

КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. И.РАЗЗАКОВА

На правах рукописи

УДК:536.5.081+624.139.34(043.3)



ДУШЕНОВА УМУТ ДЖУМАКАЗЫЛОНА

АНАЛИТИКО – ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Специальность:01.02.05–Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

член-корреспондент НАН КР

доктор физико-математических наук,

профессор Джаманбаев М.Дж.

Бишкек – 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава1. Обзор литературы	9
1.1. Обзор исследований температурных режимов в зоне вечной мерзлоты	9
1.2 Основные понятия, термины и объяснения. Классификация грунтов	19
1.3 Основные факторы влияющие на температурный режим в условиях вечной мерзлоты	26
1.4 Промерзание грунта как основной фактор при разработке месторождений в зоне вечной мерзлоты	29
1.5 Физическая подстановка задачи	31
Глава2. Методология и методы исследования	35
2.1 Математические модели описывающие процесс таяния мерзлого грунта.	35
2.2 Математическая модель описывающая процесс таяния с учетом фазового перехода	35
2.3 Математическая модель, описывающая процесс таяния с учетом теплообмена	36
2.4 Математическая модель теплопереноса с учетом теплообмена, описывающая уравнением теплопроводности	39
2.5 Математическая модель теплопереноса с учетом фильтрации	40
2.6 Численные методы	41
2.7 Аналитические методы	42
Глава 3. Аналитико-численный метод решения задач переноса тепла, основанный на идее метода конечных элементов(МКЭ)	45
3.1 Алгоритм определения коэффициентов температуропроводностей и значения температуры грунта аналитико-численным методом	45
3.2 Определение коэффициентов температуропроводностей, теплообмена между элементами и значения температуры в разные моменты времени	50
3.3 Определение коэффициента температуропроводностей и движение фронта таяния мерзлого грунта под основанием пруда, как решение начально-краевой задачи теплопереноса	52

3.4	Определение глубины таяния мерзлого грунта под влиянием температуры окружающей среды за теплый период года	54
3.5	Процесс таяния мерзлого грунта под основанием водоема глубиной H под влиянием фильтрации и температуры воды	56
Глава 4. Анализ и оценка аналитических решений математической модели теплопереноса		
60		
4.1	Математическая модель конвективного теплопереноса в мерзлых грунтах и аналитические решения	60
4.2	Процесс таяния мерзлого грунта рассматривается как задача переноса тепла в одной области под влиянием изменения вида граничного и начального условия	61
4.3	Влияние изменения вида граничного условия на процесс таяния мерзлого грунта	65
4.4	Математическая модель процесса таяния мерзлого грунта под основанием водоема с учетом теплообмена	67
4.5	Численный эксперимент на основе аналитического решения математической модели для выявления влияния начального условия на глубину таяния мерзлого грунта	70
4.6	Применение двух различных математических моделей для решения задачи таяния мерзлого грунта, сравнение результатов	73
Заключение		77
Практические рекомендации		78
Список использованной литературы		79
Приложения		94
Акт внедрения		105

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Исследование температурного режима гидротехнических сооружений, расположенных в зоне вечной мерзлоты, имеет важное значение для обеспечения их устойчивости и экологической безопасности. В условиях потепления и антропогенного воздействия процессы деградации мерзлых грунтов становятся всё более актуальными, особенно в высокогорных районах, где расположены многие промышленные объекты, включая гидротехнические сооружения.

Одной из серьёзных проблем является таяние мерзлого грунта под основаниями таких объектов, что может приводить к нежелательным последствиям. Например, при эксплуатации хвостохранилищ золоторудных комбинатов нарушение температурного режима приводит к оттаиванию основания, что создаёт условия для фильтрации токсичных веществ, в частности цианистых соединений, в окружающую среду. Это может стать причиной загрязнения подземных, грунтовых и поверхностных вод, нанося серьёзный экологический ущерб и угрожая здоровью населения.

Кроме того, нарушение теплового баланса мерзлого грунта под фундаментами гидротехнических сооружений приводит к его просадке, что вызывает деформации, потерю устойчивости конструкций и, в конечном итоге, их разрушение. Такие процессы могут повлечь за собой не только значительные экономические потери, связанные с восстановлением или полной заменой сооружений, но и представлять угрозу для жизни и здоровья людей.

Таким образом, исследование температурного режима гидротехнических сооружений в условиях вечной мерзлоты является актуальной задачей, направленной на предотвращение негативных последствий, повышение надёжности конструкций и минимизацию экологических рисков. Разработка методов расчёта и контроля тепловых процессов в мерзлых грунтах позволит повысить безопасность эксплуатации

подобных объектов и сократить возможные экономические и экологические издержки.

Целью диссертационной работы является создание эффективного метода к построению аналитического решения задач теплопереноса и на основе численного анализа решений, формировать выводы, предложения, рекомендации специалистам, инженерам и соответствующим организациям.

В соответствии с поставленной целью сформулированы следующие основные задачи исследования:

- Под влиянием температуры воды в пруде хвостохранилища, расположенная в условиях вечной мерзлоты, начинается таяния основания пруда. Требуется определить движение фронта таяния мерзлого грунта и коэффициент температуропроводностей, как решение начально-краевой задачи тепло переноса.

- Определить глубину таяния основание водоема хвостохранилища, расположенная в условиях вечной мерзлоты под влиянием фильтрации воды из водоема глубиной H и температуры воды.

-Определить глубину таяния мерзлого грунта дневной поверхности, расположенные в условиях вечной мерзлоты под влиянием температуры окружающей среды за теплый период года с идентификацией коэффициента температуропроводности.

- Построение аналитического решения математической модели таяния мерзлого грунта и установить время перехода в стационарный режим и глубину таяния за это время.

- Изучение влияния начального условия на глубину таяния мерзлого грунта.

- Анализ аналитических решений математических моделей таяния мерзлого грунта

Научная новизна работы заключается в следующем:

-разработан численно аналитический подход к решению задач теплопереноса, основанный на идее МКЭ;

-предложена методика определение глубины таяния и идентификации коэффициента температуропроводности, как решение математической модели теплопереноса с использованием данных наблюдений температуры грунта;

- построение аналитического решение математической модели таяние мерзлого грунта под основанием хвостохранилища и определение времени перехода к стационарному режиму и глубину таяние за это время;

- вывод о не влиянии начального условия на глубину таяние при долгосрочном прогнозе на основе численного эксперимента;

- анализ аналитических решений разных математических моделей процесса таяние мерзлого грунта и рекомендация выбора математической модели;

Теоретическая и практическая ценность. Предложенный подход и алгоритм могут служить основой для решения прикладных задач температурного режима сооружений, расположенные в зоне вечной мерзлоты с учетом различных климатических факторов, которая является основой при проектировании, строительстве и эксплуатации сооружений и зданий в зоне вечной мерзлоты.

Личный вклад соискателя заключается в использовании предложенной методики в решении различных задач теплопереноса, проведении исследований, анализе полученных данных, формулировке выводов и публикации статей; в установлении времени перехода в стационарный режим; на основе анализа аналитических решений различных математических моделей и численных результатов в формировании рекомендации о выборе более простой математической модели.

Апробация результатов исследования. Полученные в ходе выполнения данной диссертационной работы результаты докладывались на следующих международных, республиканских конференциях и семинарах:

- Научно-практические конференции Кыргызского Государственного технического университета им. И. Раззакова, Бишкек, 2010, 2012, 2016, 2019, 2020 гг.;

- Международная научно-техническая конференция молодых ученых «Иновация-вектор для молодежи» Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова (КГТУ), г.Бишкек, 2014 г.,
- Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы механики сплошных сред» Института геомеханики и освоения недр НАН КР, г.Бишкек, 2012, 2024 гг.
- Международная научно-практическая конференция «Научные основы стратегии развития АПК», Волгоград 2014г.,
- Международная научно-практическая конференции КГТУ, посвященной 65-летию университета, г.Бишкек, 2019 г.
- Научные исследования в Кыргызской Республике (Международный научный форум “Мировая наука и современные вызовы в эпоху глобализации и цифровой трансформации”) г.Бишкек, 2023г;
- VII Всемирный конгресс математиков тюркского мира. г.Туркистан, 2023г;
- Международная - научная конференция «V Борубаевские чтения» г.Бишкек 2024г;
- XIV Международный научный форум «Перспективные задачи инженерной науки» Москва 2023г.
- на расширенном заседании научно-технического семинара кафедры 2024г.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях:

Основные результаты исследований опубликованы в 12 научных статьях, в том числе в научных журналах за пределами Кыргызской Республики, которые входят в базы данных Scopus (1), РИНЦ (10).

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 106 страницах машинописного текста, состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы, приложений.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов, содержит 106 страниц машинописного текста, в том числе 22 рисунка, 3 таблицы и 128 наименований списка использованной литературы.

Автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность научному руководителю д.ф-м.н., профессору, член-корр. НАН КР. Джаманбаеву М.Дж. за консультации и ценные советы при работе над диссертацией и обсуждении результатов исследований.

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

(МКЭ) метод конечных элементов

(НУ) – начальные условия дополнение к основному дифференциальному уравнению

(ГУ)- граничные условия дополнение к основному дифференциальному уравнению

НС -нестационарное состояние

СТ - стационарное состояние

λ – коэффициент теплопроводности (измеряется в Ваттах на метр-кельвин (Вт/(м·К))

w - количество льда в грунте

q_0 -теплота плавления льда

a – коэффициент температуропроводности

γ - удельный вес грунта

h - глубина таяния

v – скорость фильтрации воды из водоема.

T_v - температура воды в водоеме

T_0 -температура таяния мерзлого грунта

T_1 - температура вечной мерзлоты.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1 Обзор исследований температурных режимов в зоне вечной мерзлоты.

В связи с активным развитием золотодобычи и освоением других месторождений полезных ископаемых в высокогорных районах Кыргызстана, возрастает необходимость в проведении как фундаментальных, так и прикладных научных исследований, ориентированных на конкретные объекты. Особенности географического положения, сложные геолого-гидрогеологические условия, а также ограниченная изученность этих территорий требуют применения адаптированных и междисциплинарных подходов.

В то же время, в странах с развитой горнодобывающей промышленностью и современными технологиями (например, Канада, Австралия, Чили, Россия) задачи подобного характера уже активно изучаются и решаются с использованием высокоточных методов геомониторинга, цифрового моделирования, а также экологического прогнозирования. Кыргызстан, обладая значительным потенциалом в сфере минеральных ресурсов, нуждается в активизации научных разработок, создании локальных баз данных и применении передовых международных практик с учётом национальной специфики.

Вопросы гидротехнического строительства на северных территориях, охватывающие нужды гидроэнергетики, водоснабжения, а также обустройство хвостохранилищ, нашли отражение в трудах таких выдающихся специалистов, как Биянова Г.Ф. [1], Бучко Н.А. [3], Кроник Я.А. [4,5], Кузнецова Г.И.[5,6], Купермана В.Л.[6,7], Максимова И.А.[7,8], Мызникова Ю.Н. [8,9], Оловина Б.А. [10], Павчича М.П.[11], Распопина Г.А.[12], Смирнова Е.А. [13], Трупака Н.Г.[14] и Чжана Р.В. [15],Фельдмана Г.М. [16,17], Томирдиаро С.В. [18].

Значительное внимание вопросам расчёта температурного режима гидротехнических сооружений уделили Анискин Н.А. [19,20], Биянов Г.Ф. [2],

Горохов Е.Н.[21,22], Горохов М.Е.[23], Кочубиевская Р.Л. [24], Соболев С.В. [25], Клейн И.С.[26,27], , Битюрин А.К.[28,29], Оловин Б.А.[30,31], Цвик А.М. [32], Максимов И.А. [33], Цыбина А.М. [34,35,36] и Шугаева Р.Т. [37,38].

Исследования, посвящённые фильтрационным и тепловым процессам, а также вопросам проектирования гидротехнических сооружений в условиях горной местности, активно проводились в Кыргызской Республике. Существенный вклад внесли учёные Джаныбеков Ч.Дж. [39], Исманбаев А.И. [40], Джаманбаев М.Дж. [41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52], Бийбосунов Б.И. [53], Чукин Б.А., Чукин Р.Б. [54] и другие исследователи.

Особо стоит отметить крупномасштабную научную работу, выполненную в рамках международного проекта по изучению температурных режимов гидротехнических сооружений, расположенных в зоне вечной мерзлоты. Исследования проводились в сотрудничестве между Институтом горного дела СО РАН учёными Назарова Л.А. и Назаров Л.А. и кыргызскими исследователями Джаманбаевым М.Дж. и Чыныбаевым М.К. [55,56,57,58,59]. Совместные усилия были направлены на моделирование процессов теплопереноса в окрестностях гидротехнических объектов, функционирующих в условиях криолитозоны.

На основании многолетних исследований установлено, что в процессе строительства и последующей эксплуатации гидроузлов происходит формирование специфического теплового состояния грунтов в системе "плотина–основание". Это состояние оказывает существенное влияние на устойчивость и надёжность гидротехнических сооружений. Выбор конструктивного типа плотины, характера сопряжения её с основанием, береговыми склонами и элементами водосбросных систем во многом зависит от природно-климатических условий конкретной площадки и тепловых характеристик грунтов.

Особенно актуальным данный вопрос становится в зонах распространения многолетнемерзлых пород (вечной мерзлоты), где взаимодействие

инженерных конструкций с мерзлотным основанием требует особого подхода к проектированию и расчётам.

Исследованием поведения гидротехнических сооружений в криолитозоне занимались такие специалисты, как Анискин Н.А.[19,20] и Биянов Г.Ф [1,2]. Их работы внесли значительный вклад в развитие теории теплотехнических процессов в гидротехническом строительстве, а также в разработку методов расчёта температурных полей, деформаций и устойчивости сооружений в условиях вечной мерзлоты.

Дополнительный вклад в эту область также внесли Горохов Е.Н. [21,22], Горохов М.Е. [23], Кочубиевская Р.Л.[24] и другие исследователи, чьи исследования способствовали совершенствованию проектных решений и нормативных документов, обеспечивающих безопасную и эффективную эксплуатацию гидроузлов в сложных геокриологических условиях.

Учёными разработаны комплексные математические модели, позволяющие учитывать важнейшие физические процессы — такие как тепломассоперенос, теплопроводность, фазовые переходы, а также конвективный перенос воздуха — при расчёте температурного режима основания и тела грунтовых плотин. Эти модели играют ключевую роль в анализе термодинамического состояния гидротехнических сооружений, особенно в условиях криолитозоны.

Для численного решения уравнений, описывающих эти процессы, широко применяются современные вычислительные методы — в частности, метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных разностей (МКР). Применение этих подходов обеспечивает высокую точность моделирования и позволяет учитывать сложные геометрические и термические условия вблизи плотин, их сопряжений с основанием и береговыми склонами.

Актуальность таких исследований возрастает в условиях изменения климата и нестабильности мерзлотных грунтов, что требует совершенствования прогнозных моделей и инженерных решений для обеспечения надёжной и безопасной эксплуатации гидротехнических сооружений.

Помимо отдельных программных решений, разработанных различными исследователями для решения узкоспециализированных задач с учётом сложных температурных и фильтрационных процессов, были созданы полноценные программные комплексы, ориентированные на решение широкого спектра типовых инженерных задач в области гидротехнического строительства. В основе большинства таких комплексов лежит метод конечных элементов (МКЭ), зарекомендовавший себя как один из наиболее универсальных и точных методов численного моделирования.

Использование данных программных систем позволяет с высокой степенью детализации учитывать сложные взаимодействия между температурными и фильтрационными процессами в различных элементах гидротехнических сооружений — теле плотины, основании, береговых сопряжениях и зонах водосбросов. Это особенно важно при проектировании и анализе устойчивости сооружений, возводимых в условиях многолетнемёрзлых пород. Современные программные комплексы обладают возможностями трёхмерного моделирования, проведения многофакторного анализа, а также визуализации температурных и напряжённых состояний конструкции во времени. Примеры таких систем включают как коммерческие, так и научно-исследовательские платформы, активно применяемые в ведущих проектных институтах и университетах.

Благодаря высокой точности и гибкости, данные системы активно используются в практике проектирования, в том числе в условиях вечной мерзлоты и сложной геологической структуры.

Примерами таких программных комплексов являются:

- **ANSYS** — универсальная платформа для моделирования физических процессов, включая теплопередачу, фильтрацию и механическое поведение материалов;
- **Midas GTS NX / Midas Civil / Midas CFX** — эффективные инструменты для геотехнического и гидротехнического моделирования, особенно в сложных природных условиях;

- **PLAXIS** — программное обеспечение, широко используемое для анализа деформаций, устойчивости и теплопереноса в грунтах;
- **COMSOL Multiphysics** — мультифизическая платформа, позволяющая моделировать сопряжённые тепловые, гидравлические и механические процессы;
- **GeoStudio (SEEP/W, TEMP/W)** — специализированные модули для анализа фильтрации и тепловых режимов в инженерных сооружениях;
- **ABAQUS** — мощный МКЭ-комплекс для решения задач в области механики и теплопередачи с возможностью моделирования многослойных и неоднородных сред.

Использование этих программных продуктов позволяет учитывать реальные условия эксплуатации объектов, адаптировать инженерные решения под конкретные климатические и геологические условия и значительно повышать надёжность проектируемых систем.

Процессы промерзания и протаивания грунтов, особенно в условиях многолетней мерзлоты, традиционно рассматриваются как классические задачи фазового перехода типа задачи Стефана. Эти задачи описывают тепловое поведение среды с учётом изменения агрегатного состояния — например, перехода воды в лёд и наоборот, что сопровождается выделением или поглощением скрытой теплоты плавления.

