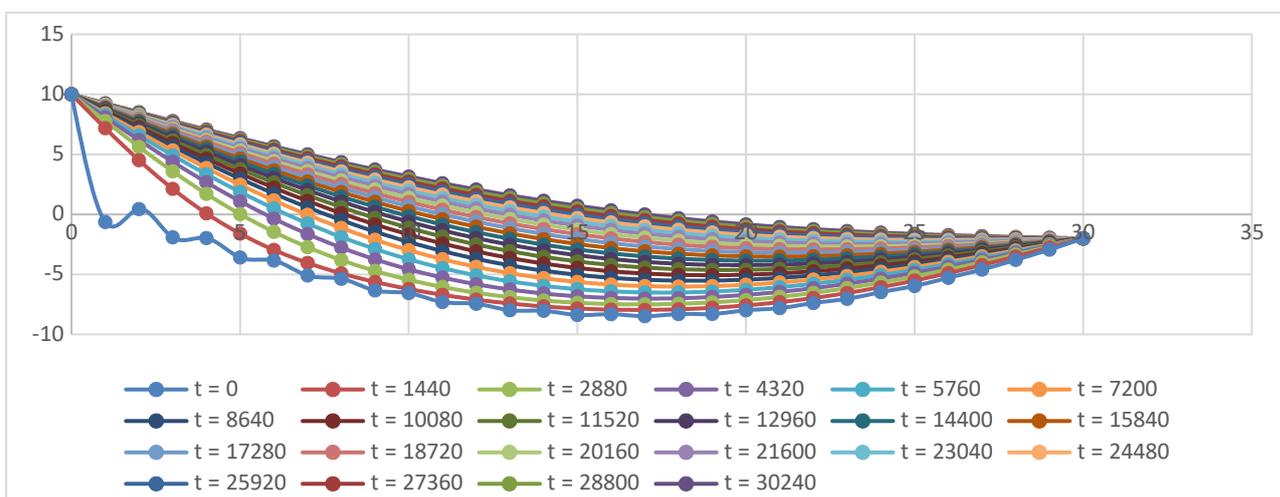


Рис. 3.3 Значения температуры в разные моменты времени по глубине

В следующей задаче рассматривается влияние изменения вида граничного условия на процесс таяния мерзлого грунта. На нижней границе ставится условие теплообмена т.е., граничное условие третьего рода, характеризующее холодный поток, идущий со стороны вечной мерзлоты.

Задача 3.2. Математическая модель такой задачи имеет вид:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} T(0,t) = g_1(t) \\ T_x(L,t) + hT(L,t) = g_2(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$T(x,0) = \varphi(x),$$

где $g_1(t), g_2(t)$ - заданные значения температуры на концах области.

Аналитическое решение строится аналогично как в предыдущем случае в виде двух слагаемых.

$$T(x,t) = S(x,t) + U(x,t) = A(t) \left(1 - \frac{x}{L}\right) + B(t) \left(\frac{x}{L}\right) + U(x,t), \quad (3.8)$$

где $A(t), B(t)$ находятся из граничных условий

$$A(t) = T_0, \quad B(t) = \frac{T_0 + LhT_{sp}}{Lh+1} \quad (3.9)$$

Неизвестное слагаемое $U(x,t)$ строится как решение неоднородного уравнения с однородными граничными условиями

$$U_t(x,t) = a^2 U_{xx} - S_t(x,t) \quad (3.10)$$

$$U(0,t) = 0$$

$$U_x(L,t) + hU(L,t) = 0$$

(3.11)

и начальным условием вида

$$U(x,0) = \varphi(x) - S(x,0) = ax^2 + bx + c - T_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \frac{T_0 + LhT_{sp}}{Lh+1} \left(\frac{x}{L}\right) \quad (3.12) \quad \text{Аналитиче-}$$

ское решение математической модели (2.11) – (2.13) имеет вид

$$U(x,t) = \sum_i^n b_i e^{-\lambda_i^2 a^2 t} \sin(\lambda_i x),$$

где λ_i определяется как решение трансцендентного уравнения

$$tg(L * \lambda_i) = -\frac{\lambda_i}{h}, \quad (3.13)$$

Общее аналитическое решение будет иметь вид

$$T(x, t) = T_e \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \frac{T_e + LhT_{ep}}{Lh+1} \left(\frac{x}{L} \right) + \sum_i^n b_i e^{-\lambda_i^2 a^2 t} \sin(\lambda_i x) \quad (3.14)$$

Результаты расчета когда температура воды в водоеме равна $+10^0$ С с учетом теплообмена на нижней границе приведено на Рис.2.6.

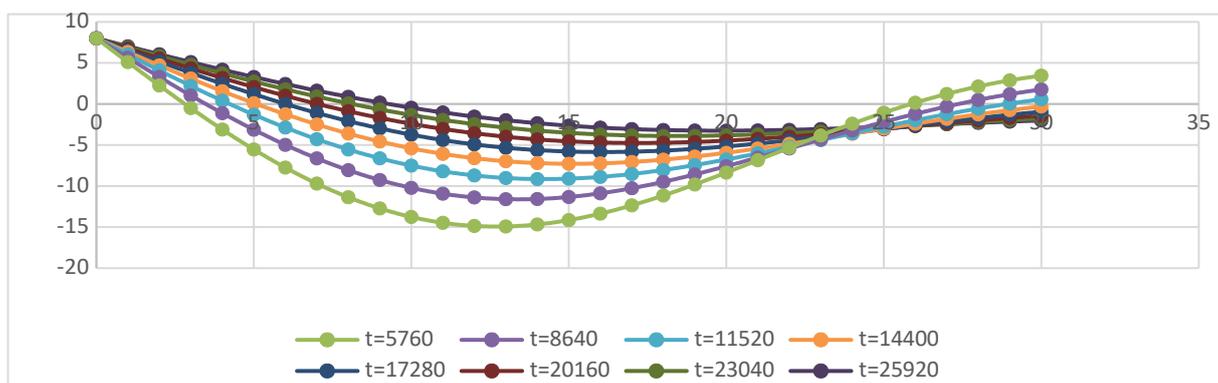


Рис. 3.4 Значения температуры грунта в разные моменты времени в случае, когда на нижней границе принимается граничное условие третьего рода