В математической постановке задача Стефана представляет собой краевую задачу с подвижной границей фазового перехода, положение которой зависит от теплового баланса в окружающей среде. Такой подход позволяет анализировать движение фронта промерзания/протаивания в грунтовой толще с учётом теплопроводности, начальных температурных условий и теплофизических характеристик материалов.

Методы численного решения задач Стефана подразделяются на две основные группы:

1. Методы с явным выделением фронта фазового перехода
Эти методы предполагают прямое отслеживание положения границы

между фазами в ходе расчётов. Примеры таких подходов разработаны в работах Дарьина А.А.[60] и Кочубиевская Р.Л.[24] Они позволяют точно определять движение фронта, но требуют сложной адаптации сетки и дополнительных условий на подвижной границе.

2. Методы сквозного счёта (фиктивной теплоёмкости)
В этих методах фазовый переход моделируется как область с резко изменяющейся теплоёмкостью. Подвижная граница не выделяется явно, что упрощает реализацию численного алгоритма. Основы этого подхода заложены в работах Самарского А.А. [61], Вабищевича П.Н.[61] и др. Такие методы широко применяются благодаря своей универсальности и устойчивости в условиях сложной геометрии.

Оба подхода нашли широкое применение в инженерных расчётах и моделировании температурного режима в гидротехнических сооружениях, особенно при строительстве на вечномерзлых грунтах, где процессы промерзания и оттаивания напрямую влияют на прочностные и фильтрационные характеристики основания.

Современные численные реализации задач Стефана интегрированы в программные комплексы, такие как ANSYS, COMSOL, PLAXIS, а также в специализированные исследовательские пакеты, адаптированные для задач мерзлотоведения и геотехники.

Для решения задач с подвижными границами фазового перехода, таких как задачи Стефана, в дополнение к классическим методам сквозного счёта (например, методу эффективной теплоёмкости), были разработаны современные численные методы, обладающие высокой универсальностью и точностью при моделировании сложных геометрий и неоднородных материалов.

Среди них особое место занимают:

Метод фазового поля (Phase-Field Method)

Метод фазового поля основывается на введении дополнительной переменной — фазового параметра, который непрерывно изменяется от одного фазового

состояния к другому (например, от "твёрдого" к "жидкому"). Вместо явного отслеживания положения границы, процесс фазового перехода моделируется как плавный переход в узкой переходной зоне.

Метод широко используется в задачах, где важно учитывать сложные формы и движения границ, включая неоднородные и анизотропные материалы, что делает его применимым в задачах геотермального и мерзлотного моделирования.

Метод линий уровня (Level Set Method)

В данном подходе граница между фазами описывается как нулевой уровень специальной функции, определённой во всём расчётном домене. Метод линий уровня эффективно применяется для моделирования движения, слияния, расщепления и других сложных изменений геометрии фазовой границы.

Метод особенно полезен при трёхмерном моделировании и позволяет учитывать сложные физические взаимодействия между фазами, включая фильтрационные потоки, деформации среды и тепломассоперенос.

В рамках изучения термического режима криолитозоны учёными были разработаны различные упрощённые модели, которые получили широкое применение благодаря своей доступности и низким вычислительным затратам. Такие модели позволяют проводить предварительную оценку температурного состояния грунтов и прогнозировать динамику мерзлотных процессов в условиях ограниченной информации.

Наиболее простыми по структуре являются эмпирико-статистические модели, основанные на анализе наблюдаемых данных (температуры, глубины сезонного протаивания, климатических факторов и т.д.) и установлении корреляционных зависимостей между ними. Эти модели не требуют решения дифференциальных уравнений теплопереноса, что делает их удобными для использования в инженерной практике на ранних стадиях проектирования.

Классификация упрощённых моделей: Эмпирико-статистические модели основаны на регрессионных зависимостях и использовании климатических параметров (сумм температур, средней годовой температуры воздуха,

влажности и др.) для оценки глубины сезонного протаивания и устойчивости мерзлоты.

1. Квазистатические модели: учитывают установившийся температурный режим в многолетней перспективе, без моделирования переходных процессов. Используются для оценки температурных полей при длительной эксплуатации сооружений.
2. Одномерные модели теплопроводности: предполагают вертикальное распределение температуры и могут учитывать фазовые переходы. Часто применяются в задачах, связанных с анализом изолированных слоёв грунта.
3. Полуаналитические модели: комбинируют аналитические решения уравнений теплопроводности с упрощённым описанием граничных и начальных условий. Подходят для оценки влияния климатических трендов на температуру мерзлоты.

Хотя такие модели не заменяют полноценного численного моделирования, они являются важным инструментом предварительной оценки рисков, прогнозирования поведения грунтов и оптимизации проектных решений в сложных климатических условиях.

Другие исследователи для решения сложных стационарных моделей используют приближенные решения задачи Стефана. Для этого они используют изменения годовых колебаний температуры в разных покровах и на глубине сезонного оттаивания. Такие подходы позволяют упростить расчет фазовых переходов и теплового баланса, особенно в условиях вечной мерзлоты или многолетнемерзлых пород. В рамках этих моделей температурные колебания рассматриваются как гармонические функции, что позволяет аналитически описывать глубину проникновения тепловых волн и оценивать положение фронта фазового перехода. Это, в свою очередь, облегчает моделирование термического режима грунтов при различных климатических сценариях и антропогенных воздействиях[16,17,18,29,60].

Процесс распространения тепла на отрезке описывается уравнением теплопроводности (уравнением Фурье). Анализ и разработке методов решения краевых задач уравнения теплопроводности посвящены классические работы таких ученых, как Самарский А. А. [61,62,63], Тихонов А. Н. [51], Никольский С. М. [119], Ладыженская В. А. [122] и других. Их труды заложили основы как аналитических, так и численных методов решения уравнений математической физики.

Самарский А. А. [61,62,63], внёс значительный вклад в развитие численных методов, в том числе конечно-разностных схем и устойчивости вычислительных алгоритмов. Тихонов А. Н. [51], в свою очередь, широко занимался вопросами регуляризации некорректных задач, а также разработкой методов приближённого анализа дифференциальных уравнений, в том числе применительно к задачам теплопроводности.

Работы этих и других исследователей до сих пор служат основой для решения прикладных задач теплопереноса, включая процессы в многослойных средах, моделирование фазовых переходов и анализ тепловых полей в инженерной и геофизической практике.

В настоящее время для решения краевых задач уравнения теплопроводности используются как аналитические, так и численные методы.

Аналитические методы

Аналитические методы предполагают получение точного (или приближённого в аналитической форме) выражения для температуры $T(x,t)$. Они эффективны при наличии простых геометрий, линейных уравнений и однородных граничных условий. Основные подходы включают:

- **Метод разделения переменных** — применяется для линейных уравнений в простых геометриях; приводит к решению в виде ряда по собственным функциям.
- **Метод Фурье** — основан на разложении температурного поля в ряд Фурье; удобен для периодических или ограниченных по длине задач.

- **Интегральные преобразования** — используются преобразования Фурье и Лапласа для перехода от дифференциальных уравнений к алгебраическим.
- **Метод изображений** — применяется для учета граничных условий, особенно при решении задач с неограниченной или полуограниченной областью.
- **Функции Грина** — позволяют выразить решение через интеграл по области с учетом начальных и граничных условий.

Однако аналитические методы ограничены сложностью геометрии, нелинейностями и неоднородностями среды, поэтому в реальных инженерных и геофизических задачах чаще применяются численные методы.

Численные методы

Численные методы позволяют находить приближённое решение уравнения теплопроводности в случае сложной геометрии, неоднородных материалов, нелинейностей и сложных граничных условий. Наиболее распространённые численные методы:

- **Конечно-разностный метод (КРМ)** — область разбивается на сетку, и производные заменяются разностными приближениями. Метод широко используется благодаря простоте реализации, особенно для прямоугольных областей.
- **Конечно-элементный метод (КЭМ)** — применяется для сложных геометрий и неоднородных материалов. Позволяет более точно описывать границы и внутреннюю структуру объекта.
- **Метод конечных объёмов** — популярен в вычислительной гидродинамике и теплопереносе. Основан на интегральной форме уравнения теплопроводности.
- **Метод граничных элементов** — сводит решение задачи к расчету только на границе области, что уменьшает размерность задачи, но требует знания фундаментальных решений.

- **Явные и неявные схемы** — в рамках КРМ различают явные (прямолинейные, но ограниченные по устойчивости) и неявные (устойчивые, но требующие решения систем уравнений) схемы.
- **Методы с адаптивной сеткой** — позволяют изменять шаг сетки в зависимости от характеристик решения (например, вблизи фронта фазового перехода).

1.2 Основные понятия, термины и объяснения. Классификация грунтов.

Дифференциальное уравнение в частных производных (частные случаи также известны как уравнения математической физики, УМФ) — дифференциальное уравнение, содержащее неизвестные функции нескольких переменных и их частные производные.[16]

Краевая задача (граничная задача) — задача о нахождении решения заданного дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений), удовлетворяющего краевым (граничным) условиям в концах интервала или на границе области. Краевые задачи для гиперболических и параболических уравнений часто называют начально-краевыми или смешанными, потому что в них задаются не только граничные, но и начальные условия.[17]

Математической моделью называется совокупность уравнений или других математических соотношений, отражающих основные свойства изучаемого объекта или явления в рамках принятой умозрительной физической модели и особенности его взаимодействия с окружающей средой на пространственно-временных границах области его локализации. Математические модели различных процессов в континуальных системах строятся, как правило, на языке дифференциальных. Обобщенная математическая модель уравнений, позволяющих наиболее точно описать состояние процесса в любой точке пространства в произвольный момент времени. Основными свойствами математических моделей являются адекватность и простота, указывающие на степень соответствия модели изучаемому объекту и возможности ее

реализации. Процесс формулировки математической модели называется постановкой задачи [1, 2]

Метод конечных разностей — численный метод решения дифференциальных уравнений, основанный на замене производных разностными схемами. Является сеточным методом. Для простых задач построение разностной схемы выполняется быстрее, чем метод конечных разностей (МКР). [64]

Метод конечных элементов (МКЭ) — это численный метод решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также интегральных уравнений, возникающих при решении задач прикладной физики. Метод широко используется для решения задач механики деформируемого твёрдого тела, теплообмена, гидродинамики, электродинамики и топологической оптимизации. [69]

Метод Крамера (правило Крамера) — способ решения систем линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных с ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы (причем для таких уравнений решение существует и единственно). [68]

Метод разделения переменных — метод решения дифференциальных уравнений, основанный на алгебраическом преобразовании исходного уравнения к равенству двух выражений, зависящих от разных переменных величин, причем одни из них являются функциями других. В применении к уравнениям в частных производных схема разделения переменных приводит к нахождению решения в виде ряда или интеграла Фурье. В этом случае метод также называют методом Фурье (в честь Жана Батиста Фурье, построившего решения уравнения теплопроводности в виде тригонометрических рядов) и методом стоячих волн. [63,64]

Многолетнемерзлые грунты («вечная мерзлота», криолитозона) — районы распространения грунтовых толщ, имеющих отрицательную температуру в течение трехлетнего периода и более, вечная мерзлота - не менее ста лет.

Вечную мерзлоту по температуре на границе нулевых годовых амплитуд подразделяют на высокотемпературную (до минус 2°C, преимущественно минус 0,5 + 1,5°C и выше) и низкотемпературную (ниже минус 2°C, преимущественно минус 3 5°C и ниже). По условиям распространения различают сплошную, прерывистую и островную вечную мерзлоту (криолитозону). Мощность вечной мерзлоты составляет от нескольких метров в умеренных широтах (южная подзона), до 1,5 км в высоких.

Вечная мерзлота (многолетняя криолитозона, многолетняя мерзлота) — часть криолитозоны, характеризующаяся отсутствием периодического протаивания. Общая площадь - 35 млн км².

В северном полушарии регионы с многолетней мерзлотой составляют около 25% (23 млн. км²) поверхности. Толщина многолетней мерзлоты колеблется от менее 1 м до даже более 1500 м. [12]

Начальные (НУ) и граничные условия (ГУ) — дополнение к основному дифференциальному уравнению (обыкновенному или в частных производных), задающее его поведение в начальный момент времени или на границе рассматриваемой области соответственно [64]

Нестационарное состояние — состояние квантовой системы, при котором её энергия и другие динамические величины, характеризующие квантовое состояние, изменяются со временем

Параболические уравнения — класс дифференциальных уравнений в частных производных. Один из видов уравнений, описывающих нестационарные процессы.

Песчаник — обломочная осадочная горная порода, представляющая собой однородный или слоистый агрегат обломочных зёрен размером от 0,05 мм (по российским критериям) или от 0,0625 мм (по зарубежным критериям) до 2 мм (песчинок), связанных каким-либо минеральным веществом (цементом).

Песчаники образуются в результате разрушения горных пород, переноса обломков водой или ветром и отложения с последующей цементацией. Степень окатанности обломков и степень отсортированности по величине

зёрен указывают на протяжённость переноса обломков от места первоначального образования. В подавляющем большинстве разновидностей песчаников преобладает кварц, как наиболее устойчивый физически и химически минерал.[13]

Пульпа — суспензия — смесь тонкоизмельченных (<1 мм) полезных ископаемых с водой. Пульпа образованная при измельчении руд перед обогащением, при гидродобыче, гидротранспорте и т.п. Вязкость пульпы возрастает, а скорость оседания твердых частиц уменьшается с повышением плотности (отношение масс твердых и жидких фаз) и увеличением количества тонких классов частиц (микроразмеров). Концентрация пульпы (отношение масс твёрдой и жидкой фаз) измеряется в процентах твёрдого или в соотношении твёрдой фазы к жидкой (Т:Ж). Пульпа используется при обогащении полезных ископаемых, в гидромеханизации, при гидравлическом транспортировании, при тушении пожаров.[46]

Трубопроводы, по которым транспортируется пульпа при её промышленном транспортировании, называются пульпопроводами.

Стационарное состояние (точка покоя, особая точка, состояние равновесия)

В стационарном состоянии значения переменных в системе не меняются со временем. На языке дифференциальных уравнений это означает:

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Если левая часть уравнения равна нулю, значит равна нулю и его правая часть:

$$f(x) = 0$$

Сугли́нок — рыхлая осадочная порода с преимущественным содержанием частиц размера пыли и песка, и значительным количеством глинистых частиц. В состав суглинка входит: глина — около 60 % и кварцевый песок различной фракции – 40 %.

Температуропроводность (коэффициент температуропроводности) — физическая величина, характеризующая скорость изменения (выравнивания) температуры вещества в неравновесных

тепловых процессах. Численно равна отношению теплопроводности к удельной теплоёмкости при постоянном давлении. В СИ измеряется в $\text{м}^2/\text{с}$. Обычно обозначается греческой буквой α . [15]

Теплообмен или теплоотдача - конвективный теплообмен между движущейся средой и поверхностью.

Коэффициент теплоотдачи α – характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Коэффициент α показывает, какое количество тепла передается от единицы поверхности стенки к жидкости в единицу времени при разности температур между стенкой и жидкостью в 1 градус (К). [43]

Условия теплообмена на поверхности — комплекс природных и техногенных факторов, влияющих на процесс тепло- и массообмена на поверхности с окружающей средой: температура воздуха, солнечная радиация, испарение, транспирация, альbedo поверхностей, их расположение (север, юг и т.д.) и угол наклона к лучам солнца, тип почвенных покровов (растительность, снег, вода, торфяная, торфо-глинистая или скальная обсыпка и т.п.), рельеф местности, режим и характер обводнённости, различные искусственные покрытия (теплоизолирующие, теплодиодные, солнцезащитные, дорожные и т.д.). При теплотехнических расчётах условия теплообмена на поверхности учитываются путём введения в расчётную схему обобщённых параметров в виде температуры воздуха приведённой к температуре поверхности с учётом поправочных данных

Осадка оттаивания мёрзлого грунта основания насыпи – это процесс деформации уплотнения оттаивающего грунта под нагрузками (от веса насыпи и оттаявших слоёв основания, а также веса и динамического воздействия подвижной нагрузки). Он обусловлен увеличением плотности оттаивающих под нагрузкой грунтовых слоёв, в связи с уменьшением их пористости, при выдавливании воздуха (газов) и воды из пор грунта в условиях затруднённости (или невозможности, например, в чаше мерзлотного оттаивания и др.)

бокового расширения, а также затруднённости (или отсутствии) краевого выдавливания грунта вверх (выпора), по краям площади нагружения. При этом происходит боковое (в края площадки нагружения) выдавливание отжимаемой воды, а также инфильтрация её в оседающую нижнюю часть насыпи (особенно при отсыпке её из дренирующего грунта).

Просадка грунта – это осадка грунта, вызванная его замачиванием водой, как при оттаивании, так и при инфильтрации, напитывании водой и т.д. Грунт считается просадочным, при относительной деформации просадочности не менее $e_{si} > 0,01$. [82]

Хвостохранилище — это комплекс специальных сооружений и оборудования, предназначенный для хранения или захоронения радиоактивных, токсичных и других материалов, оставшихся после процесса отделения ценной фракции от нерентабельной фракции (пустой породы) руды.

Современные хвостохранилища представляют собой сложные инженерные сооружения с надежной дамбой и противофильтрационным экраном из пластиковых пленок, который не дает вредным веществам проникать во внешнюю среду.

Как правило, хвостохранилища располагаются в нескольких километрах от производства, в понижениях рельефа (котловинах, ущельях, распадках).