Точность результатов зависит от точности задания величины холодного потока, идущего со стороны вечной мерзлоты. Затруднительность знание точного значения коэффициента теплообмена позволяет получить приближенно-качественный результат. Как видно из графика, учет холодного потока из нижней границы значительно влияет на процесс таяния мерзлого грунта. По графику можно судить, что примерно за 25920 часов или за 3 года глубина таяния доходит до 10 м. Тогда как при решении этой же задачи при фиксированном значении температуры на нижней границе равной -2^0 С без учета теплообмена на нижней границе за 25920 часов или за 3 года глубина таяния доходила почти до 15 м. Отсюда следует, учет сильного холодного потока, идущего со стороны вечной мерзлоты значительно влияет на глубину таяния мерзлого грунта, т.е., значительно уменьшается глубина таяния и время установления нестационарного процесса. Неизвестное значение коэффициента теплообмена на нижней границе, приводит к приближенным результатам. Поэтому при реальных расчетах рекомендуется применять граничное условие первого рода на нижней гра-

нице, когда задается фиксированное значение температуры грунта, т.к. она поддается измерению.

Задача 3.3. Математическая модель процесса таяния мерзлого грунта под основанием водоема с учетом теплообмена скелета грунта в зоне талого грунта, а в зоне мерзлого грунта не учитывается. Математическая модель такого процесса имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta T(x, t), \quad (3.15)$$

здесь β – коэффициент теплообмена. В зоне талого грунта, где $T(x, t) \geq 0$, $\beta \neq 0$ и в зоне мерзлого грунта, где $T(x, t) < 0$, $\beta = 0$. Граничные условия имеют вид

$$T(0, t) = T_1;$$

$$T(L, t) = T_2; \quad (3.16)$$

Начальное условие данного процесса принимается аналогично предыдущему варианту задачи

$$T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c; \quad (3.17)$$

Аналитическое решение данной математической модели строится аналогично как в предыдущих случаях.

$$T(x, t) = S(x) + \omega(x, t); \quad (3.18)$$

где $S(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1$ – стационарная часть решения, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям (3.18). $\omega(x, t)$ – нестационарная часть решения. Оно строится как решение следующей начально - краевой задачи.

$$\omega_t = \alpha^2 \omega_{xx} - \beta(S(x) + \omega(x, t)) \quad (3.19)$$

$$\omega(0, t) = 0, \omega(L, t) = 0 \quad (3.20)$$

$$\omega(x, 0) = ax^2 + bx + c - S(x) \quad (3.21)$$

Решение данной задачи ищется в виде:

$$\omega(x, t) = \sum_{i=1}^n b_n(t) \sin \frac{\pi n}{L} x, \quad (3.22)$$

где $b_n(t)$ – неизвестные коэффициенты разложения. Оно находится путем разложения в ряд Фурье стационарной части решения. Удовлетворяя начальному условию (3.21) получаем общее аналитическое решение(3.19)-(3.21)

$$T(x,t) = S(x) + \omega(x,t) = \left[(T_2 - T_1) \frac{L}{L} + T_1 = T_2 \right] + \sum_{i=1}^n C_i \cos \left(\frac{\pi i x}{L} \right) \exp \left(-\beta \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 t \right) + \sum_{i=1}^n A_i \cos \left(\frac{\pi i x}{L} \right) \exp \left(-\beta \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 t \right) \quad (3.22)$$

$$A_i = 2\beta(T_1 + 2.0)(-1)^i / ((\pi i / L)^2 (T_2 - T_1) + \beta), C_i = (-2aL^2 - 2L(b - (T_2 - T_1))) / (\pi i (-1)^i + 4aL^2 (\pi i)).$$

На Рис.2.7. показаны результаты расчета предыдущего примера, полученные аналитическим решением данной модели (3.22), учитывающая теплообмен в зоне талого грунта. Значение коэффициента теплообмена принималось очень маленьким (0.0000043), т.к., при долгосрочном процессе значения температуры грунта и воды почти уравниваются. В этом случае теплообмен не будет происходить из-за одинаковой температуры разных сред. Как видно из графика процесс таяния под влиянием начального условия (3.17) и значения температуры воды в водоеме равной +8°C с учетом теплообмена переходит из нестационарного процесса в стационарный процесс через 70080 часов или 8.06 лет и глубина таяния доходит до 23.20 м.

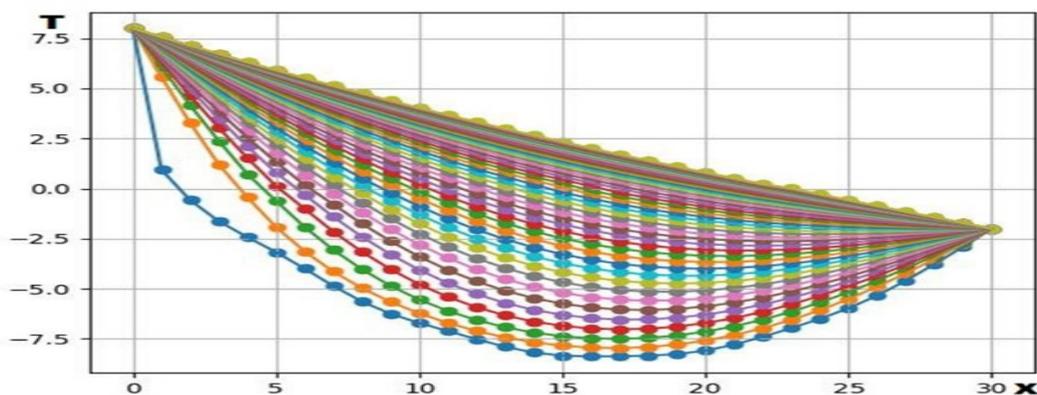


Рис.3.5. Ход изменения температуры грунта до установления процесса

На рис. 3.5 показано численное сравнение результатов математической модели с учетом и без учета теплообмена положения нулевой изотермы. Она находится как решение трансцендентного уравнения (3.22) при нулевом значе-

нии температуры грунта. Как видно из графика, положение нулевой изотермы постепенно устанавливается и переходит в неизменное состояние через 8.06 года при температуре воды в водоеме равной $+8^{\circ}\text{C}$ для грунта песчанника.