Особую опасность для окружающей среды представляют старые хвостохранилища. Некоторые из них организованы на природных прудах и озерах, не ограждены и не охраняются. Еще одна опасность - загрязнение воздушных потоков в районе хвостохранилищ. В воздухе может наблюдаться повышенное содержание вредных газов, включая диоксид серы и диметилсульфид. [58]

Влияние составляющих радиационно-теплого баланса на температурный режим сооружений

Кроме климатических и теплофизических факторов (таких как температура воздуха, влажность, теплопроводность материалов, наличие влаги в грунте и др.), на изменение температурного режима сооружений существенное

влияние оказывают составляющие радиационно-теплового баланса. Этот баланс отражает взаимодействие сооружения с окружающей средой в виде теплообмена, как через воздух, так и за счёт радиационных процессов.

Основные компоненты радиационно-теплового баланса:

1. Поглощённая солнечная радиация (солнечное излучение)

Поверхности сооружений (крыши, стены, покрытия) поглощают часть прямой и рассеянной солнечной радиации, что приводит к их нагреванию. Величина поглощения зависит от:

- географического положения и ориентации объекта,
- времени года и суток,
- оптических свойств поверхности (цвет, шероховатость, альbedo),
- наличия снега, пыли, растительности и т.д.

2. Длинноволновое излучение атмосферы

Атмосфера также излучает тепло, которое частично поглощается поверхностями сооружения. Это особенно важно в ночное время, когда солнечная радиация отсутствует.

3. Тепловое излучение самого сооружения

По закону Стефана-Больцмана, любое тело с температурой выше абсолютного нуля излучает энергию. Поверхности сооружения излучают тепловую энергию обратно в атмосферу, тем самым теряя тепло, особенно в ясные и холодные ночи.

4. Конвективный теплообмен с воздухом

Передача тепла между поверхностью сооружения и окружающим воздухом происходит за счёт конвекции. Эффективность этого процесса зависит от температуры воздуха, скорости ветра и характеристик поверхности.

5. Испарительное и конденсационное тепло

При наличии влаги на поверхности сооружения или в грунте происходит теплообмен, связанный с фазовыми переходами: испарение

(поглощение тепла) или конденсация (выделение тепла). Особенно актуально для кровель, влажных утеплителей и наслоений снега.

б. Тепловой поток вглубь конструкции (или в грунт)

Это компонент отражает передачу тепла от поверхности в толщу конструкционных материалов или в грунт (в случае зданий на фундаменте или в контакте с землёй). Этот поток зависит от теплофизических свойств материала и температуры внутри сооружения.

1.3 Основные факторы, влияющие на температурный режим в условиях вечной мерзлоты.

1. Климатические условия

- Температура воздуха — главный внешний фактор. Чем ниже среднегодовая температура воздуха, тем глубже и стабильнее мерзлота.
- Снеговой покров — действует как теплоизолятор. Толстый снеговой слой снижает промерзание грунта зимой, а тонкий — способствует более глубокому промерзанию.
- Осадки — влияют на влажность почвы и её теплоёмкость.
- Радиационный баланс — соотношение поступающей солнечной и исходящей тепловой энергии влияет на общее тепло в системе.

2. Географические и геологические факторы

- Широта и высота над уровнем моря — определяют уровень солнечного обогрева.
- Рельеф — склоны, впадины, равнины по-разному аккумулируют или теряют тепло.
- Состав и структура грунтов — глинистые и водонасыщенные породы лучше сохраняют холод, чем песчаные.
- Грунтовая влага — при замерзании вода выделяет тепло (теплота кристаллизации), что влияет на глубину и скорость промерзания.

3. Антропогенное воздействие

- Строительство и хозяйственная деятельность — здания, дороги, трубопроводы изменяют тепловой режим грунта.
- Изменение растительности — вырубка леса, пожары или сельское хозяйство могут изменить теплообмен между атмосферой и почвой.
- Тепловыделяющие объекты — тепло от построек или коммуникаций может вызвать деградацию мерзлоты.

4. Биологические факторы

- Растительный покров — мох, трава, кустарники влияют на теплоизоляцию и испарение.
- Толщина органического слоя — торфяные почвы замедляют теплообмен и стабилизируют мерзлоту.

Приток солнечной радиации — основной энергетический фактор на Земле
Солнечная радиация (солнечное излучение) — это электромагнитная энергия, поступающая от Солнца к Земле. Это единственный внешний и устойчивый источник энергии, который определяет все физико-географические процессы в атмосфере, гидросфере, литосфере и биосфере. Она играет ключевую роль в формировании климата, погоды, круговорота воды, движении воздушных масс, формировании ландшафтов и жизни на Земле.

Почему солнечная радиация — основной источник энергии?

- Энергия Земли из недр (внутреннее тепло) составляет менее 0,02% от того количества энергии, которое Земля получает от Солнца.
- Солнечная радиация поступает непрерывно, в огромных масштабах: в среднем $\sim 1361 \text{ Вт/м}^2$ (солярная постоянная).
- Других внешних источников энергии (например, от космоса) практически нет.

Как солнечная энергия участвует в географических процессах?

1. Атмосфера и климат

- Солнечные лучи нагревают поверхность Земли, а та, в свою очередь, нагревает воздух.

- Формируется циркуляция атмосферы — ветер, циклоны, антициклоны.
- Возникают различия в температуре и давлении, что вызывает глобальные и региональные потоки воздуха.
- Осадки и испарение — также результат солнечного нагрева.

2. Гидросфера

- Испарение воды из океанов, морей, рек, почвы — ключ к круговороту воды.
- Благодаря солнечному теплу возможны таяние льдов, образование облаков и выпадение осадков.
- Солнечная энергия участвует в циркуляции морских течений, особенно в верхних слоях океана.

3. Литосфера

- Прямая солнечная энергия влияет на температурный режим почвы и процессов выветривания.
- Физическое выветривание (например, температурные трещины в скалах) зависит от суточных и сезонных колебаний температур.
- Также солнечное тепло влияет на структуру мерзлоты, как мы обсуждали ранее.

4. Биосфера

- Фотосинтез — процесс, лежащий в основе жизни, возможен только благодаря солнечному свету.
- Энергия, полученная растениями, передается по пищевым цепям.
- Развитие экосистем, миграция животных, сезонные циклы — всё это завязано на солнечной активности.

5. Почвенные процессы

- Солнечная радиация влияет на температуру почвы, что в свою очередь регулирует микробиологическую активность, образование гумуса и разложение органики.
- Влажность почв также регулируется за счёт испарения, зависящего от температуры и радиационного баланса.

Радиационный баланс

Приток солнечной энергии — это только часть процесса. Важно, сколько энергии Земля поглощает и сколько отражает или излучает обратно в космос:

- Альbedo — отражательная способность поверхности. Снег, лёд, песок отражают больше солнечного света.
- Земля излучает энергию в виде длинноволнового инфракрасного тепла — это основа "парникового эффекта".
- Любые изменения в радиационном балансе (например, за счёт изменения облачности, загрязнения атмосферы, вырубки лесов) влияют на климат.

Приток солнечной радиации — фундаментальная движущая сила:

- Он формирует климатические зоны,
- Определяет распределение тепла и влаги по планете,
- Запускает биологические и геоморфологические процессы,
- Является главным источником энергии для поддержания жизни.

Без солнечной радиации Земля была бы холодной, мёртвой планетой, покрытой вечной тьмой и льдом.

1.4 Промерзание грунта – основной фактор при разработке месторождений в зоне вечной мерзлоты.

Промерзание грунта — это один из ключевых факторов, который нужно учитывать при разработке месторождений в условиях вечной мерзлоты. Этот процесс влияет на безопасность, устойчивость и эффективность строительства и эксплуатации инфраструктуры (буровых установок, дорог, трубопроводов, зданий и т.д.). Это процесс, при котором влага в порах почвы превращается в лёд, в результате чего изменяются физико-механические свойства грунта:

- он становится твёрдым, как бетон;
- резко увеличивается его несущая способность;
- меняется его объем (в случае промерзания и оттаивания).

Важно при разработке месторождений:

6. Основание для строительства

- Промерзший грунт в зоне вечной мерзлоты может быть очень устойчивым основанием, если не нарушать его температурный режим.
- Оттаивание мерзлоты из-за тепла от сооружений или трубопроводов может привести к просадке, деформации и разрушению объектов.

7. Воздействие на инженерные сооружения

- При нарушении стабильности мерзлоты происходят:
 - термокарстовые процессы (провалы),
 - оползни и сели,
 - вспучивание грунта (если замерзание происходит неравномерно).
- Особенно критично это для нефтегазовых трубопроводов — деформации могут вызвать утечки и аварии.

8. Доступность и транспортировка

- Промерзание влияет на временные транспортные маршруты:
 - зимники (временные дороги по льду и снегу) возможны только при определенной глубине промерзания.
 - В летний период дороги могут стать непроходимыми из-за оттаивания и заболачивания.

9. Техника и буровые установки

- Машины и буровые платформы должны быть рассчитаны на эксплуатацию на промерзшем или оттаивающем грунте.
- Часто применяются специальные свайные фундаменты, уходящие глубоко в стабильную мерзлоту.

10. Экологическая устойчивость

- Нарушение структуры мерзлоты может привести к выделению парниковых газов (например, метана из оттаивающего торфа).
- Возможны загрязнения, если промерзший слой перестает играть роль естественного "изолятора".

Что делает разработку сложной:

- Любое техническое оборудование и инфраструктура выделяют тепло, которое может:

- вызвать разогрев и оттаивание мерзлого грунта;
- нарушить температурное равновесие;
- ускорить разрушение геотехнической устойчивости объекта.

Чтобы этого избежать, применяются:

- Термоизоляционные материалы при строительстве;
- Криогенные сваи (охлаждаемые фундаменты);
- Вентиляционные прослойки между зданием и землей;
- Постоянный мониторинг температуры грунта.

Отсюда следует, что промерзание грунта — основополагающий геокриологический фактор:

- Оно определяет возможность и особенности строительства на вечной мерзлоте;
- Влияет на технику безопасности, проектирование и эксплуатацию месторождений;
- Требуется точный учет температурных режимов и инженерных решений для предотвращения экологических и техногенных катастроф.

1.5 Физическая подстановка задачи.

Исследованием фильтрационных и тепловых процессов занимались ученые из Кыргызстана. Джаныбеков Ч.Дж [40], Джаманбаев М.Дж.[41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52], Исманбаев А.И.[40], Бийбосунов Б.И.[53], Чукин Б.А., Чукин Р.Б.[54] и др. Среди отечественных исследователей температурного и фильтрационного режимов в зоне вечной мерзлоты можно отметить работы Джаманбаева М.Дж., [50], Турсункуловой З.С., Шекеева К.Р. [68]

Большая работа в рамках международного научного проекта по изучению температурного режима сооружений в криолитозоне проделана в совместном международном научном проекте с учеными из Института горного дела Сибирского отделения РАН Назаровой Л.А., Назаровым Л.А. и кыргызских ученых Джаманбаевым М.Дж., Чыныбаевым М.К. [55,56] Совместные исследования посвящены вопросам моделирования процессов

теплопереноса в окрестности гидротехнических сооружений в криолитозоне.

Результатом данных исследований послужила разработанная геомеханическая модель эволюции температурного и гидродинамического поля в окрестности защитной дамбы хвостохранилища жидких отходов золоторудного месторождения Кумтор. Также оценено влияния изменения температуры воды на дамбу, оценены размеры противодиффузионного экрана на объем фильтрата через дамбу.

В этих исследованиях оставались открытыми вопросы, ответы которых были необходимыми для практики и для реализации математической модели такие как определение времени перехода в стационарный режим теплопереноса под основанием хвостохранилища, предельная глубина таяние мерзлого грунта, определение коэффициентов теплопроводностей, теплообмена грунтов.

Физическая постановка задачи. В процессе работы золоторудной фабрики сбрасываются отходы в хвостохранилище в виде жидкой массы, состоящей примерно на 55% из жидкости, а оставшиеся 45% составляют мелкодисперсные твердые частицы в виде пульпы. Пульпа поступает в виде жидкости, образуя пруд и его придонный слой имеет всегда положительную температуру т.к. он не полностью замерзает. Положительная температура придонного слоя воды способствует оттаиванию мерзлого грунта. На начальном этапе времени грунт считается мерзлым. Задача состоит в исследовании распространения тепла в грунте под влиянием температуры воды в пруде и глубину таяния основания хвостохранилища.

Математическая модель. Математическая модель распространения тепла в мерзлом грунте можно описать двумя способами

1. Уравнением конвективной теплопроводности (уравнением Фурье):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

где $T(x,t)$ — температура грунта на глубине x в момент времени t , $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ коэффициент теплопроводности грунта.

Начальным условием.

$$T(x, 0) = T_0(x)$$

где $T_0(x)$ — известное температурное распределение (например, по результатам измерений или расчетов за предыдущий год).

Граничными условиями. На дне пруда или на поверхности грунта $x=0$ — температура воды не изменяется с течением времени

$$T(0, t) = T_B,$$

где T_B — температура воды на дне пруда.

На глубине $x=L$ — температура считается постоянной и равной температуре вечной мерзлоты

$$T(L,t)=T_1.$$

(Либо можно задать нулевой тепловой поток: $\frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0$, если L достаточно большое.) Глубина таяния находится местоположением нулевой изотермы.

2. Уравнениями теплопроводностей отдельно в зоне талого и в зоне мерзлого грунта

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_T}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq h \\ \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \leq x \leq L \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Начальными

$$t = 0; \quad x \in [0, h]; \quad T_T = f_1(x); \quad x \in [h, L], \quad T_M = f_2(x). \quad (2)$$

граничными условиями

$$x=0, \quad T_T = T_B, ; \quad x=h, \quad T_T = T_M = T_0; \quad x=L, \quad T_M = T_1, \quad (3)$$

где h — глубина таяния; L — область мерзлого грунта за которой начинается вечная мерзлота; соответственно - T_0, T_1, T_B температура таяния мерзлого грунта, температура вечной мерзлоты, температура окружающей среды; соответственно - $f_1(x), f_2(x)$ начальные условия для талой и мерзлой зоны, a_T, a_M коэффициенты теплопроводности талого и мерзлого грунта.

Неизвестная подвижная граница таяния мерзлого грунта определяется через условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта уравнением Стефана:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x} \right]_{x=h} = q_0 w \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4)$$

где T_T – температура зоны талого грунта; T_M – температура зоны мерзлого грунта. Для упрощения задачи считается, что температура воды и грунта на основании пруда при долгосрочном прогнозировании считается одинаковыми, λ_T , λ_M – коэффициенты теплопроводности талого и мерзлого грунта; w – количество льда в грунте; q_0 – теплота плавления льда.

Физические параметры среды. В математической модели используются физико-механические свойства грунта (теплопроводность, температуропроводность, плотность, теплоёмкость, коэффициенты теплообмена).

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 1

За последние сорок лет вопросам моделирования температурного режима в условиях вечной мерзлоты уделяется значительное внимание, что отражает важность этой тематики для обеспечения устойчивого природопользования и инженерной безопасности в северных и горных регионах. Для Кыргызской Республики, как высокогорной страны с выраженными сезонными и климатическими колебаниями, изучение процессов промерзания и оттаивания грунтов представляет собой не только практическую необходимость, но и обладает высокой научной ценностью. Эти исследования особенно актуальны в контексте изменения климата, устойчивого освоения природных ресурсов, проектирования инженерных сооружений в горных районах и сохранения экосистем. Разработка и применение математических моделей температурного режима может существенно повысить точность прогнозов и эффективность принимаемых решений в области строительства, экологии и геокриологии.

ГЛАВА 2. МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данной главе приводится методология и методы исследования для решения задач, рассматриваемые в диссертационной работе.

Объектом исследования является:

- процесс таяния мерзлого грунта под основанием хвостохранилищ, расположенная в условиях вечной мерзлоты;
- построение аналитических решений математических моделей процесса переноса тепла в грунте под влиянием климатических и техногенных факторов.

Предметом исследования является разработка аналитико-численного подхода к решению задач таяния мерзлого грунта, позволяющее эффективно решать задачи по определению времени перехода в стационарный режим, температуры грунта, коэффициентов температуропроводностей, теплообмена и предельную глубину таяния.

2.1. Математические модели описывающие процесс таяния мерзлого грунта

Для описание процесса таяния мерзлого грунта под влиянием климатических и техногенных факторов в данной работе используются четыре вида математических моделей.

Математическая модель, описывающая процесс таяния с учетом фазового перехода(уравнение Стефана)

Задача Стефана — это классическая задача в теории теплопроводности, связанная с фазовыми переходами, например, плавлением или кристаллизацией вещества. Примером может быть задача о таянии или промерзание грунта, которая изначально состоит из двух фаз (например, талая

и мерзлая), и требуется вычислить, глубину таяния или промерзания, определить распределение температура по времени и пространству.

Формулировка задачи Стефана:

Математическая модель процесса переноса тепла в талых и в мерзлых грунтах в одномерной постановке описывается следующим образом (Фельдмана, Томирдиаро) [16,17,18]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_T}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq h \\ \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \leq x \leq L \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$t = 0; \quad x \in [0, h]; \quad T_T = f_1(x); \quad x \in [h, L], \quad T_M = f_2(x). \quad (2)$$

$$x=0, \quad T_T = T_B, ; \quad x=h, \quad T_T = T_M = T_0; \quad x=L, \quad T_M = T_1. \quad (3)$$

где h – глубина таяния; L – область мерзлого грунта за которой начинается вечная мерзлота; соответственно - T_0, T_1, T_B температура таяния мерзлого грунта, температура вечной мерзлоты, температура окружающей среды; соответственно - $f_1(x), f_2(x)$ начальные условия для талой и мерзлой зоны, a_T, a_M коэффициенты температуропроводности талого и мерзлого грунта.