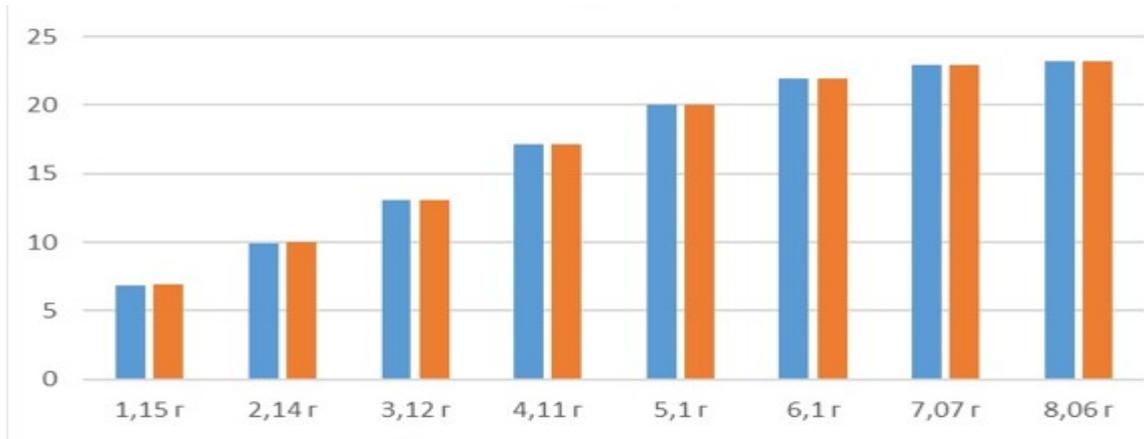


Рис.3.6. Положение нулевой изотермы с учетом и без учета теплообмена

Отсюда следует, что при долгосрочном прогнозировании процесса переноса тепла в мерзлых грунтах, процесс теплообмена между грунтом и талой водой можно пренебречь из-за уравнивания их температур. В таких случаях значение коэффициента теплообмена будет очень маленьким и влияние члена, характеризующего теплообмен в математической модели (3.15) - (3.17), можно пренебречь. Тогда при долгосрочном прогнозировании процесса переноса тепла в мерзлых грунтах можно использовать более простую математическую модель (3.1) - (3.3), в которой нет параметра теплообмена.

Задача 3.4. Здесь производится численный эксперимент на основе аналитического решения математической модели для выявления влияния или не влияния начального условия на глубину таяния мерзлого грунта под влиянием температуры воды в водоеме. Оно производится на основе анализа результатов расчета долгосрочного прогноза по определению глубины таяния. Математически оно производится формированием начальных условий, характеризующих начальное состояние среды перед началом эксплуатации сооружений, имитирующее зимнее, раннее весеннее и весеннее времена года. Схематически разные виды начального условия приведены на Рис.3.7.

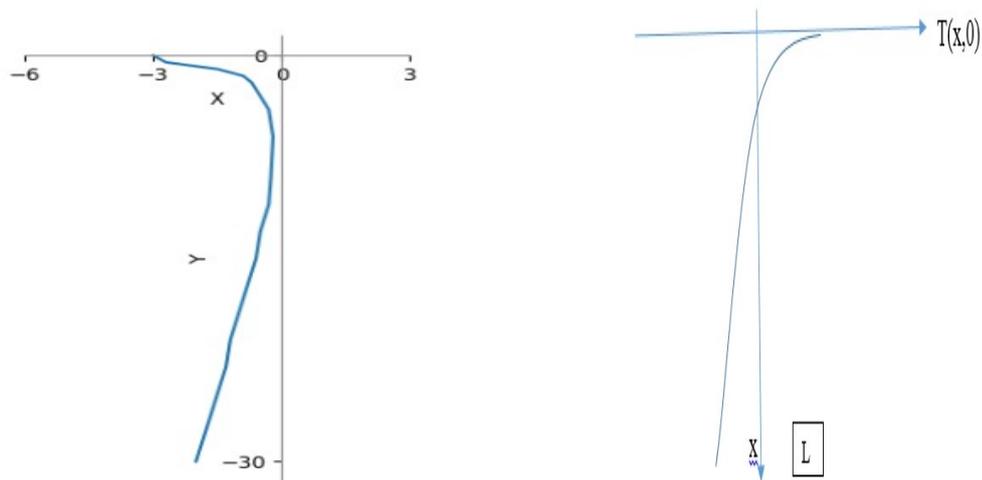


Рис.3.7 Виды начальных условий

Для весеннего случая начальное состояние грунта на дневной поверхности считалось равным $+2^{\circ}\text{C}$, нулевое значение температуры грунта находилось на глубине 1.7 м., вечная мерзлота начинается с глубины 30 м. и температура в этой точке равна -2°C . Для зимнего случая начальная температура грунта на дневной поверхности считалась равной -3°C . Грунт под основанием является песчанником с коэффициентом температуропроводности равным $0.0043^2\text{ м}^2/\text{час}$. Аналитические выражения начальных условий аппроксимировались одной ветвью параболы. Коэффициенты параболы определялись методом наименьших квадратов на базе 10 точек, в которых заданы значения температуры.

$$T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0.0369x^2 - 1.2392x + 2,0 \quad (3.23)$$

$$T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0.01033x^2 - 0.3682x + 2.0 \quad (3.24)$$

$$T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = -0.0084x^2 - 0.2392x - 1.9762 \quad (3.25)$$

Процесс переноса тепла под основанием водоема начинается при наполнении водоема водой температура, которой равна $+8^{\circ}\text{C}$. Согласно вышеизложенного алгоритма производятся прогнозные расчеты до установления нестационарного процесса переноса тепла в этой области. Результаты расчета приведены на Рис.3.8.

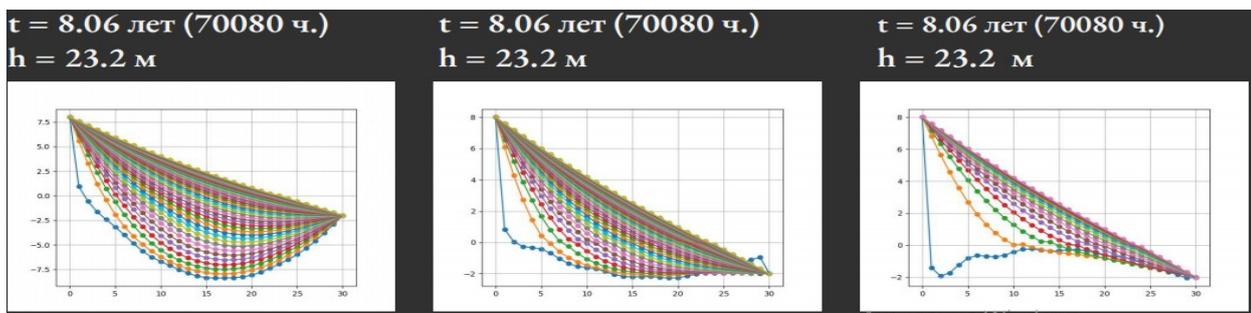


Рис. 3.8. Результаты прогнозных расчетов при разных видах начальных условий

Результаты расчета показывают, что при долгосрочном прогнозировании, нестационарный процесс переходит в стационарный процесс независимо от видов начальных условий в одно и то же время. Глубина таяния за это времени доходит до 23.2 м. Она определяется с местоположением нулевой изотермы как решение трансцендентного уравнения. Движение фронта таяния мерзлого грунта до стационарного процесса показано на Рис. 3.9.

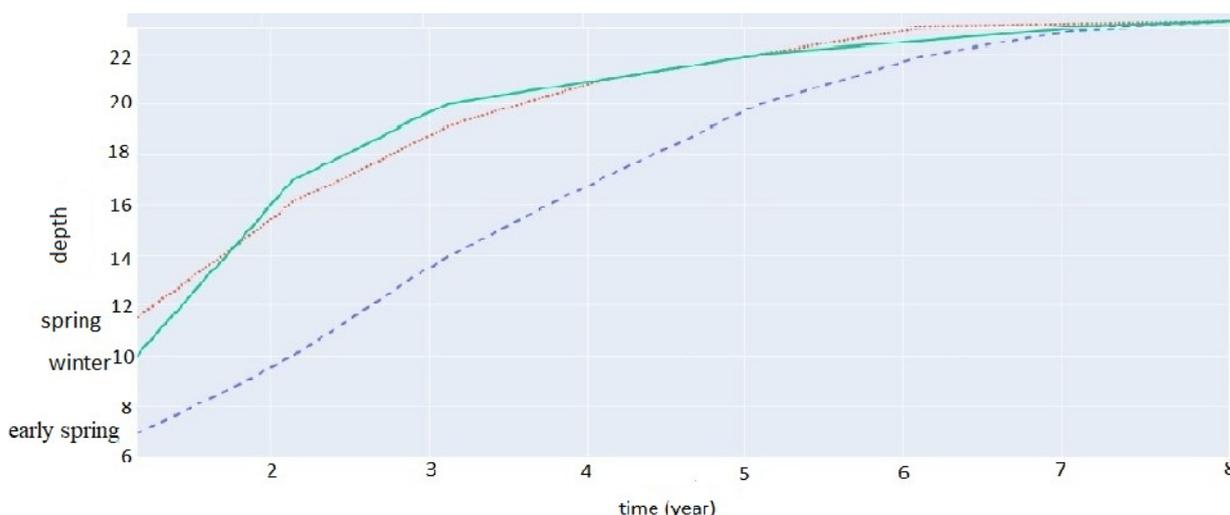


Рис. 3.9. Глубина таяния при разных видах начальных условий

Как видно из графика при долгосрочном прогнозировании глубина таяния не зависит от вида начального условия, а зависит от значения температуры воды в водоеме. Нестационарный процесс переноса тепла в мерзлом грунте переходит в стационарный процесс через 8.06 лет и глубина таяния доходит до 23.2 м. при температуре воды равной $+8^{\circ}\text{C}$. Такое утверждение сделали ученые Галкин А. Ф., Курта И. В. (2020). Отсюда следует, что начало эксплуатации со-

оружений, расположенных в условиях вечной мерзлоты, можно начинать не только зимой, а в любое удобное время.

Задача 3.5. Здесь решение задачи таяния мерзлого грунта производится двумя разными математическими моделями и производится сравнение результатов. На основе анализа предлагается предложение о выборе модели. С начала рассматривается модель теплопереноса отдельно в зоне талого и в зоне мерзлого грунта с учетом фазовых переходов между двумя зонами. Движение фронта таяния определяется из условия разности тепловых потоков идущих со стороны талого и мерзлого грунта, как решение задачи Стефана.

$$\left. \frac{\partial T_T}{\partial t} = a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq h \right\} \text{и.и.и.} \quad (3.5.1)$$

с начальными

$$t = 0; \quad x \in [0, h]; \quad T_T = f_1(x), \quad x \in [h, L], \quad T_M = f_2(x). \quad (3.5.2)$$

и граничными условиями:

$$\begin{aligned} x=0, \quad T_T &= T_B, \\ x=h, \quad T_T &= T_M = T_0 \\ x=L, \quad T_M &= T_1. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

где соответственно - T_B , T_0 , T_1 температура воды в водоеме, температура таяния мерзлого грунта и температура вечной мерзлоты. Условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта описывается уравнением Стефана:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x} \right]_{x=h} = q_0 w \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.5.4)$$

где T_T , T_M – аналитическое решение начально-краевой задачи (3.5.1)-(3.5.3) ; a_T , a_M , λ_T ; λ_M - коэффициенты температуропроводности, теплопроводности талого и мерзлого грунта; h - глубина таяния; w - количество льда в грунте; q_0 - теплота плавления льда. Начальные условия в каждой зоне принимаются аналитически как в предыдущих задачах в виде одной ветви параболы (3).