Неизвестная подвижная граница таяния мерзлого грунта определяется через условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта уравнением Стефана:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x} \right]_{x=h} = q_0 w \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4)$$

где T_T – температура зоны талого грунта; T_M - температура зоны мерзлого грунта. Для упрощения задачи считается, что температура воды и грунта на основание пруда при долгосрочном прогнозировании считается одинаковыми, λ_T, λ_M – коэффициенты теплопроводности талого и мерзлого грунта; w - количество льда в грунте; q_0 - теплота плавления льда.

2.2 Математическая модель, описывающая процесс таяния без учета фазового перехода. Глубина таяния находится местоположением изотермы.

Когда не учитывается фазовый переход, задача становится проще: мы не моделируем скрытую теплоту плавления, а просто предполагаем, что таяние происходит там, где температура достигает температуры плавления (например, 0 °С для льда). То есть, глубина таяния — это просто глубина, на которой температура становится равной температуре фазового перехода, и определяется как положение изотермы.

Физическая постановка задачи

Пусть под действием климатического или техногенного воздействия происходит процесс таяния или промерзания грунта. Нам нужно найти:

- Распределение температуры в грунте по времени,
- И положение изотермы $T^{\circ}\text{C}$, которое будет интерпретироваться как глубина таяния.

Математическая модель

Процесс таяния мерзлого грунта рассматривается как задача переноса тепла в одной заданной области $(0, L)$ под влиянием изменения вида граничного и начального условия. Фронт таяния находится местоположением нулевой изотермы. Математически задача формулируется следующими уравнениями в частных производных:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (5)$$

и граничными условиями

$$T(0, t) = T_1, \quad T(L, t) = T_2 \quad (6)$$

где $T(x,t)$ – температура грунта внутри области $(0, L)$ в различное время, T_1 , T_2 – заданные значения температуры в начале и в конце области.

Начальное условие температуры грунта под основанием строится на основе данных наблюдений.

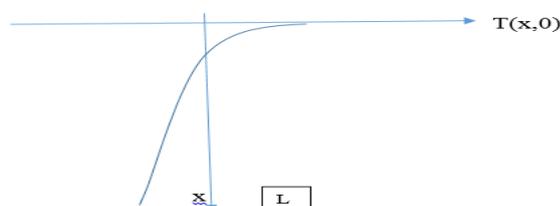


Рис.2.1. Начальное условие температуры

Начальное условие задается аналитически

$$T(0,x) = \varphi(x). \quad (7)$$

Положение нулевой изотермы определяется из решения уравнения:

$$T(x,t)=0^{\circ}\text{C}.$$

Искомое значение $x=\xi(t)$ — это глубина, на которой температура достигает точки плавления. Это и есть глубина таяния.

- Здесь не учитывается фазовый переход (никакой скрытой теплоты),
- Глубина таяния определяется просто как место, где температура достигает 0°C ,
- Можно использовать аналитическое решение уравнения теплопроводности и найти глубину по изотерме $T=0$.
- Модель проста в численной реализации (конечно-разностные или метод конечных элементов).

2.3 Математическая модель, описывающая процесс таяния с учетом теплообмена.

Математическая модель, которая учитывает не только теплоперенос, но и теплообмен (например, с окружающей средой). Такая модель позволяет описывать более сложные условия таяния — например, снег или лёд, нагреваемые воздухом или водой. Такой процесс математически можно моделировать двумя способами:

1. Теплообмен можно учитывать через граничное условие третьего рода

Физическая постановка

Рассмотрим ограниченную область $(0, L)$, занятое мерзлым грунтом, веществом (например, льдом), изначально имеющим температуру ниже температуры плавления. Сверху (в точке $x=0$) происходит теплообмен с окружающей средой, например, воздухом при температуре T_{∞} .

Таяние происходит на границе фаз при температуре плавления T_m , и учитывается скрытая теплота плавления.

Уравнение теплопроводности для зоны талого грунта и зоны мерзлого грунта описывается отдельно уравнением теплопроводности:

Для каждой фазы пишется:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

где $a = \frac{k}{\rho c}$ - температуропроводность.

Граничные условия на поверхности $x=0$:

Модель теплообмена с воздухом (закон Ньютона):

$$-k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = hT_s(t) - T_\infty$$

где

- h — коэффициент теплоотдачи или теплообмена,
- $T_s(t)$ — температура поверхности материала (на $x=0$),
- T — температура окружающей среды.
- — температура окружающей среды.

На конце области: $T(L, x) = T_0 < T_m$

Условие на границе фазового перехода $x=\xi(t)$:

Граница между фазами $x=\xi(t)$ движется во времени. Здесь:

- Температура равна температуре плавления:

$$T(\xi(t), t) = T_m$$

- Условие Стефана (баланс тепла):

$$\lambda \frac{d\xi}{dt} = k \left(\frac{\partial T}{\partial x_{\text{жид.}}} - \frac{\partial T}{\partial x_{\text{тверд.}}} \right)$$

или в упрощённой модели (если только одна фаза активно греется):

$$\lambda \frac{d\xi}{dt} = -k \frac{\partial T}{\partial x}(\xi(t), t)$$

где:

- λ — плотность,
- k — теплопроводность,
- $\frac{d\xi}{dt}$ — скорость движения границы,

- L — скрытая теплота плавления.

2.4 Математическая модель теплопереноса с учетом теплообмена, описываемая уравнением теплопроводности с дополнительным слагаемым.

Математическая модель процесса таяния мерзлого грунта под основанием водоема с учетом теплообмена скелета грунта в зоне талого грунта, а в зоне мерзлого грунта не учитывается. Математическая модель такого процесса имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta T(x, t), \quad (2.1)$$

здесь β — коэффициент теплообмена. В зоне талого грунта, где $T(x, t) \geq 0$, $\beta \neq 0$ и в зоне мерзлого грунта, где $T(x, t) < 0$, $\beta = 0$. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_1; \\ T(L, t) &= T_2; \end{aligned} \quad (2.2)$$

Начальное условие данного процесса задается в виде:

$$T(x, 0) = \varphi(x); \quad (2.3)$$

2.5 Математическая модель теплопереноса с учетом фильтрации

Считая, что температура грунта и температура фильтрующейся воды одинаковыми, т.е. принимается модель Фурье-Кирхгофа (Фельдман Г.М., Томирдиаро С.В. [16, 17, 18,]). В зоне талого грунта учитывается фильтрация воды из водоема, а в зоне мерзлого грунта фильтрация не учитывается. Математическая модель такого процесса имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_T}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2} - v \frac{\partial T_T}{\partial x}, 0 \leq x \leq h. \\ \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \leq x \leq L \end{aligned} \right\} \quad (2.4)(2.5)$$

Начально-граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} t &= 0; \quad x \in [0, L]; \quad T_M = f_1(x). \\ x &= 0, \quad T_T = T_B, \\ x &= h, \quad T_T = T_M = T_0 \\ x &= L, \quad T_M = T_1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где соответственно – T_B , T_0 , T_1 температура воды в пруде, температура таяния мерзлого грунта и температура вечной мерзлоты. Условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта описывается уравнением:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x} \right]_{x=h} = q_0 w \gamma \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (2.7)$$

где T_T – температура зоны талого грунта, T_M - температура мерзлого грунта, являющиеся решением начально-краевой задачи (2.4) - (2.5); T_{Π} - температура дна пруда; a_T , a_M , λ_T , λ_M -коэффициенты теплопроводности и теплопроводности грунта в талых и мерзлых грунтах; h - глубина таяния; w - количество льда в грунте; q_0 - теплота плавления льда, γ - удельный вес грунта, v – скорость фильтрации воды из водоема.

2.6 Численные методы

В данной работе используется методология метода конечных элементов (МКЭ) — это численный метод решения дифференциальных уравнений, в котором:

- область решения разбивается на множество маленьких элементов (отсюда «конечных элементов»),
- на каждом элементе решение аппроксимируется простыми функциями (например, линейными),
- из условия минимизации ошибки основного уравнения получается система алгебраических уравнений, которая решается одним из методов решения системы алгебраических уравнений на компьютере.

МКЭ проходит 5 ключевых этапов:

Постановка задачи

Допустим, у нас есть уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x), \quad x \in [0, L]$$

с граничными условиями (например, $u(0)=0$, $u(L)=0$)

2. Разбиение области (сетка)

Разбиваем отрезок $[0, L]$ на N маленьких отрезков (элементов):

- точки деления называются узлами,
- каждый отрезок — элемент.

3. Аппроксимация (интерполяция)

На каждом элементе приближаем решение $u(x)$ линейной функцией:

$$u(x) \approx u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_2(x)$$

Где:

- $\phi_1(x)$ — функции формы (например, треугольные),
- u_i — значения функции в узлах.

4. Слабая форма уравнения

Для перехода к системе уравнений используется слабая форма:

1. Уравнение умножается на тестовую функцию $v(x)$,
2. Интегрируется по области,
3. Применяется интегрирование по частям (чтобы понизить порядок производных).

Результат: $\int_0^L \frac{du}{dx} * \frac{dv}{dx} dx = \int_0^L f(x) * v(x) dx$

5. Сборка глобальной системы

Подставляем интерполяцию в слабую форму \rightarrow получаем систему линейных уравнений:

$$\mathbf{K} * \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

где:

- \mathbf{K} — жесткостная матрица (зависит от производных функций формы),
- \mathbf{u} — вектор значений в узлах (неизвестное решение),
- \mathbf{F} — вектор правой части (влияние источников, нагрузок).

После учёта граничных условий система решается стандартными методами (например, методом Гаусса).

2.7 Аналитические методы

Аналитический метод — это способ нахождения точного решения уравнения в виде формулы, с помощью:

- разложения в ряды (Фурье, Лежандра, Чебышёва),
- подстановки (метод разделения переменных),
- преобразований (Лапласа, Фурье),
- или других приёмов классического анализа.

Такие методы применимы, если:

- уравнение линейное,
- область имеет простой геометрический вид (например, прямоугольник),
- граничные условия однородные.

Аналитический метод Фурье, который часто применяется для решения задач теплопроводности, особенно в частичном случае одномерной задачи в ограниченной области с начально-граничными условиями.

Метод Фурье — это способ решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с помощью разложения по собственным функциям (гармоникам). Он особенно удобен, когда задача линейна и область — прямоугольная (или одномерный отрезок).

Метод часто применяется для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \quad t > 0$$

с начальными $u(x, 0) = f(x)$

граничными условиями, например: $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

Аналитический метод (на примере метода разделения переменных)

1. Подставляем представление:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

2. Получаем два уравнения:

Разделим переменные:

$$\frac{1}{aT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda$$

⇒ две задачи:

- Пространственная часть:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0$$

- Временная часть:

$$\frac{dT}{dt} + a\lambda T = 0 \Rightarrow T(t) = Ce^{-a\lambda t}$$

3. Решение задачи на собственные значения

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

4. Общее решение

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) * e^{-a\frac{n\pi^2}{L} t}$$

5. Коэффициенты C_n

Определяются по начальному условию:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Вывод:

Аналитический метод позволяет получить точное выражение решения задачи (часто в виде бесконечного ряда), но:

- работает в строго определённых условиях (простая геометрия, линейные уравнения),
- при сложной геометрии или нелинейных уравнениях — заменяется численными методами (МКР, МКЭ и др.).

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 2

1. Упрощение задачи теплопереноса достигается за счёт исключения учета фазового перехода. В таком подходе не моделируется скрытая теплота плавления.
2. Процесс таяния трактуется как достижение температурой критического значения (температуры плавления), без учета теплофизических особенностей перехода фаз.
3. Глубина таяния определяется как положение изотермы, соответствующей температуре фазового перехода (например, 0 °С для

льда), и не зависит от количества тепла, необходимого для фазового превращения.

4. Такой подход позволяет существенно упростить численное моделирование, особенно при расчётах в многолетнемерзлых грунтах, ледниках и других геофизических задачах.

ГЛАВА 3. АНАЛИТИКО - ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА, ОСНОВАННЫЙ НА ИДЕЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

3.1 Алгоритм определения коэффициентов теплопроводностей и значения температуры грунта аналитико-численным методом.

Методом идентификации аналитического решения математической модели теплопереноса определить коэффициенты теплопроводностей мерзлых и талых грунтов, а также значения температуры грунта, используя данные натурных наблюдений температуры грунта. В качестве примера рассмотрены данные наблюдения температуры в скважине в районе Кумтор на уровне 3800м. глубиной 30м. (ВН93-12 от 23 июня 1993 г.)

Методика решения. Разработана аналитико-численный подход, основанная на сочетании аналитического метода с методом конечных элементов (МКЭ). Сущность которого заключается в том, что приближенное решение математической модели строится не с помощью произвольных базисных функций как в МКЭ, а используются линейно-независимые частные решения уравнения теплопроводности. В результате получается аналитическое решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее начально-краевым условиям задачи для одного элемента. С помощью построенного аналитического решения, из начального условия задачи, определяется коэффициент теплопроводности, как решение трансцендентного уравнения.

Математическая модель процесса переноса тепла в талых и в мерзлых грунтах в одномерной постановке описывается следующим образом (Фельдмана, Томирдиаро[16,17,18])

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_T}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq h \\ \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \leq x \leq L \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$t = 0; \quad x \in [0, h]; \quad T_T = f_1(x); \quad x \in [h, L], \quad T_M = f_2(x). \quad (2)$$

$$x=0, \quad T_T = T_B, ; \quad x=h, \quad T_T = T_M = T_0; \quad x=L, \quad T_M = T_1. \quad (3)$$

где h – глубина таяния; L – область мерзлого грунта за которой начинается вечная мерзлота; соответственно - T_0, T_1, T_B температура таяния мерзлого грунта, температура вечной мерзлоты, температура окружающей среды; соответственно - $f_1(x), f_2(x)$ начальные условия для талой и мерзлой зоны, a_T, a_M коэффициенты температуропроводности талого и мерзлого грунта.

Неизвестная подвижная граница таяния мерзлого грунта определяется через условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта уравнением Стефана:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x} \right]_{x=h} = q_0 w \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4)$$

где T_T – температура зоны талого грунта; T_M - температура зоны мерзлого грунта. Для упрощения задачи считается, что температура воды и грунта на основании пруда при долгосрочном прогнозировании считается одинаковыми, λ_T, λ_M – коэффициенты теплопроводности талого и мерзлого грунта; w - количество льда в грунте; q_0 - теплота плавления льда.

Для построения аналитико-численного решения данной задачи (1) – (4) согласно идее МКЭ в качестве базисных функций выбирается линейно-независимые частные решения уравнения теплопереноса. Вид частного решения выбирается не произвольно, а так, чтобы она соответствовала физике процесса, т.е. по глубине температура грунта убывает, а по времени периодически изменяется

$$T_1(x, t, a) = e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x} \cos\left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x - 4\pi t\right), T_2(x, t, a) = e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x} \sin\left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x - 4\pi t\right) \quad (5)$$

Рассматриваемая область разбивается на конечные элементы согласно температурного режима грунта, т.е., где изменение температуры происходит быстрее, разбивается на мелкие элементы, а где изменение температуры происходит медленнее, разбивается на крупные элементы. В каждом элементе аналитическое решение строится по аналогии МКЭ следующим образом

$$\begin{aligned} T_T(x, t, a) &= N_i^1(x, t, a) * T_B + N_j^1(x, t, a) * T_0, \\ T_M(x, t, a) &= N_i^2(x, t, a) * T_0 + N_j^2(x, t, a) * T_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} N_i^k(x, t, a) &= \frac{T_2(x_j, t, a) * T_1(x, t, a) - T_2(x, t, a) * T_1(x_j, t, a)}{T_2(x_j, t, a) * T_1(x_j, t, a) - T_2(x_i, t, a) * T_1(x_j, t, a)}, \\ N_j^k(x, t, a) &= \frac{T_2(x, t, a) * T_1(x_i, t, a) - T_2(x_i, t, a) * T_1(x, t, a)}{T_2(x_j, t, a) * T_1(x_j, t, a) - T_2(x_i, t, a) * T_1(x_j, t, a)}. \end{aligned} \quad (7)$$

аналоги функции формы МКЭ, k – номер элемента. Коэффициенты теплопроводности « a » каждого элемента находятся как решение трансцендентного уравнения (6), удовлетворяя начальному условию (2). Для нахождения поля температуры грунта в любое другое время, здесь получается не решением системы линейных алгебраических уравнений как в МКЭ, а находится из условия сшивания решений между конечными элементами области. В качестве условия сшивания в МКЭ используются условие непрерывность теплопереноса. В данной работе в качестве условия сшивания впервые рассмотрено условие теплообмена между элементами области т.е. конвективный теплоперенос. Трудность такого подхода заключалась в неизвестности коэффициента теплообмена между окружающей средой и грунтом на дневной поверхности, а также аналоги коэффициента теплообмена между разнородными грунтами т.е. между элементами области. Коэффициенты теплообмена на стыке элементов будут разными и они зависят от величины тепловых потоков, идущих с разных сторон элемента. Используя начальное условие и аналитические решения для температуры из уравнения

граничного условия третьего рода т.е. из условий теплообмена находятся коэффициенты теплообмена.