Аналитическое решение математической модели в зоне талого и мерзлого грунта строится аналогично как и в предыдущих задачах и имеют вид:

$$T_m(x,t) = \frac{8}{h}x + 8 + \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-\left(\frac{\pi n \alpha}{L}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{L} x,$$

$$T_m(x,t) = \frac{2}{L-h}x + \frac{2h}{L-h} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-i i \zeta},$$

где коэффициенты разложения D_n ряда Фурье. Глубина таяния определяется как решение обыкновенной дифференциальной уравнении Стефана (3.5.4) методом Рунге Кутта четвертого порядка. В качестве примера грунта под основанием водоема рассмотрена глина с физико-механическими характеристиками $a_T = 0.003024 \text{ м}^2/\text{сут.}$, $a_M = 0.01296 \text{ м}^2/\text{сут.}$ Результаты расчета уравнении Стефана приведены графически на рис. 7. Как видно из графика для грунта из глины процесс таяние переходит в стационарный режим через 7300 суток или 20.2 лет и глубина таяния доходит до 9.46м. Затем данная задача решена другой математической моделью (3.5.1)-(3.5.3), где глубина таяния находится как местоположения нулевой изотермы. Результаты расчета показаны на рис. 3.10



Рис.3.10. Глубина таяния как решение задачи Стефана

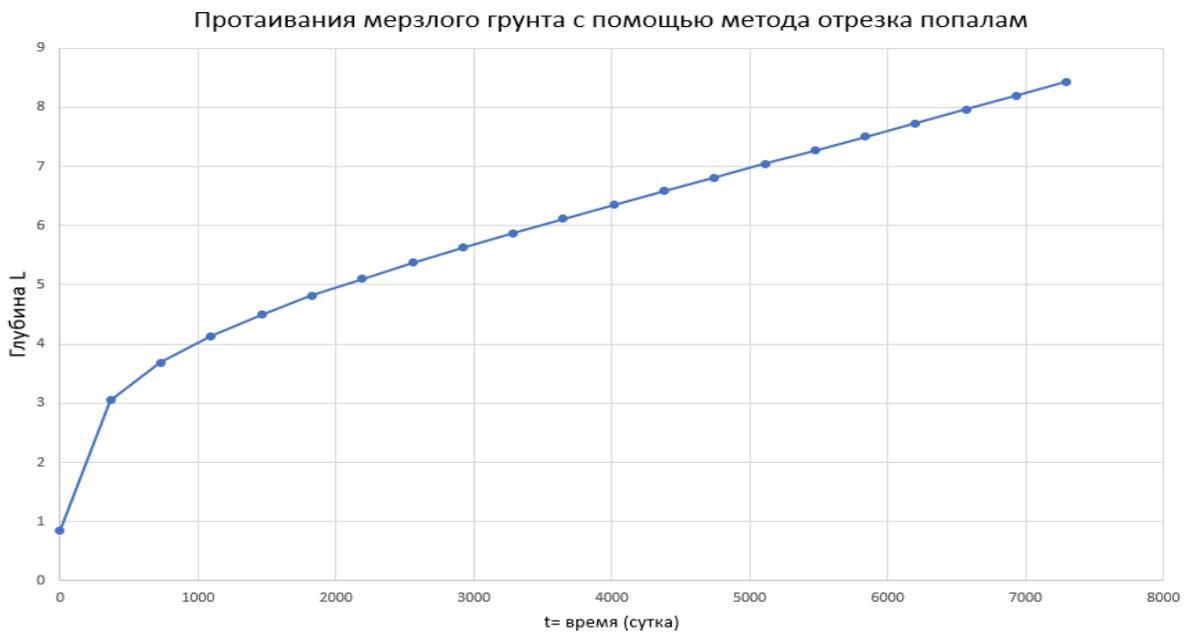


Рис.3.11 Глубина таяния как местоположение нулевой изотермы

Как видно из графика процесс таяния переходит в стационарное состояние через 7300сут. (20.2лет) и глубина таяния доходит до 8,53м. Результаты расчетов двух моделей показывают приблизительно одинаковые результаты. Разница результатов объясняются из-за неточности входных параметров как количество содержание льда, теплота плавления льда, коэффициента теплообмена. По итогам анализа полученных решений одной задачи с разными математическими моделями сформулировано следующее предложение. Удобнее пользоваться моделью кондуктивного теплопереноса т.к. используется в качестве исходных данных кроме краевых и начального условия, только коэффициент температуропроводности. Известно, что чем больше содержатся параметры в математической модели, тем труднее реализовать из-за неизвестности или из-за значительной погрешности при определении их экспериментальным способом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы состоять в следующем:

1. Предложен аналитико-численный подход реализации математической модели теплопереноса в одномерной постановке.
2. Методика определения температуры грунта, коэффициентов температуропроводностей, теплообмена и глубины таяния с учетом фильтрации воды из водоема на основе аналитико-численного подхода.
3. Определении времени перехода в стационарный режим процесса таяния и предельной глубины таяния мерзлого грунта при заданной температуре воды в водоеме.
4. Установление о не влиянии начального условия на предельную глубину таяния на основе численного анализа при долгосрочном прогнозировании.
5. На основе анализа результатов двух разных математических моделей для одной задачи формируется предложение о выборе более простой математической модели.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Фельдман Г.М. Прогноз температурного режима грунтов и развития криогенных процессов. – Новосибирск: Наука, 1977. -191 с.
2. Соболев С. В. Водохранилища в области вечной мерзлоты. — Н. Новгород: ННГАСУ, 2007.
3. Соболев, С.В. Температурный режим гидротехнических сооружений в криолитозоне [Электронный ресурс]: учеб. пос. для студентов вузов /С.В. Соболев, И.С. Соболев; Нижегород. гос. архитектур.- строит. ун-т.– Нижний Новгород: ННГАСУ, 2017. – 402 с. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). ISBN 978-5-528-00181-4
4. Биянов Г. Ф., Когодовский О. А., Макаров В. И. Грунтовые плотины на вечной мерзлоте. —Якутск, 1989.
5. Анискин Н.А. Температурно-фильтрационный режим основания и плотины Курейской ГЭС во втором правобережном понижении. – М. Вестник МГСУ 2/2006. С.43-52.
6. Джаманбаев М.Дж., Чыныбаев М.К. Конвекция воды в теле плотины под влиянием градиента температуры// Известия КГТУ им. И.Раззакова, № 27, с.218-227. Бишкек-2012.
7. Джаманбаев М.Дж., Чыныбаев М.К. Температурный режим тела плотины и основание водохранилища//Известия КГТУ им. И.Раззакова, № 32, с.129-134. Бишкек-2014.
8. Джаманбаев М.Дж., Шекеев К. Исследование влияния климатических и техногенных факторов на температурный режим грунтов//Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. № 8. Москва, 2016, С. 7-11.
9. Назарова Л.А., Назаров Л.А., Джаманбаев М.Д., Чаныбаев М.К. Моделирование процесса тепломассопереноса в окрестности гидротехнических сооружений в криолитозоне. ГИАБ. 2015. № 9. С. 373-379.

10. Джаманбаев М.Дж., Чыныбаев М.К. Численное моделирование протаивания мерзлого грунта под основанием хвостохранилища. – Бишкек: Известия КГТУ им. И.Раззакова, №31, 2014. - С.329-331.
11. Востриков В.М., Зотеев А.В. (2015). Аналитические решения задачи Стефана со скрытой теплотой, зависящей от температуры. Международный журнал тепло- и массообмена, 81, 725-731.
12. Ваганова Н.И. и Роменский Е.И. (2001). Точное решение одномерной задачи Стефана с переменными тепловыми свойствами. Журнал инженерной математики, 40 (3), 313-328.
13. Хаттер, К., и Ван, Ю. (2006). Аналитические решения задачи Стефана о плавлении с естественной конвекцией. Международный журнал тепло- и массообмена, 49 (17-18), 3020-3030.
14. Галкин А. Ф., Курта И. В. Влияние температуры на глубину оттаивания мерзлых пород // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2020. – № 2. – С. 82–91.
15. Булдович С.Н. Экспресс-метод оценки и прогнозирования температурного режима многолетнемерзлых пород // Динамическая геокриология. – М: Изд-во МГУ, 2001. – С. 61-
16. Любославский Г.А. Влияние поверхностного покрова на температуру и обмен тепла в верхних слоях почвы. Труды отделений физики и математики. - Санкт-Петербург, 1909.
17. Павлов А.В. Теплообмен промерзающих и протаивающих грунтов с атмосферой. М.: Наука, 1965. - 253 с.
18. Смирнова Н.Н., Ананьян А.А. Некоторые данные по определению зависимости теплофизических свойств горных пород от степени влагонасыщенности. - В кн. Мерзлотные исследования. Вып. XI. М.: изд. АН СССР, 1950.
19. Лукьянов В.С., Головкин М.Д. Расчет глубины промерзания грунтов. М. Трансжелдориздат, 1957.

20. Чернядьев В.П., Чеховский А.Л., Стремяков А.Я., Пакулин В.А. Прогноз теплового состояния грунтов при освоении северных районов - М.: Наука, 1984. - 137 с.
- 21.Соболь С. В. Водохранилища в области вечной мерзлоты. — Н. Новгород: ННГАСУ, 2007.
- 22.Биянов Г. Ф., Когодовский О. А., Макаров В. И. Грунтовые плотины на вечной мерзлоте. — Якутск, 1989.
- 23.Ершов Э.Д. Общая геокриология, М.: изд-во МГУ, 2002. - 682 с.
- 24.Любославский Г.А. Влияние поверхностного покрова на температуру и обмен тепла в верхних слоях почвы. Труды отделений физики и математики. - Санкт-Петербург, 1909.
- 25.Павлов А.В. Теплообмен промерзающих и протаивающих грунтов с атмосферой./ М.: Наука, 1965. - 253 с.
26. Буйских А. А., Замощ М. Н. Прогноз термического режима хвостохранилища в условиях криолитозоны // ФТПРПИ. — 2010. — № 1.
- 27.Долгих Г.М., Окунев С.Н., Захарова В.Н., Марамыгина М.С., Долгих С.Н./ Прогнозные расчеты мерзлотной противодиффузионной завесы плотины Вилюйской ГЭС-3 с использованием коллекторных СОУ. Материалы международного симпозиума. – г. Мирный, Россия, 2011.-280с.
28. Попенко Ф.Е. Техническая мелиорация слабых грунтов криолитозоны при строительстве на сейсмоопасных территориях / Материалы международного симпозиума. – г. Мирный, Россия, 33-38
- 29.Анискин Н.А. Температурно-фильтрационный режим основания и плотины Курейской ГЭС во втором правобережном понижении. – М.: Вестник МГСУ.-2006.-№2. -С.43-52.
- 30.Вакулин А.А. Основы геокриологии: учебное пособие / А. А. Вакулин. -2-ое изд. – Тюмень: Тюменский государственный университет, 2011. -220 с.
- 31.Дифференциальное уравнение в частных производных [Электронный ресурс]: Википедия. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: <https://>

ru.wikipedia.org/wiki/Дифференциальное_уравнение_в_частных_производных

(дата обращения: 25.06.22)

32. Джамабаев М.Дж. Аналитическое решение задачи протаивания грунта под основанием водоема / Зарнаева А.Ж., Нурбекова Н.Н. – Бишкек: Известия КГТУ им. И.Раззакова. - 2022. - №61. - 6с.

33. Звонарев С.В. Основы математического моделирования: учебное пособие / С.В. Звонарев. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. — 112 с.

34. Краевая задача [Электронный ресурс]: Википедия. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Краевая_задача (дата обращения: 25.06.22)

35. Критериальные уравнения теплоотдачи [Электронный ресурс]: Инфопедия для углубления знаний. – Режим доступа: <https://infopedia.su/19xa940.html> (дата обращения: 25.06.22)

36. Метод конечных разностей [Электронный ресурс]: Википедия. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_конечных_разностей (дата обращения: 25.06.22)

37. Метод конечных элементов [Электронный ресурс]: Википедия. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_конечных_элементов (дата обращения: 25.06.22)

38. Метод Крамера [Электронный ресурс]: Википедия. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метода_Крамера (дата обращения: 25.06.22)

39. Метод разделения переменных [Электронный ресурс]: Википедия. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_разделения_переменных (дата обращения: 25.06.22)

40. Методические рекомендации по геокриологическому прогнозированию устойчивости дорожных сооружений при проектировании, строительстве и эксплуатации автомобильных дорог [Электронный ресурс]: Отраслевой дорожный методический документ – Режим доступа: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293727/4293727963.pdf> (дата обращения: 26.06.22)