После определения коэффициентов температуропроводностей и теплообмена, температурное поле грунта для последующих времен находится из условия разности температурных потоков между элементами области. Временной шаг берется не очень большим, а выбирается из физики процесса так, чтобы изменение температуры грунта была незначительной. Затем вычисленные значения температуры грунта в другом временном шаге, используя их как начальное условие и процесс определения коэффициентов температуропроводностей, теплообмена и температуры грунта повторяется заново по изложенному алгоритму. На стыках границ или элементов области ставится два условия теплообмена т.е. на основании пруда ставится два условия для теплового потока, идущий со стороны пруда и со стороны грунта

$$\frac{\partial T_B}{\partial x} = \gamma_1^- (T_B - T_1), \quad x = 0. \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_\Gamma}{\partial x} = \gamma_1^+ (T_\Gamma - T_B), \quad x = 0. \quad (9)$$

Здесь условие (8) означает поток тепла, идущий со стороны окружающей среды или от пруда, а условие (9) поток тепла со стороны грунта основания хвостохранилища, T_B - температура воды пруда или температура окружающей среды; T_1 - температура грунта основания пруда или температура грунта на дневной поверхности; $T_\Gamma = T^k(x, t, a) = N_i^k(x, t, a) * T_i + N_j^k(x, t, a) * T_j$, аналитическое решение температура грунта в k -ом элемента, с помощью которой находятся коэффициенты температуропроводностей для каждого элемента; γ_1^-, γ_1^+ - аналоги коэффициента теплообмена между водой(окружающей среды) и грунтом, грунтом и водой (окружающей среды). Коэффициенты теплообмена находятся, используя начальные условия температуры и вычисленные коэффициенты температуропроводностей при $t_0 = 0$.

$$\gamma_1^- = \frac{\partial T_B / \partial x}{T_B^{(0)} - T_1^{(0)}}, \quad \gamma_1^+ = \frac{\partial T_\Gamma / \partial x}{T_1^{(0)} - T_B^{(0)}} \quad (10)$$

Используя найденные значения коэффициентов теплообмена, находятся значения температуры в последующие моменты времени для первого элемента «1»

$$T_1 = \frac{(T_B \gamma_1^- - \partial T_B / \partial x)}{\gamma_1^-}, \quad T_2 = \frac{(-\frac{\gamma_1^+}{\gamma_1^-} * \frac{\partial T_B}{\partial x} - \frac{\partial N_i}{\partial x} * T_1)}{\partial N_j / \partial x} \quad (11)$$

Температура грунта для последующих элементов находятся из условия сшивания, т.е. из уравнения, характеризующее разность температурных потоков на стыках элементов. На стыке элементов «1» и «2» имеем уравнение

$$\frac{\partial T_r^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial T_r^{(2)}}{\partial x} = \gamma_2^- (T_2 - T_3) - \gamma_2^+ (T_2 - T_1)$$

или

$$T_3 = \frac{\gamma_2^- T_2 - \gamma_2^+ (T_2 - T_1) - \frac{\partial T_r^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial x} * T_2}{\gamma_2^- - \partial N_j^{(2)} / \partial x} \quad (12)$$

Аналоги коэффициентов теплообмена γ_2^- , γ_2^+ находятся из условия теплообмена, используя начальное условие для температуры

$$\gamma_2^- = \frac{\partial T_r^{(1)} / \partial x}{T_2^{(0)} - T_3^{(0)}}, \quad \gamma_2^+ = \frac{\partial T_r^{(2)} / \partial x}{T_2^{(0)} - T_1^{(0)}} \quad (13)$$

Повторяя этот алгоритм находятся последующие значения температуры грунта. Согласно изложенному алгоритму решена задача на основе данных наблюдения температуры в скважине (ВН93-12 от 23 июня 1993 г.) глубиной 30 м. определены коэффициенты теплопроводностей и значения температуры в разные моменты. Достоверность полученных результатов проверялась сравнением с данными наблюдений температуры этой скважины. Сравнение показано на рис.3.1. Глубина скважины подразделена на 17 элементов.

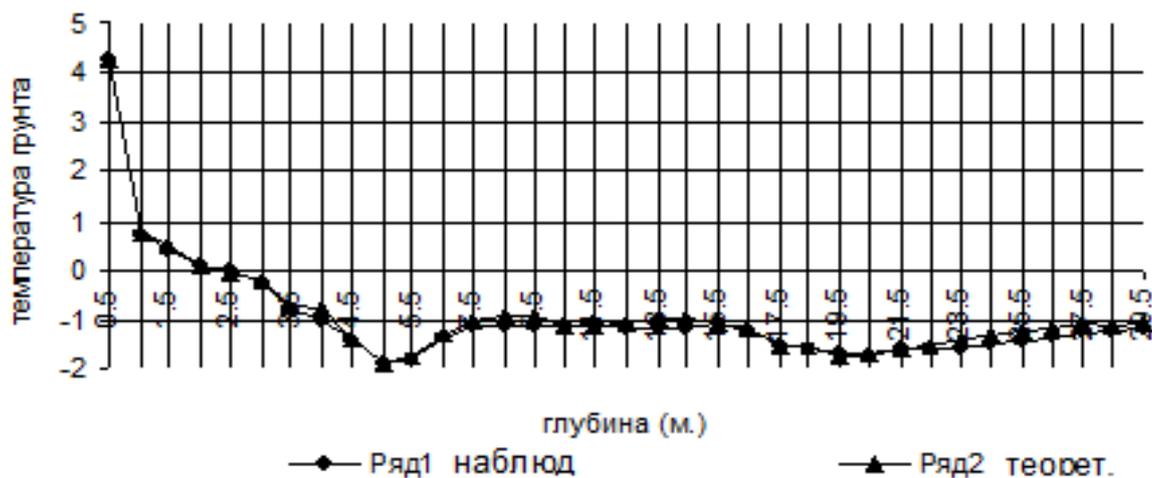


Рис. 3.1. Температура грунта.

В табл.3.1 приведены результаты определения коэффициента температуропроводности для талого (до 2м.) и мерзлого грунта (более 2 м.), как решения трансцендентных уравнений. В первой строке приведены номера элементов, во второй строке соответствующая глубина грунта, в третьей строке соответствующее значение коэффициента температуропроводности $a^2 = k/ср$. Мелкое разбиение проводилась в зоне активного слоя, где изменение температуры происходит заметнее и более крупное разбиение в зоне вечной мерзлоты, где изменение температуры происходит незначительно.

Таблица 3.1

Значения коэффициента температуропроводности

№ №	1	2	3	4	5
X (м)	0.5 - 1.5	1.5 - 2.5	2.5 - 3.5	3.5 - 4.5	4.5 - 6.5
a^2	$0.272 \cdot 10^{-4}$	$0.145 \cdot 10^{-4}$	$0.247 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.500 \cdot 10^{-4}$
№ №	6	7	8	9	10
X (м)	6.5 - 8.5	8.5 - 10.5	10.5 - 12.5	12.5 - 14.5	14.5 - 16.5
a^2	$0.143 \cdot 10^{-4}$	$0.339 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.164 \cdot 10^{-4}$
№ №	11	12	13	14	15
X (м)	16.5 - 18.5	18.5 - 20.5	20.5 - 22.5	22.5 - 24.5	24.5 - 26.5
a^2	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.209 \cdot 10^{-4}$	$0.240 \cdot 10^{-4}$	$0.196 \cdot 10^{-4}$	$0.259 \cdot 10^{-4}$

Следует отметить одну особенность предложенного подхода. При получении результатов расчета не использовалась прямая информация о коэффициенте теплопроводности, а использовалась косвенная информация-данные наблюдения температуры. Такой подход в отличие от обычных численных методов, дискретизация области производится на произвольные размеры элементов в зависимости от физики строения среды и не проводится решение системы алгебраических уравнений, т.е. нет операций приближенного вычисления производных и интегралов, а они вычисляются аналитически. В таком случае избегаемся от вычислительных погрешностей.

3.2 Определение коэффициентов теплопроводностей, теплообмена между элементами и значения температуры в разные моменты времени.

Согласно изложенному алгоритму рассматривается задача.

В качестве примера рассматриваются данные другой наблюдательной скважины глубиной 20м. Исходными данными являются значения температуры грунта по глубине скважины, полученные из термисторов. Здесь область с размерностью 20м. разбивается неравномерно на 10 элементов. В табл.1.2 приведены значения коэффициентов теплопроводностей по глубинам, найденные как решения трансцендентного уравнения (6) с точностью $\varepsilon = 0.002$. Как видно из табл.3.2 значения коэффициентов теплопроводностей до глубины 7.53м. постоянны и равны 0.2765, а от 7.53м. до 20м. также постоянны и равны 4.402. В табл.3.3 приведены значения коэффициентов теплообмена на стыках элементов, вычисленные по формуле (13).

Таблица 3.2.

Значения коэффициентов теплопроводностей

		5.53-	6.53-	7.53-	8.53-	9.53-	11.53-	14.53-
x	4.53-5.53	6.53	7.53	8.53	9.53	11.53	14.53	19.53
a	0,2765501	0,27655	0,27655	4,40155	4,40155	4,40155	4,40155	4,40155

Таблица.3.3

Значения коэффициентов теплообмена на стыках элементов

x	4,53	5,53	6,53	7,53	8,53	9,53	11,53	14,53
M[k]	0,53800	-17,852	9,3111	-100,329	-54,0400	5,55461	17,771	5,35878
M1[k]	-0,0721	19,100	52,693	25,18457	3,698798	-25,889	-3,780	-10,966

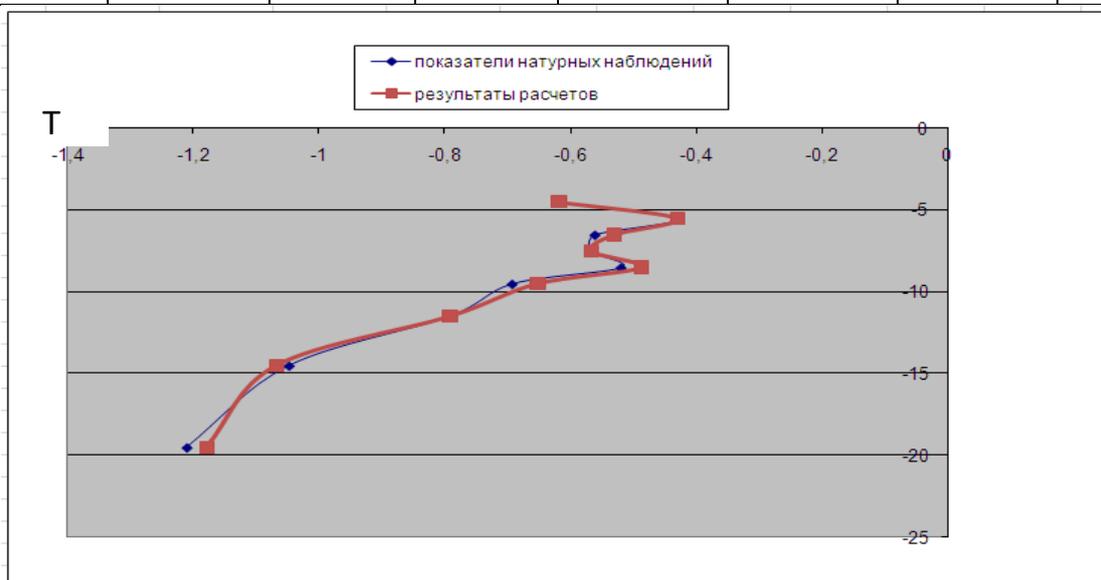


Рис.3.2 Температура грунта

x

Вторая строка табл.3.3 соответствует коэффициентам теплообмена, характеризующий поток тепла, идущий со стороны с дневной поверхности или с дна пруда, а третья строка соответствует коэффициентам теплообмена, характеризующий поток тепла идущей со стороны вечной мерзлоты. Используя найденные теплофизические параметры, определены значения температуры грунта в разные времена и в разных глубинах по формуле (12) и (13). На рис.3.2 показаны графики значения температуры, вычисленные теоретическим способом и данные из натуральных наблюдений. Как видно из графика они почти совпадают. Это подтверждает правильность подхода и алгоритма определения температуры грунта, коэффициентов теплопроводностей и теплообмена.

3.3 Определение коэффициента теплопроводностей и движение фронта таяния мерзлого грунта под основанием пруда, как решение начально-краевой задачи теплопереноса.

Водохранилище наполняется отходами и цианистой водой золоторудной фабрики, расположенная в условиях вечной мерзлоты. Под влиянием плюсовой температуры воды начинается таяния основания пруда. Требуется определить коэффициент температуропроводностей и движение фронта таяния мерзлого грунта под основанием пруда, как решение начально-краевой задачи теплопереноса.

Методика решения. Область решения будем рассматривать как состоящая из двух элементов независимо от размера области. Первый элемент будет зоной талого грунта. Второй элемент - зоной мерзлого грунта. Причем размеры обоих элементов изменятся с течением времени из-за таяния мерзлого грунта под влиянием температуры воды в пруде. Математическая модель процесса таяния мерзлого грунта будет (1)-(4). Построение аналитического решения такой математической модели рассматривалась в предыдущих задачах.

В начале заполнения водоема длина первого элемента (зона таяние) будет маленькой по сравнению со второй. С течением времени этот элемент будет увеличиваться т.е. будет происходить таяния мерзлого грунта под влиянием плюсовой температуры воды в пруде, а второй элемент будет уменьшатся. Подвижная точка (фронт таяния) находится численно, решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (4), методом Рунге-Кутты. Особенность данного подхода заключается в том, что все время используется три заданные постоянные температуры: на основании пруда поддерживается постоянная температура воды T_B , на границе таяния постоянная $T_0 = +0.01C^0$, которая двигается вместе с фронтом таяния и на конце глубины L за которой поддерживается постоянная минусовая температура (вечная мерзлота) $T_1 = -1.86C^0$. Используя данные температуры в каждые моменты времени как начальное условие на каждом элементе численно находятся коэффициенты температуропроводностей как решение трансцендентного уравнения (6)

$$N_i^1(x, t, a) * T_B + N_j^1(x, t, a) * T_0 = T^*, \quad N_i^2(x, t, a) * T_0 + N_j^2(x, t, a) * T_1 = T^{**},$$

где T^* , T^{**} средние значения температуры в середине каждого элемента. Результаты исследований. Данный алгоритм апробирован на конкретном примере, предполагая температуру воды на дне пруде хвостохранилища постоянной равной $+4C^0$, $+6C^0$, $+8C^0$, $+10C^0$ на период одного года произведены расчеты согласно изложенного алгоритма. Результаты численного эксперимента приведены на рис.3.3 Как видно из рис 3.3 при температуре воды $+4C^0$ в течении года глубина таяния достигает 3,65м., а при $+6C^0$ достигает 4,48м.

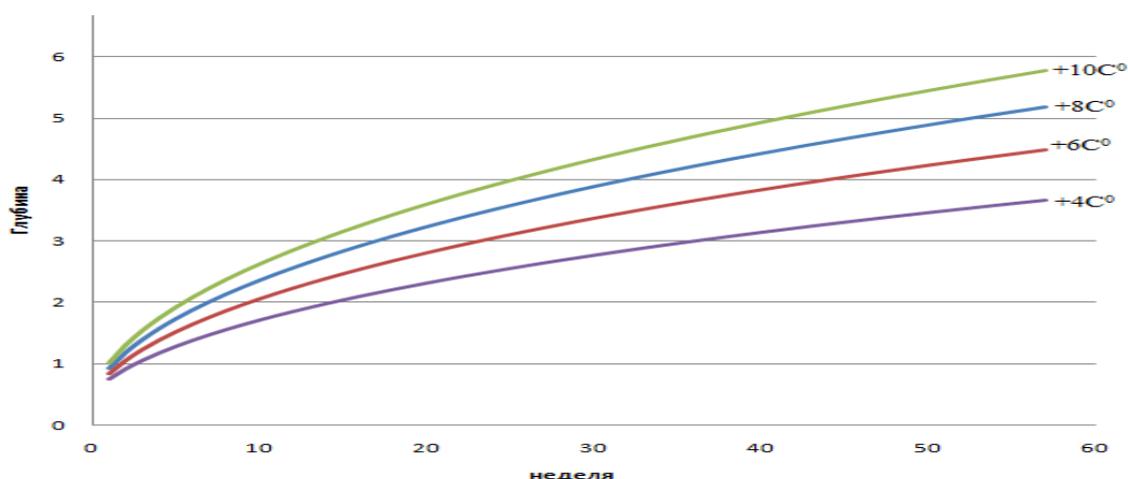


Рис. 3.3 Глубина таяния основание хвостохранилища в зависимости температуры воды.

Полученные результаты согласуются с данными полученными в работах (Назаров Л.А., Назарова Л.А.(2015), [55,59] Востриков В.М.(2015), что подтверждает достоверность алгоритма реализации математической модели предложенным подходом.

3.4 Определение глубины таяния мерзлого грунта, расположенные в условиях вечной мерзлоты под влиянием температуры окружающей среды за теплый период года с идентификацией коэффициента температуропроводности.

Задачи изучения таяния вечной мерзлоты под влиянием температуры окружающей среды является одним из важных вопросов изучения устойчивости гидротехнических сооружений, расположенные в условиях вечной мерзлоты, а также изучения вопросов потепления климата. В качестве

примера рассматриваются грунты, расположенные на уровне 4000м. в условиях вечной мерзлоты. Значения температуры окружающей среды использовались из данных наблюдений метеостанции Кумтора. Теплый период длится почти до пяти месяцев начиная с мая до сентября.