- 41.Песчаник [Электронный ресурс]: Поиск слов.– Режим доступа: <https://xn--b1algemdcxb.xn--plai/crossword/2060482> (дата обращения: 26.06.22)
- 42.Пульпа [Электронный ресурс]: Словари. Энциклопедия. – Режим доступа: <http://www.endic.ru/metallurg/Pulpa-5402.html> (дата обращения: 26.06.22)
- 43.Температуропроводность [Электронный ресурс]: Википедия. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Температуропроводность> (дата обращения: 25.06.22)
- 44.Уравнения Пуассона и Лапласа [Электронный ресурс]: Stoodbooks.net – Режим доступа: https://studbooks.net/2138403/matematika_himiya_fizika/uravneniya_puassona_la_plasa (дата обращения: 26.06.22)
- 45.Фельдман Г.М. Прогноз температурного режима грунтов и развития криогенных процессов. – Новосибирск: Наука, 1977. -191 с.
- 46.Шарма Дж.Н. Уравнения в частных производных для инженеров / Дж. Н. Шарма, К. Сингх. – М.: Техносфера, 2002. -320 с.
- 47.Шекеев К.Р. Влияние влажности на температурный режим грунта // Наука, новые технологии и инновации. -2014. - №1 -С.11-13.
- 48.Шекеев К.Р. Численное моделирование протаивания мерзлого грунта под основанием хвостохранилища. –Бишкек: Известия КГТУ им. И.Раззакова. - 2014. -№31. - С.329-331.
- 49.Хвостохранилище [Электронный ресурс]: Техническая библиотека – Режим доступа: <https://neftegaz.ru/tech-library/ekologiya-pozharnaya-bezopasnost-tehnika-bezopasnosti/685685-khvostokhranilishche/> (дата обращения: 25.06.2022).
- 50.Джаманбаев М.Дж. Инфильтрация атмосферных осадков по наклонному склону /Душенова У.Дж ., Омуралиев С.Б // Известия КГТУ им. И. Раззакова №26, г. Бишкек, 2010. -С.205 -208. <https://elibrary.ru/item.asp?id=27165604>

51. Джаманбаев М.Дж. Определение глубины таяния мерзлого грунта под основанием пруда хвостохранилища/ Душенова У.Дж., Турсункулова З.С.// Известия КГТУ им. И. Раззакова №29, г. Бишкек, 2013. -С. 239-242. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29214773>
52. Джаманбаев М.Дж. Методика определения температуры, коэффициентов теплообмена грунта. / Душенова У.Дж., Турсункулова З.С.// Известия КГТУ им. И. Раззакова №29, г. Бишкек, 2013. -С.242-246. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29214774>
53. Джаманбаев М.Дж. Определение глубины таяния мерзлого грунта под основанием пруда водохранилища. / Душенова У.Дж., Турсункулова З.С.// Материалы научной конференции «Научные основы стратегии развития АПК и сельских территорий в условиях ВТО ВолгГау. г.Волгоград, 2014. -С. 328-331. <https://elibrary.ru/item.asp?id=25566503>
54. Джаманбаев М.Дж. Влияние уровня воды на величину фильтрационного расхода и на процесс таяния под основанием водоема/ Душенова У.Дж., Известия КГТУ им. И. Раззакова, № 31. г.Бишкек, 2015. -С. 198-201. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26455471>
55. Джаманбаев М.Дж. Определение дальности смещения оползневой массы/ Душенова У.Дж., Омуралиев С.Б.// Известия КГТУ им. И. Раззакова, №4(48) г.Бишкек, 2018. - С.173-179. <https://elibrary.ru/item.asp?id=37167828>
56. Душенова У.Дж. Оценка степени влияния природных факторов на промерзание грунта/ Джаманбаев М.Дж., Шекеев К.Р./ Известия КГТУ им.И.Раззакова №50, г. Бишкек, 2019.-С. 163-168. <https://elibrary.ru/item.asp?id=39537304>
57. Джаманбаев М.Дж. Определение периода (времени) не установившейся части процесса переноса тепла в мерзлых грунтах под влиянием заданной температуры. /Душенова У.Дж.// Журнал Научные исследования в Кыргызской Республике №1, г.Бишкек, 2023. -С.19-24 <https://elibrary.ru/item.asp?id=61182954>

57. Джаманбаев М.Дж.. Аналитико-численное решение задачи протаивания мерзлого грунта с учетом теплообмена и изменения начального условия./Душенова У.Дж, Кыштобаева Г.К.// Сборник статей “Перспективные задачи инженерной науки”. -г. Москва, 2023. - С. 52- 57

<https://elibrary.ru/item.asp?id=50742458>

Приложение 1. Программный код для однородных граничных условий
Определение количества слагаемых в ряду

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
double F(double t, double x, double L, int i)
{
    const double pi=3.14;
    double a=0.0368, b=-1.2391, c=2;
    double A=-10/L, B=8;
    double s=A*x+B;
    double ro=0.004283;
    for (int n=1; n<=i; n++)
    {
        //double Lamda=n*pi/L;

s+=(((4*a*pow(L,2)*(pow((-1),n)-1))/(pow(pi,3)*pow(n,3)))-(2/
(pi*n))*(a*pow(L,2)*
        pow((-1),n)+(b-A)*L*pow((-1),n)+(c-B)*(pow((-1),n)-1)))*exp(-
pow(((pi*n)/L),2)*ro*t)*sin(pi*n*x/L);
    }
    return s;
}
int main()
{
    setlocale(LC_ALL, "Russian");
    double L, t=1;
    cout<<"L=";
    cin>>L;
    double x=1.0;
    double R=0;
    double E=0.0003;
    int i=100;
    int M=0;
    double R1, R2;
    for(int n=2; n<=i; n++)
    {
        R1=F(t,x,L,n);
        if(abs(R-R1)<=E)
        {
            M=n;
            R2=F(t,x,L,M);

```

```

    cout<<" R2= "<<R2<<" m= "<<M;
break;
}
else
{
    R=R1;
}
}
system("pause");
return 0;
}

```

Нахождение методом деления отрезка пополам значение глубин в разные моменты времени

```

#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
double F(double t, double x, double L, int M)
{
    const double pi=3.14;
    double a=0.0369, b=-1.2391, c=2;
    double A=-10/L, B=8;

    double s=A*x+B;
    double ro=0.004283;
    for (int n=1; n<=M; n++)