Методика решения. На основе математической модели теплопроводности в талых и мерзлых грунтах (1)–(4) согласно вышеизложенному алгоритму определяется значения коэффициентов температуропроводностей из начального условия модели (2). Затем строится аналитическое решение задачи теплопроводности отдельно для зоны таяния и для мерзлой зоны (6). Используя эти аналитические решения, численно находятся глубина таяния мерзлого грунта под влиянием температуры окружающей среды из условия сопряжения температурных потоков на границе зоны талого и мерзлого грунта решением уравнение Стефана (4).

Результаты исследований. Данный алгоритм апробирован на примере, имитирующее условие Кумтора т.е. использована температура окружающей среды за теплый период 2011 года, грунт глубиной 20м. и за которой начинается вечная мерзлота, температура которой равна -1.86C^0 , теплофизические характеристики λ_T , λ_M , w , q_0 принималась предположительно равной $\lambda_T = 1.21\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, $\lambda_M = 1.54\text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, $w = 0.11$, $q_0 = 650\text{Вт}/\text{м}^2$. В результате расчета на каждом шаге времени путем идентификации аналитического решения с натурными данными определялись коэффициенты температуропроводностей, для талого и мерзлого грунта. Они почти не изменялись с течением времени и равнялись $a = 1.893\text{ м}^2/\text{ч}$. Результаты расчета по определению глубины таяния вечной мерзлоты под влиянием температуры окружающей среды за теплый период года представлены на рис. 3. 4



Рис. 3.4 Глубина таяние вечной мерзлоты за теплый период года.

Как видно из рис. 3.4 глубина таяния в течении 5 месяцев с мая по сентябрь месяцы глубина таяния мерзлого грунта достигает до 1.8м. Натурные наблюдения за глубиной таяния на территории Кумтора колеблется в пределах 1.78 м. до 2.6 м., что подтверждает достоверность полученных результатов, а также предложенного подхода.

3.5 Процесс таяния мерзлого грунта под основанием водоема глубиной Н под влиянием фильтрации и температуры воды.

Температурно-фильтрационный процесс под основанием водоема рассматривался как одномерный процесс.

Математическая модель. Считая, что температура грунта и температура фильтрующейся воды одинаковыми, т.е. принимается модель Фурье-Кирхгофа (Фельдман...Томирдиаро..). В зоне талого грунта учитывается фильтрация воды из водоема, а в зоне мерзлого грунта фильтрация не учитывается. Математическая модель такого процесса имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_T}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2} - v \frac{\partial T_T}{\partial x}, 0 \leq x \leq h. \\ \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \leq x \leq L \end{aligned} \right\} \quad (3.5.1) \quad (3.5.2)$$

Начально-граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} t = 0; \quad x \in [0, L]; \quad T_M &= f_1(x). \\ x=0, \quad T_T &= T_B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=h, \quad T_T = T_M = T_0 \\ x=L, \quad T_M = T_1, \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

где соответственно – T_B, T_0, T_1 температура воды в пруде, температура таяния мерзлого грунта и температура вечной мерзлоты. Условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта описывается уравнением:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x} \right]_{x=h} = q_0 w \gamma \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.5.4)$$

где T_T – температура зоны талого грунта, T_M - температура мерзлого грунта, являющиеся решением начально-краевой задачи (3.5.1)-(3.5.2); T_B - температура дна пруда; $a_T, a_M, \lambda_T, \lambda_M$ - коэффициенты теплопроводности и теплопроводности грунта в талых и мерзлых грунтах; h - глубина таяния; w - количество льда в грунте; q_0 - теплота плавления льда, γ - удельный вес грунта, v – скорость фильтрации воды из водоема.

Методика решения. Строится аналитико-частное решение начально-краевой задачи (3.5.1)-(3.5.3), удовлетворяющее начальным и граничным условиям задачи отдельно для талой зоны и для мерзлой зоны. В качестве базисных функций для талой зоны используются линейно-независимые частные решения уравнения теплопроводности (3.5.1), а для зоны мерзлого грунта уравнении (3.5.2). Для построение аналитического решения для талой зоны с учетом фильтрации из водоема используется преобразование вида

$$T(x, t, a) = e^{\frac{v(x-vt)}{2a}} U(x, t, a), \quad (3.5.5)$$

которое преобразует уравнение (3.5.1) к виду

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (3.5.6)$$

где $U(x, t, a)$ – новая неизвестная функция. Она находится как решение соответствующей начально-краевой задачи через преобразование (3.5.5), а – коэффициент теплопроводности. Тогда аналитическое решение начально-краевой задачи (3.5.1)-(3.5.3) запишется

$$T_T(x, t, a) = e^{\frac{v(x-vt)}{2a}} (N_i(x, t, a)U_i + N_j(x, t, a)U_j), \quad (3.5.7)$$

$$\text{где } U_i = T_i e^{\frac{-v_i(x_i-v_it)}{2a}}, U_j = T_j e^{\frac{-v_j(x_j-v_jt)}{2a}}.$$

Начальная область мерзлого грунта длиной L разбивается на два элемента. Первый элемент начинается от дневной поверхности до фронта таяния, которая является неизвестной и подвижной. Второй элемент начинается от фронта таяния до вечной мерзлоты глубины L в которой отсутствует фильтрация воды. С течением времени размеры элементов будут изменяться т.е. происходят таяние мерзлого грунта под влиянием температуры и фильтрации воды из водоема. Подвижная граница (фронт таяния) находится численно решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (3.5.4) методом Рунге-Кутты. Шаг по времени принималась равной одной сутки. Расчеты проводились на период одного года. Температура на дне водоема поддерживается постоянной равной температуры воды, на фронте таяния - постоянная температура равной $+0.01\text{C}^0$ (температура плавления льда), которая двигается вместе с фронтом таяния и на конце глубины L поддерживается постоянная минусовая температура (вечная мерзлота) -1.86C^0 . Используя данные температуры в каждые моменты времени на каждом элементе численно находятся коэффициенты температуропроводности как решение трансцендентных уравнений

$$N_i^{(2)}(x, t, b) * T_B + N_j^{(2)}(x, t, b) * T_0 = T^*,$$

$$e^{\frac{v(x-vt)}{2a}} (N_i^{(1)}(x, t, a) * U_0 + N_j^{(1)}(x, t, a) * U_1) = T^{**},$$

где T^* , T^{**} средние значения температуры в середине каждого элемента.

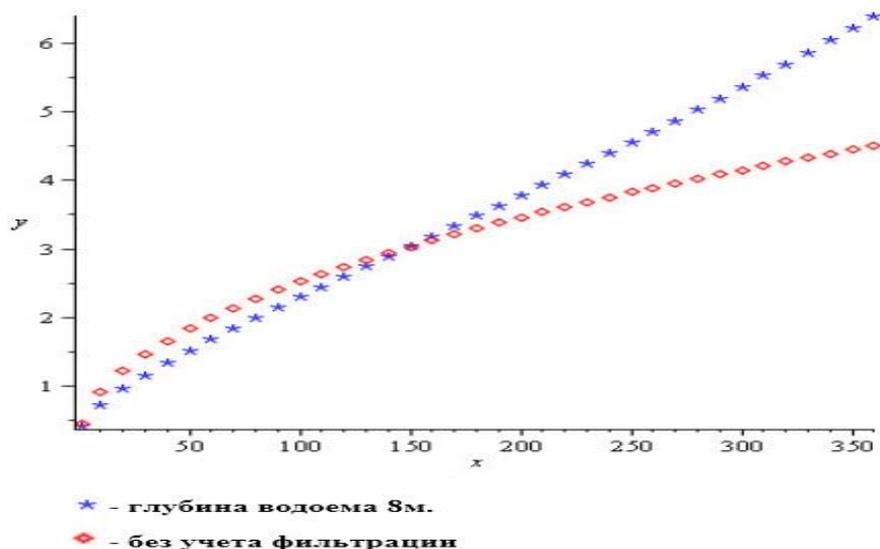
Для иллюстрации влияния фильтрации воды из водоема на глубину таяния основание пруда рассмотрено различные варианты решение задачи: без учета и с учетом фильтрации из водоема.

Вариант 1. Процесс протаивания под основанием водоема рассматривается без учета фильтрации воды из водоема т.е. уровень воды в водоеме не учитывалась, а учитывалась только ее температура. Исходные данные считались равными. $\lambda_T = 1.24\text{Вт}/(\text{мК})$, $\lambda_M = 1.54\text{Вт}/(\text{мК})$. $L = 21\text{м}$.

Температура воды на дне водоема считалась равной $+6^{\circ}\text{C}$. Результаты показывают, что в течении одного года глубина протаивания достигает 4.51 м.

Вариант 2. Процесс протаивание под основанием водоема рассматривается с учетом глубины водоема равной $H=8\text{m}$. и фильтрации воды из водоема. Коэффициент фильтрации считалась равным $k_f=0.0312$, пористость $m_p=0.22$. Скорость фильтрации вычислялась по формуле Дарси. В этом случае глубина протаивание в течении года достигла до 6.45м. График результатов расчета приведены на рис.3.5.1

Вариант 3. Рассматривается этот же случай, но глубина воды водоема на два метра больше, т.е. глубина считалась равной 10м. В этом случае скорость фильтрации будет больше чем в предыдущем варианте и глубина протаивание достигает за один год до 8.58м. Увеличение уровня воды в пруде на два метра с учетом фильтрации приводит к увеличению зоны таяния мерзлого грунта на 2.13м.



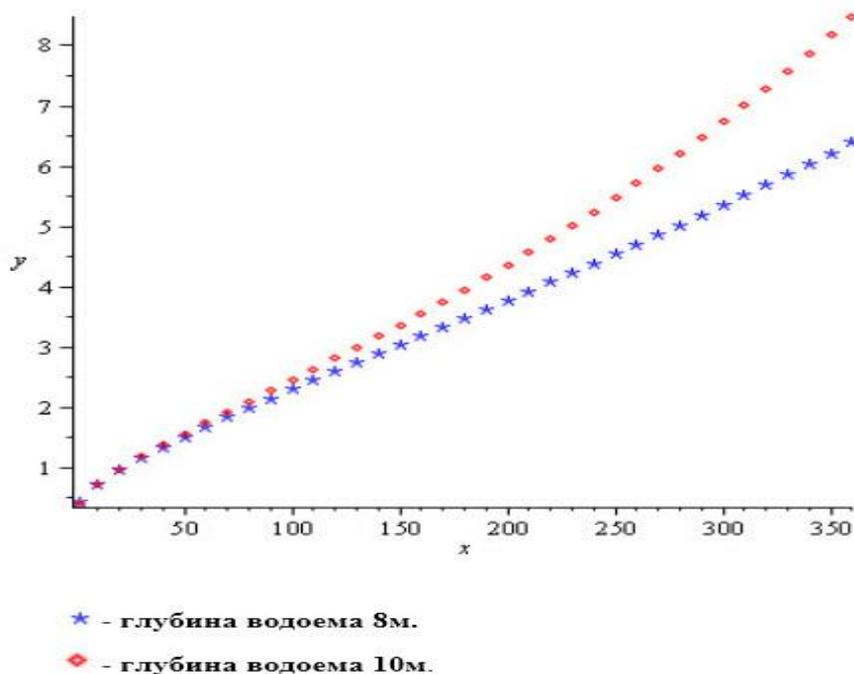


Рис. 3.5.1. Глубина таяния основание хвостохранилища в зависимости от уровня воды в пруде.

Из вычислительного эксперимента следует, что глубина протаивания под основанием водоема значительно зависит от уровня воды в пруде или от скорости фильтрации воды из водоема т.е. чем выше уровень воды в водоеме, тем больше размеры зоны таяния мерзлого грунта под основанием. При эксплуатации хвостохранилища и в целях экологической безопасности окружающей среды следует уделить внимание уровню воды в водоеме в случае фильтрации под основанием хвостохранилища.

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 3

1. Разработан аналитико-численный подход, сочетающий преимущества аналитического метода и метода конечных элементов (МКЭ).
2. В отличие от классического МКЭ, где используются произвольные базисные функции, в предлагаемом методе применяются линейно-независимые частные решения уравнения теплопроводности в качестве базисных функций.

3. Для каждого конечного элемента формируется аналитическое решение, удовлетворяющее начально-краевым условиям, что повышает точность и физическую обоснованность результатов.
4. На основе этого аналитического решения и начального условия задачи определяется коэффициент температуропроводности как решение трансцендентного уравнения.
5. Предложенный подход позволяет повысить точность определения тепловых параметров материала и сократить численные погрешности при решении задач теплопроводности.

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ И ОЦЕНКА АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПЕРЕНОСА.

4.1 Математическая модель конвективного теплопереноса в мерзлых грунтах и аналитические решения.

Рассматривается математическая модель таяния мерзлого грунта в отличие от математической модели, рассмотренной во второй главе, где процесс таяния мерзлого грунта моделируется отдельно для талой зоны в виде начально-краевой задачи и отдельно для мерзлой зоны в виде (1) - (3). Известная

подвижная граница находится как решение уравнение Стефана (4). В данной главе процесс таяния мерзлого грунта моделируется одним уравнением с начально-краевыми условиями. Неизвестная подвижная граница находится местоположением нулевой изотермы. Такой подход позволяет эффективно находить время перехода в стационарный режим, анализировать степень влияние начального и граничных условий на процесс таяния.

4.2 Процесс таяния мерзлого грунта рассматривается как задача переноса тепла в одной области под влиянием изменения вида граничного и начального условия.

Постановка задачи. Фронт таяния находится местоположением нулевой изотермы. Математически задача формулируется следующими уравнениями в частных производных:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

и граничными условиями

$$T(0, t) = T_1, \quad T(L, t) = T_2 \quad (4.2)$$

Начальное условие температуры грунта под основанием строится на основе данных наблюдений.

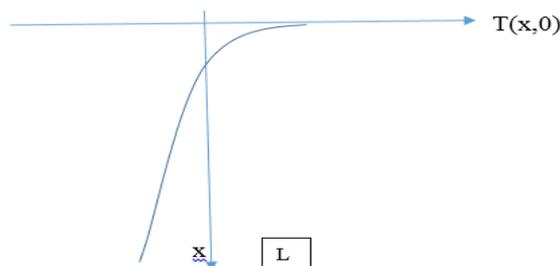


Рис.4.1. Начальное условие температуры

Аналитически начальное условие аппроксимировалось в виде одной ветви параболы

$$T(x,0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c \quad (4.3)$$

Постоянные коэффициенты a , b , c – определяются из данных наблюдений температуры грунта методом наименьших квадратов.

Аналитическое решение задачи строится в виде двух слагаемых

$$T(x,t) = T_{CT}(x) + T_{HC}(x,t) \quad (4.4)$$

где $T_{CT}(x)$ - стационарная часть решения, которая строится на основе неоднородных граничных условий, $T_{HC}(x,t)$ - нестационарная часть решения. Она строится на основе начального и однородных граничных условий и имеют вид:

$$T_{CT}(X) = Ax + B = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1, \quad T_{HC}(X, t) = \sum_i^n b_n e^{-\frac{\pi n^2}{L} a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \overline{\varphi(x)} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx =$$

$$= \frac{2a}{L} \left[-\frac{L^3}{\pi n} (-1)^n + 2 \frac{L^3}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right] +$$

$$+ \frac{2}{L} (b - A) \left[-\frac{L^2}{\pi n} (-1)^n \right] + \frac{2}{L} (c - B) - \left[\frac{L}{\pi n} ((-1)^n - 1) \right].$$

$$\overline{\varphi(x)} = ax^2 + bx + c - (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1,$$

Аналитическое решение данной краевой задачи удовлетворяющие начально-краевым условиям запишется

$$T(x,t) = T_{cm}(x) + T_{HC}(x,t) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1 + \sum_i^n b_n e^{-\left(\frac{\pi * i}{L}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi * i}{L} x\right) \quad (4.5)$$

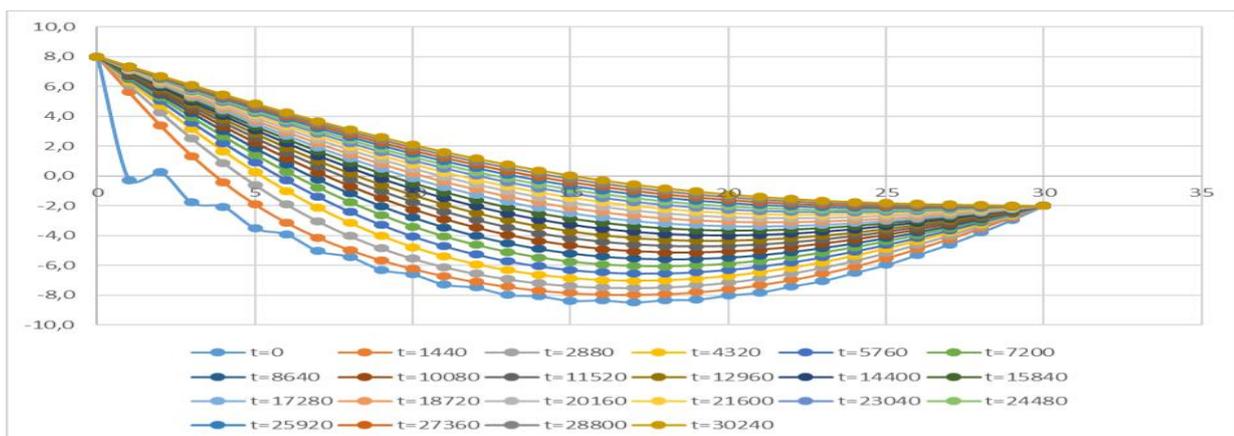
С помощью аналитического решения (4.5) математической модели (4.1) - (4.3) рассмотрены следующие задачи:

ЗАДАЧА 4.1. Начальное условие температуры грунта под основанием водоема имели значение в точках 1. $x_1=0\text{m.}$, $T_1^0=+2^0\text{C.}$ 2. $x_2=1.7\text{m.}$, $T_0^0=0^0\text{C.}$ 3. $x_3=L=30\text{m.}$, $T_2^0 = -2^0\text{C.}$ Грунт под основанием водоема считается песчанником, коэффициент температуропроводности, которого равен $0.004283^2 \text{ м}^2/\text{час.}$ Затем водоем заполняется водой, температура которого равна $T_1=+8^0\text{C.}$ На глубине $L=30 \text{ m.}$ находится вечная мерзлота, температура которой равна $T_2 = -2^0\text{C.}$ Требуется определить, через какое время процесс таяния мерзлого грунта остановится и перейдет в стационарный режим, а также определить предельную глубину таяния мерзлого грунта за это время.

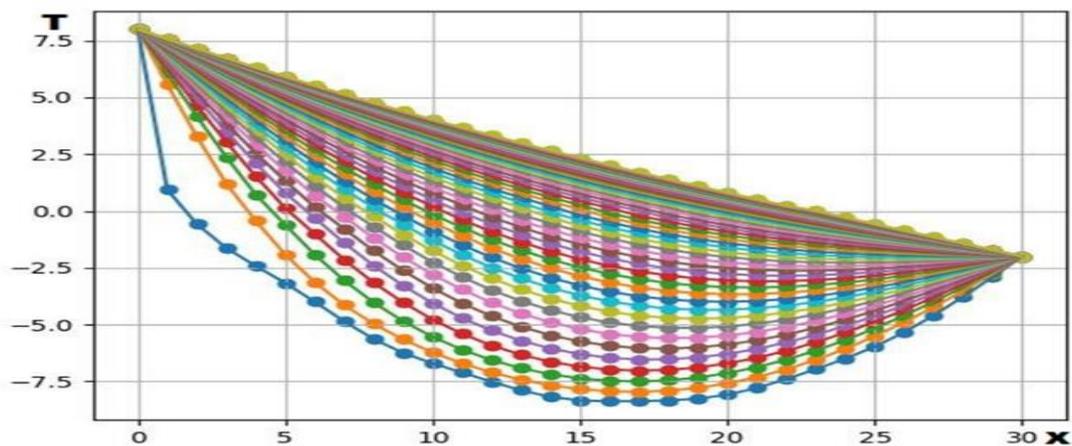
Для решения данной задачи из условия сходимости ряда (4.5) с точностью 0.0003 находится количество членов и она равнялась $n = 25$. Начальное условие аппроксимировалось одной ветвью параболы с помощью заданных значений температуры в трех точках

$$\varphi(x) = 0.036859737x^2 - 1.2391325435x + 2$$

Результаты расчета, проведенные с помощью аналитического решения (4.5), приведены на рис.4.2 а), б). На рис. 4.2 а) показано, когда процесс таяния еще не установился за 3.5 года и за это время глубина таяния достигла 15 метров.



а)



б)

Рис.4.2 Значения температуры грунта под основанием водоема в различные моменты времени

Из графика на рис. 4.2 б) видно, что для песчаника теплоперенос устанавливается после 70080 часов, что примерно соответствует 8.06 годам. За

это время процесс таяния доходит до глубины 23.2 метра. Это указывает на то, что нестационарный процесс переходит к стационарному процессу примерно через 8.06 лет и затем не изменяется, что соответствует физическим свойствам процесса.

Затем приводится численный анализ решений, позволяющие определять степень влияния на глубину таяния мерзлого грунта температуры воды в пруду. На Рис.4.3 показаны результаты расчета для случая, когда температура воды в водоеме $+6^{\circ}\text{C}$. На Рис. 4.3 показаны результаты расчета, когда температура воды в водоеме равнялась $+10^{\circ}\text{C}$. Как видно из результатов расчета за время, равное 30240 часов или примерно 3.5 года, глубина таяния при температуре $+6^{\circ}\text{C}$ доходит до 13 метров, при $+8^{\circ}\text{C}$ доходит до 15м., при $+10^{\circ}\text{C}$ доходит до 17 метров. Отсюда следует, что изменение температуры воды на два градуса влечет изменение глубины таяния на 2 метра за 3.5 года.

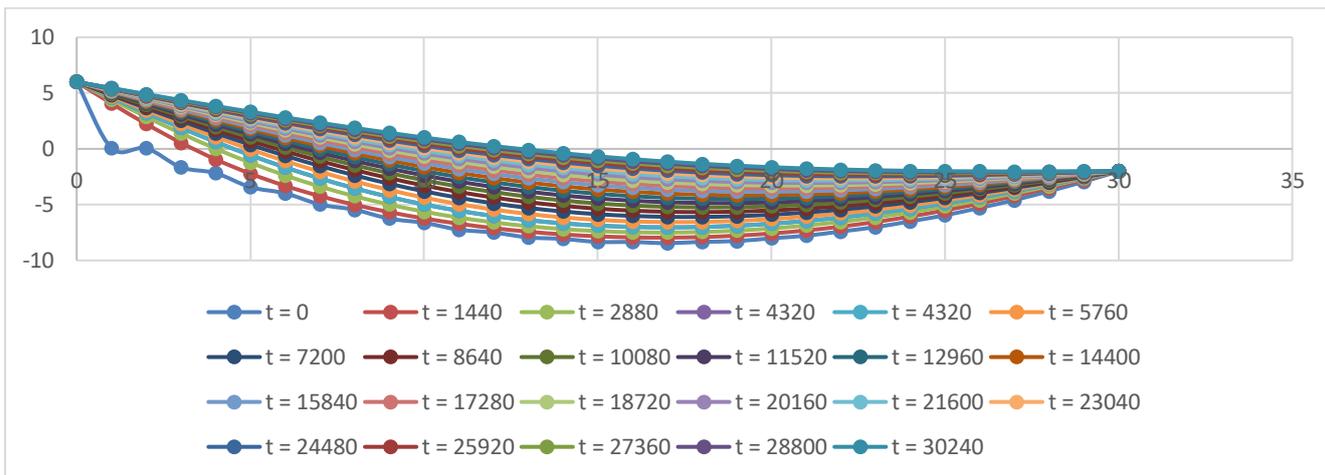


Рис. 4.3 Значения температуры в разные моменты времени по глубине

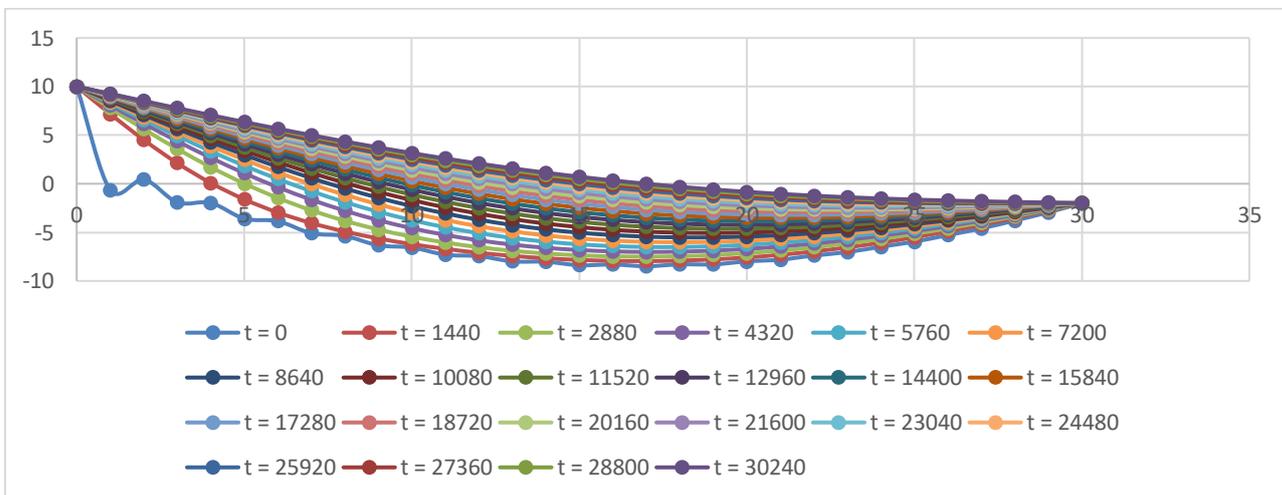


Рис. 4.4 Значения температуры в разные моменты времени по глубине

В следующей задаче рассматривается влияние изменения вида граничного условия на процесс таяния мерзлого грунта. На нижней границе ставится условие теплообмена т.е., граничное условие третьего рода, характеризующее холодный поток, идущий со стороны вечной мерзлоты.

4.3 Влияние изменения вида граничного условия на процесс таяния мерзлого грунта. На нижней границе ставится условие теплообмена т.е., граничное условие третьего рода, характеризующее холодный поток, идущий со стороны вечной мерзлоты.

Задача 4.2. Математическая модель такой задачи имеет вид:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} T(0,t) = g_1(t) \\ T_x(L,t) + hT(L,t) = g_2(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

$$T(x,0) = \varphi(x),$$

где $g_1(t)$, $g_2(t)$ - заданные значения температуры на концах области.

Аналитическое решение строится аналогично как в предыдущем случае в виде двух слагаемых.

$$T(x,t) = S(x,t) + U(x,t) = A(t) \left(1 - \frac{x}{L}\right) + B(t) \left(\frac{x}{L}\right) + U(x,t), \quad (4.8)$$

где $A(t)$, $B(t)$ находятся из граничных условий

$$A(t) = T_B, \quad B(t) = \frac{T_B + LhT_{\text{гр}}^M}{Lh+1} \quad (4.9)$$

Неизвестное слагаемое $U(x,t)$ строится как решение неоднородного уравнения с однородными граничными условиями

$$U_t(x,t) = a^2 U_{xx} - S_t(x,t) \quad (4.10)$$

$$U(0,t) = 0$$

$$U_x(L,t) + hU(L,t) = 0 \quad (4.11)$$

и начальным условием вида

$$U(x, 0) = \varphi(x) - S(x, 0) = ax^2 + bx + c - T_B \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \frac{T_B + LhT_{гр}}{Lh+1} \left(\frac{x}{L}\right) \quad (4.12)$$

Аналитическое решение математической модели (4.11) – (4.13) имеет вид

$$U(x, t) = \sum_i^n b_i e^{-\lambda_i^2 a^2 t} \sin(\lambda_i x),$$

где λ_i определяется как решение трансцендентного уравнения

$$tg(L * \lambda_i) = -\frac{\lambda_i}{h}, \quad (4.13)$$

Общее аналитическое решение будет иметь вид

$$T(x, t) = T_B \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{T_B + LhT_{гр}}{Lh+1} \left(\frac{x}{L}\right) + \sum_i^n b_i e^{-\lambda_i^2 a^2 t} \sin(\lambda_i x) \quad (4.14)$$

Результаты расчета когда температура воды в водоеме равна $+10^0$ С с учетом теплообмена на нижней границе приведено на Рис.4.6.

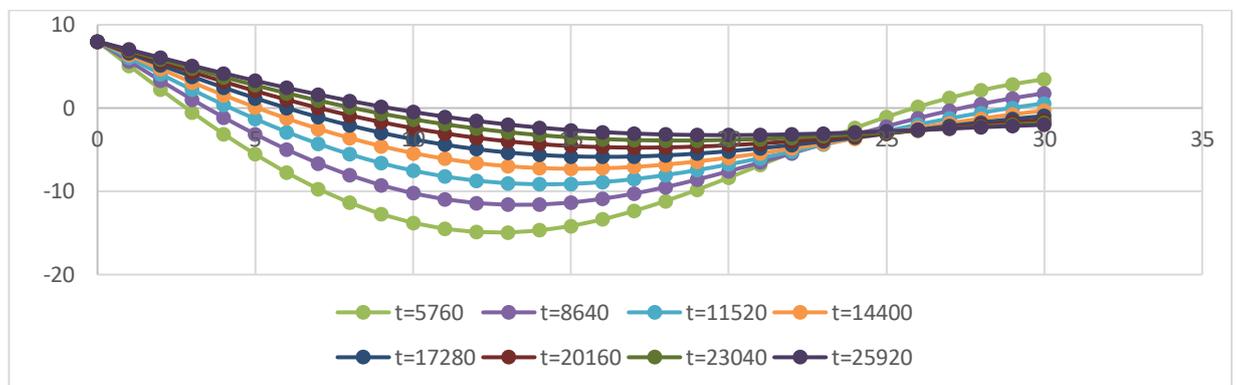


Рис. 4.4 Значения температуры грунта в разные моменты времени в случае, когда на нижней границе принимается граничное условие третьего рода

Точность результатов зависит от точности задания величины холодного потока, идущего со стороны вечной мерзлоты. Затруднительность знание точного значения коэффициента теплообмена позволяет получить приближенно-качественный результат. Как видно из графика, учет холодного потока из нижней границы значительно влияет на процесс таяния мерзлого грунта. По графику можно судить, что примерно за 25920 часов или за 3 года глубина таяния доходит до 10 м. Тогда как при решении этой же задачи при фиксированном значении температуры на нижней границе равной -2^0 С без учета теплообмена на нижней границе за 25920 часов или за 3 года глубина таяния доходила почти до 15 м. Отсюда следует, учет сильного холодного потока, идущего со стороны вечной мерзлоты значительно влияет на глубину

таяния мерзлого грунта, т.е., значительно уменьшается глубина таяния и время установления нестационарного процесса. Неизвестное значение коэффициента теплообмена на нижней границе, приводит к приближенным результатам. Поэтому при реальных расчетах рекомендуется применять граничное условие первого рода на нижней границе, когда задается фиксированное значение температуры грунта, т.к. она поддается измерению.

4.4 Математическая модель процесса таяния мерзлого грунта под основанием водоема с учетом теплообмена скелета грунта в зоне талого грунта, а в зоне мерзлого грунта не учитывается.

Задача 4.3. Математическая модель такого процесса имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta T(x, t), \quad (4.15)$$

здесь β – коэффициент теплообмена. В зоне талого грунта, где $T(x, t) \geq 0$, $\beta \neq 0$ и в зоне мерзлого грунта, где $T(x, t) < 0$, $\beta = 0$. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_1; \\ T(L, t) &= T_2; \end{aligned} \quad (4.16)$$

Начальное условие данного процесса принимается аналогично предыдущему варианту задачи

$$T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c; \quad (4.17)$$

Аналитическое решение данной математической модели строится аналогично как в предыдущих случаях.

$$T(x, t) = S(x) + \omega(x, t); \quad (4.18)$$

где $S(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1$ – стационарная часть решения, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям (4.18). $\omega(x, t)$ – нестационарная часть решения. Оно строится как решение следующей начально - краевой задачи.

$$\omega_t = \alpha^2 \omega_{xx} - \beta(S(x) + \omega(x, t)) \quad (4.19)$$

$$\omega(0, t) = 0, \omega(L, t) = 0 \quad (4.20)$$

$$\omega(x, 0) = ax^2 + bx + c - S(x) \quad (4.21)$$

Решение данной задачи ищется в виде:

$$\omega(x, t) = \sum_{i=1}^n b_n(t) \sin \frac{\pi n}{L} x, \quad (4.22)$$

где $b_n(t)$ – неизвестные коэффициенты разложения. Оно находится путем разложения в ряд Фурье стационарной части решения. Удовлетворяя начальному условию (4.21) получаем общее аналитическое решение(4.19)-(4.21)

$$T(x, t) = S(x) + \omega(x, t) = \left[(T_2 - T_1) \frac{L}{L} + T_1 = T_2 \right] + \sum_{i=1}^n \left[-\frac{2\beta}{\pi n} \frac{(T_1 - T_2 (-1)^n)}{(\beta + (\frac{\pi n}{L} \alpha)^2)} + (A_i + C_i e^{((\frac{\pi i}{L} \alpha)^2 + \beta)t}) \right] \sin \frac{\pi i}{L} x;$$

$$A_i = 2\beta(T_1 + 2.0)(-1)^i / ((\pi i / L)^3 (T_2 - T_1) + \beta),$$

$$C_i = (-2aL^2 - 2L(b - (T_2 - T_1))) / (\pi i (-1)^i + 4aL^2 (\pi i)). \quad (4.22)$$

На Рис.2.7. показаны результаты расчета предыдущего примера, полученные аналитическим решением данной модели (4.22), учитывающая теплообмен в зоне талого грунта. Значение коэффициента теплообмена принималось очень маленьким (0.0000043), т.к., при долгосрочном процессе значения температуры грунта и воды почти уравниваются. В этом случае теплообмен не будет происходить из-за одинаковой температуры разных сред. Как видно из графика процесс таяния под влиянием начального условия (4.17) и значения температуры воды в водоеме равной +8⁰С с учетом теплообмена переходит из нестационарного процесса в стационарный процесс через 70080 часов или 8.06 лет и глубина таяния доходит до 23.20 м.