        {
            //double Lamda=n*pi/L;
s+=
            (((4*a*pow(L,2)*(pow((-1),n)-1))/(pow(pi,3)*pow(n,3)))-(2/
(pi*n))*(a*pow(L,2)*pow((-1),n)+(b-A)*L*pow((-1),n)+(c-B)*(pow((-1),n)-
1)))*exp(-pow(((pi*n)/L),2)*ro*t)*sin((pi*n*x)/L);
        }
    return s;
}
int main()
{
    setlocale(LC_ALL, "Russian");
    double L, t, ro;
    cout<<"L=";
    cin>>L;
    double h=1;
    double xO=0;

```

```

double x=xO;
const double E=0.003;
int M=3;
int j;
for (j=0; j<=90; j++)
{
    t=168*j;
    snova:
        double fOld=F(t,xO,L,M);
        while (x<=L)
        {
            x+=h;
            double fNew=F(t,x,L,M);
            if(fNew*fOld<=0)
                break;
            fOld=fNew;
            xO=x;
        }
        delenie:
            double c=(xO+x)/2;
            double FRab=F(t,c,L,M);
            double fNew=F(t,x,L,M);
            if (abs(FRab)<=E)
            {
                x=c;
                goto finish;
            }
            else
            if(fNew<0)
            {
                if (FRab<0)
                {
                    x=c;
                    fNew=FRab;
                    goto delenie;
                }
                else
                xO=c;
                fOld=FRab;
                goto delenie;
            }
            else if (FRab<0)
            {

```

```

        xO=c;
        fOld=FRab;
        goto delenie;

    }
    else
    x=c;
    fNew=FRab;
    goto delenie;
finish:
    cout<<"i= "<<j<<" x1="<<x<<" t="<<t<<endl;
}
    system("pause");
    return 0;
}

```

Различные значения глубины в момент времени

```

#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
double F(double t, double x,double L,int M)
{
    const double pi=3.1415926;
    double a=0.036859737;
    double b=-1.2391325435;
    double c=2;
    double A=-10/L;
    double B=8;
    double s=A*x+B;
    //double s=0.;
    double ro=0.004283;
    int n;
    for (int n=1; n<=M; n++)
    {
        //double Lamda=n*pi/L;

s+=
        (((4*a*pow(L,2)*(pow((-1),n)-1))/(pow(pi,3)*pow(n,3)))-(2/
(pi*n))*(a*pow(L,2)*pow((-1),n)+(b-A)*L*pow((-1),n)+(c-B)*(pow((-1),n)-
1)))*exp(-pow(((pi*n)/L),2)*ro*t)*sin((pi*n*x)/L);
    }
    return s;
}
int main()

```

```

{
    setlocale(LC_ALL,"Russian");
    double L,t,y;
    cout<<"L=";
    cin>>L;
    const double pi=3.1415926;
    double x=0;
    double h=1;
    int j=0;
    double R;
    int M=3;
    R=sin((3*pi*L)/L);
    cout<<"y30= "<<R<<endl;
    R=0.;
    //for(int i=0; i<=90; i++)
    t=0;
    while(x<=L)
    { cout<<" x="<<x<< endl;
      j=j+1;
      y= sin((j*pi*x)/L);
      R = F(t,x,L,M);
      x=x+h;
      cout<<"y= "<<y<<endl;
      cout<<"R= "<<R<<endl;
    }
    system("pause");
    return 0;
}

```

Приложение 2. Программный код для математической модели с неоднородными
граничными условиями
Нахождение значения лямбд

```
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

double f(double x)
{
    return tan(30*x)+(x/(0.35));
}

int main()
{
    double a,b,c,eps = 0.003;
    a=-1.15;
    for (double i=1; i<=10; i++ )
    {
        b=(3.14/30)*(i);
        cout<<"a="<<a<<" b="<<b<<endl ;
        if (f(a)*f(b)<0)
        {
            do
            {
                c=(a+b)/2;
                if(f(c)*f(a)<0)
                    b=c;
                else
                    a=c;
            }
            while((fabs(a-b)>=eps)&&(fabs(c)<=eps));
            cout<<"Корень= "<<c<<endl;
            cout<<endl;
        }
        else
            cout<<"На данном отрезке нет корня т.к. f(a) и f(b) рав-
            ны"<< f(a) <<" и "<<f(b)<<endl;
    }
}
```

```

    return 0;
}

```

Нахождение значений температур в разном момент времени в соответствующих глубинах

```

#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

double f(int j, int x, double L, double t)
{
    double h=0.52,eps = 0.003, ro=0.004283;
    double lyam,U,B=0, f1, f2 , f3;
    double a=0.036859737;
    double b=-1.2391325435;
    double c=2;
    double Tg=-2;
    double Tv=8;
    double an,bn;
    U=((x/L)*((Tv+(L*h*Tg))/((L*h)+1)))+(Tv*(1-(x/L)));
    double E=(((L*h+1)*L*b)-(Tv+(L*h*Tg))+((L*h+1)*Tv))/
    ((L*h+1)*L);

    an=-1.15;
    for (int i=1; i<=j; i++ )
    {
        //an=(3.14/30)*(i);
        bn=(3.14/30)*(i);
        f1=tan(30*an)+an/h;
        f2=tan(30*bn)+bn/h;

        if ((f1*f2)<0)
        {
            do
            {
                lyam=(an+bn)/2;
                f3=tan(30*lyam)+lyam/h;

                if ((f1*f3)<0)
                    bn=lyam;
                else
                    an=lyam;
            }
            while((fabs(an-bn)<=eps)&&(fabs(f3)<=eps));

```

```

    {
double H=(c-(Tv/L))/lyam;

B=B+(((2/L)*((2*a*(cos(lyam*L)-1)/pow(lyam,3))+
((sin(lyam*L)/pow(lyam,2))*((2*L*a)+E))-((cos(lyam*L)/
lyam)*((a*pow(L,2))+(L*E)+H))-H))*(exp(-
pow(lyam,2)*t*ro))*sin(lyam*x));

    }
    }
    }
return B+U;
}

int main()

{ setlocale(LC_ALL,"Russian");
  double t;
  cout<<"t="; cin>>t;
  double L=30;
  int x;
  double R=0.;
  int j=25;

for(x=0 ; x<=L; x++)
{ //cout<<" x="<<x<< endl;
  R = f(j,x,L,t);
  cout<<" "<<R<<endl;

}
system("pause");
return 0;
}

```