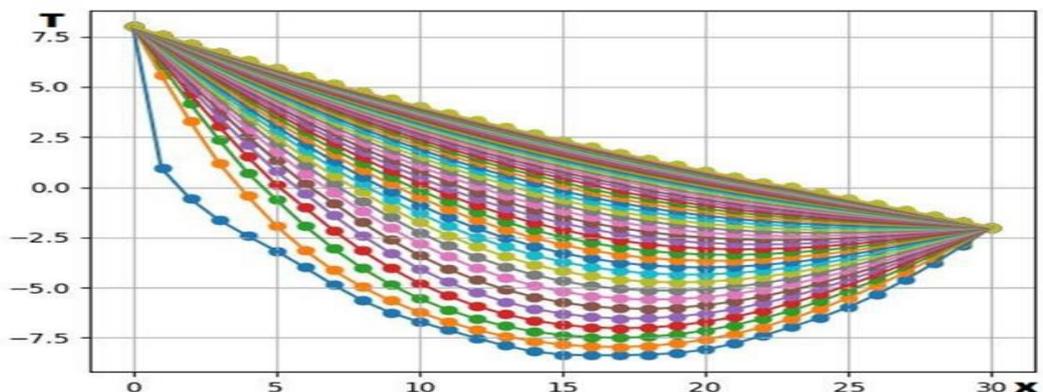


Рис.4.5. Ход изменения температуры грунта до установления процесса

На рис. 4.5 показано численное сравнение результатов математической модели с учетом и без учета теплообмена положения нулевой изотермы. Она находится как решение трансцендентного уравнения (4.22) при нулевом значении температуры грунта. Как видно из графика, положение нулевой изотермы постепенно устанавливается и переходит в неизменное состояние через 8.06 года при температуре воды в водоеме равной $+8^{\circ}\text{C}$ для грунта песчанника.

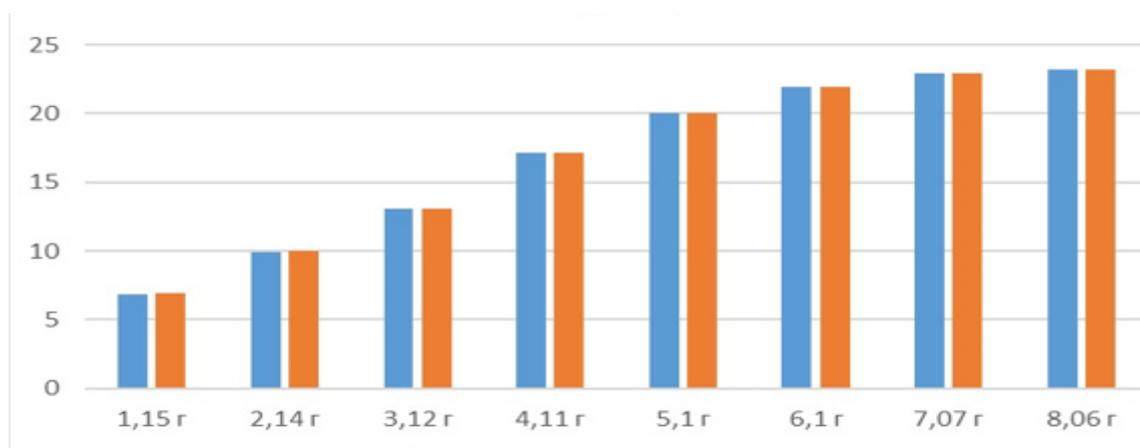


Рис.4.6. Положение нулевой изотермы с учетом и без учета теплообмена

Отсюда следует, что при долгосрочном прогнозировании процесса переноса тепла в мерзлых грунтах, процесс теплообмена между грунтом и талой водой можно пренебречь из-за уравнивания их температур. В таких случаях значение коэффициента теплообмена будет очень маленьким и влияние члена, характеризующего теплообмен в математической модели (4.15) - (4.17), можно пренебречь. Тогда при долгосрочном прогнозировании процесса переноса тепла в мерзлых грунтах можно использовать более простую математическую модель (4.1)-(4.3), в которой нет параметра теплообмена.

4.5 Численный эксперимент на основе аналитического решения математической модели для выявления влияния или не влияния начального условия на глубину таяния мерзлого грунта под влиянием температуры воды в водоеме.

Задача 4.4. Оно производится на основе анализа результатов расчета долгосрочного прогноза по определению глубины таяния. Математически оно производится формированием начальных условий, характеризующих начальное состояние среды перед началом эксплуатации сооружений, имитирующее зимнее, раннее весеннее и весеннее времена года. Схематически разные виды начального условия приведены на Рис.4.7.

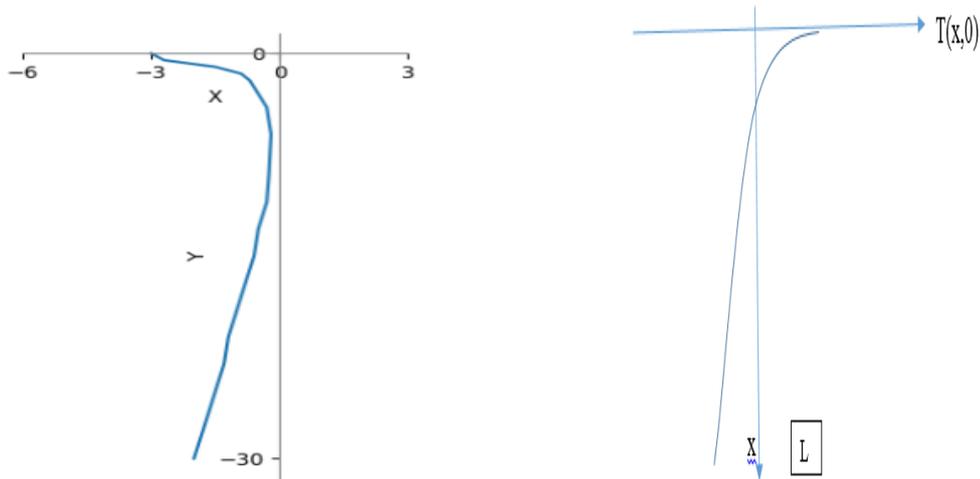


Рис.4.7 Виды начальных условий

Для весеннего случая начальное состояние грунта на дневной поверхности считалось равным $+2^{\circ}\text{C}$, нулевое значение температуры грунта находилось на глубине 1.7 м., вечная мерзлота начинается с глубины 30 м. и температура в этой точке равна -2°C . Для зимнего случая начальная температура грунта на дневной поверхности считалась равной -3°C . Грунт под основанием является песчанником с коэффициентом теплопроводности равным $0.0043^2 \text{ м}^2/\text{час}$. Аналитические выражения начальных условий аппроксимировались одной ветвью параболы. Коэффициенты параболы определялись методом наименьших квадратов на базе 10 точек, в которых заданы значения температуры.

$$T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0.0369x^2 - 1.2392x + 2,0 \quad (4.23)$$

$$T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0.01033x^2 - 0.3682x + 2.0 \quad (4.24)$$

$$T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = -0.0084x^2 - 0.2392x - 1.9762 \quad (4.25)$$

Процесс переноса тепла под основанием водоема начинается при наполнении водоема водой температура, которой равна $+8^{\circ}\text{C}$. Согласно вышеизложенного алгоритма производятся прогнозные расчеты до установления нестационарного процесса переноса тепла в этой области. Результаты расчета приведены на Рис.4.8.

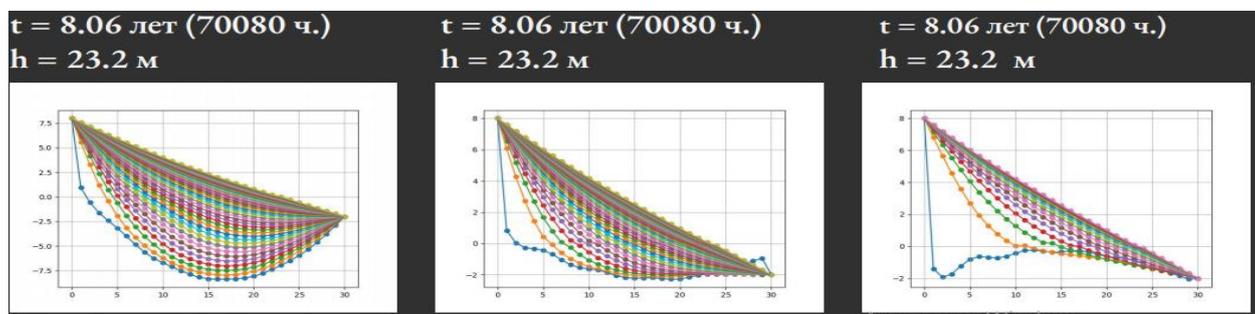


Рис. 4.8. Результаты прогнозных расчетов при разных видах начальных условий

Результаты расчета показывают, что при долгосрочном прогнозировании, нестационарный процесс переходит в стационарный процесс независимо от видов начальных условий в одно и то же время. Глубина таяния за это времени доходит до 23.2 м. Она определяется с местоположением нулевой изотермы как решение трансцендентного уравнения. Движение фронта таяния мерзлого грунта до стационарного процесса показано на Рис. 4.9.

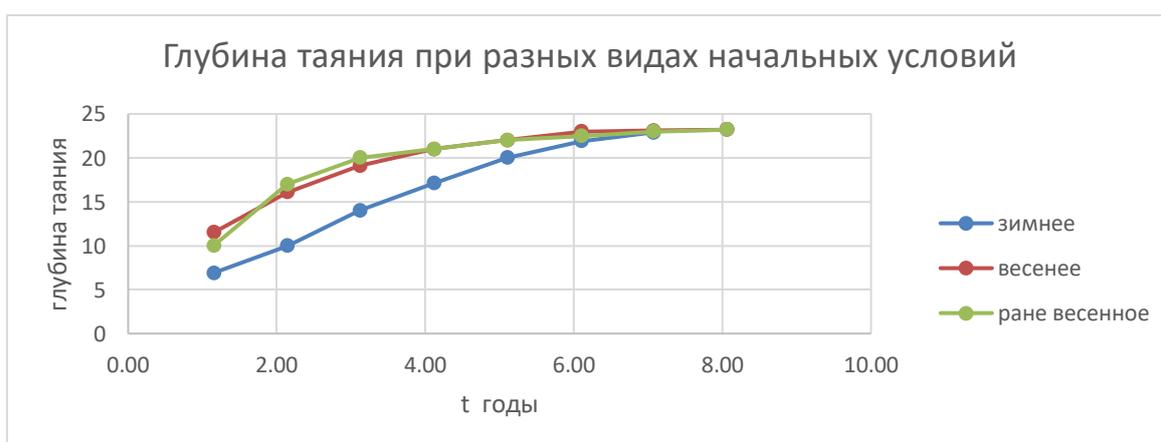


Рис. 4.9. Глубина таяния при разных видах начальных условий

Как видно из графика при долгосрочном прогнозировании глубина таяния не зависит от вида начального условия, а зависит от значения

температуры воды в водоеме. Нестационарный процесс переноса тепла в мерзлом грунте переходит в стационарный процесс через 8.06 лет и глубина таяния доходит до 23.2 м. при температуре воды равной +8° С. Такое утверждение сделали ученые Галкин А. Ф., Курта И. В. (2020). Отсюда следует, что начало эксплуатации сооружений, расположенных в условиях вечной мерзлоты, можно начинать не только зимой, а в любое удобное время.

4.6 Применение двух различных математических моделей для решения задачи таяния мерзлого грунта, сравнение результатов.

Задача 4.5. Здесь решение задачи таяния мерзлого грунта производится двумя разными математическими моделями и производится сравнение результатов. На основе анализа предлагается предложение о выборе модели. С начала рассматривается модель теплопереноса отдельно в зоне талого и в зоне мерзлого грунта с учетом фазовых переходов между двумя зонами. Движение фронта таяния определяется из условия разности тепловых потоков идущих со стороны талого и мерзлого грунта, как решение задачи Стефана.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_T}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq h \\ \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \leq x \leq L \end{aligned} \right\} \quad (4.5.1)$$

с начальными

$$t = 0; \quad x \in [0, h]; \quad T_T = f_1(x), \quad x \in [h, L], \quad T_M = f_2(x). \quad (4.5.2)$$

и граничными условиями:

$$\begin{aligned} x=0, \quad T_T &= T_B, \\ x=h, \quad T_T &= T_M = T_0 \\ x=L, \quad T_M &= T_1. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

где соответственно - T_B , T_0 , T_1 температура воды в водоеме, температура таяния мерзлого грунта и температура вечной мерзлоты. Условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта описывается уравнением Стефана:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x} \right]_{x=h} = q_0 w \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4.5.4)$$

где T_T, T_M – аналитическое решение начально-краевой задачи (4.5.1)-(4.5.3) ; $a_T, a_M, \lambda_T; \lambda_M$ - коэффициенты температуропроводности, теплопроводности талого и мерзлого грунта; h - глубина таяния; w - количество льда в грунте; q_0 - теплота плавления льда. Начальные условия в каждой зоне принимаются аналитически как в предыдущих задачах в виде одной ветви параболы (3).

Аналитическое решение математической модели в зоне талого и мерзлого грунта строится аналогично как и в предыдущих задачах и имеют вид:

$$T_m(x, t) = \frac{8}{h}x + 8 + \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-\left(\frac{\pi n \alpha}{L}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{L} x,$$

$$T_M(x, t) = \frac{2}{L-h}x + \frac{2h}{L-h} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-\left(\frac{\pi n \alpha}{L}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{L} x,$$

где коэффициенты разложения D_n ряда Фурье. Глубина таяния определяется как решение обыкновенной дифференциальной уравнении Стефана (4.5.4) методом Рунге Кутты четвертого порядка. В качестве примера грунта под основанием водоема рассмотрена глина с физико-механическими характеристиками $a_T = 0.003024 \text{ м}^2/\text{сут.}$, $a_M = 0.01296 \text{ м}^2/\text{сут.}$ Результаты расчета уравнении Стефана приведены графически на рис. 7. Как видно из графика для грунта из глины процесс таяние переходит в стационарный режим через 7300 суток или 20.2 лет и глубина таяния доходит до 9.46м. Затем данная задача решена другой математической моделью (4.5.1)-(4.5.3), где глубина таяния находится как местоположения нулевой изотермы. Результаты расчета показаны на рис. 4.10



Рис.4.10 Глубина таяния как решение задачи Стефана

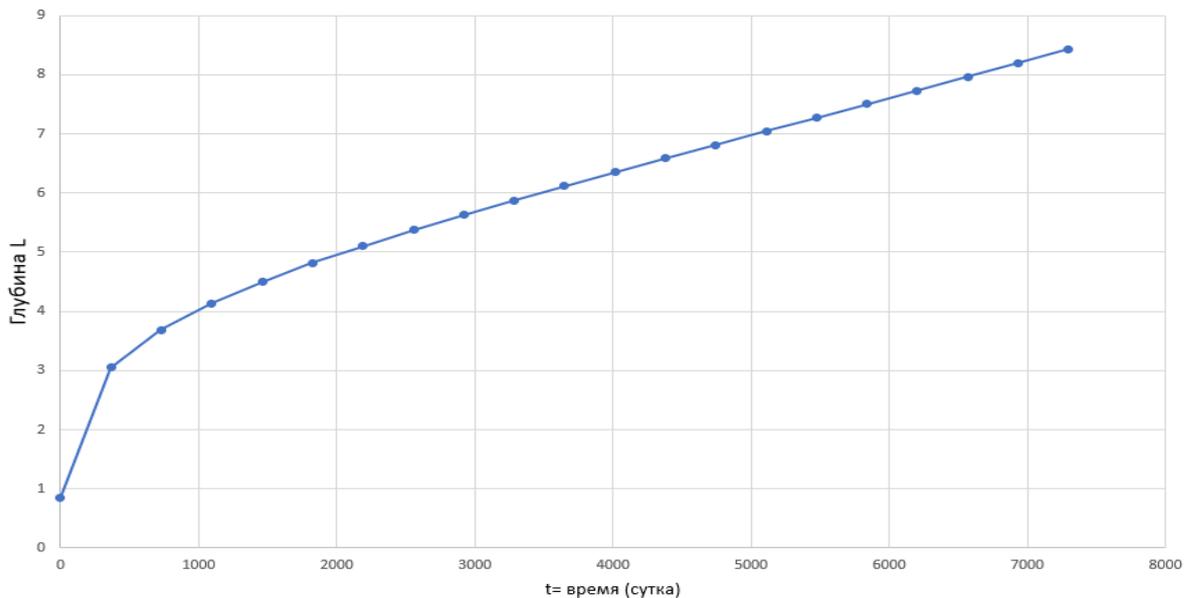


Рис.4.11 Глубина таяния как местоположение нулевой изотермы

Как видно из графика процесс таяния переходит в стационарное состояние через 7300сут. (20.2лет) и глубина таяния доходит до 8,53м. Результаты расчетов двух моделей показывают приблизительно одинаковые результаты. Разница результатов объясняются из-за неточности входных параметров как количество содержание льда, теплота плавления льда, коэффициента теплообмена. По итогам анализа полученных решений одной задачи с разными математическими моделями сформулировано следующее предложение. Удобнее пользоваться моделью кондуктивного теплопереноса

т.к. используется в качестве исходных данных кроме краевых и начального условия, только коэффициент теплопроводности. Известно, что чем больше содержатся параметры в математической модели, тем труднее реализовать из-за неизвестности или из-за значительной погрешности при определении их экспериментальным способом.

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 4

1. В главе представлен подход к моделированию процесса таяния мерзлого грунта с использованием одного уравнения теплопроводности с соответствующими начально-краевыми условиями.
2. Неизвестная подвижная граница таяния определяется как положение нулевой изотермы, что позволяет отслеживать фронт фазового перехода.
3. Предложенный метод эффективно применяется для определения времени перехода системы в стационарный режим.
4. Проведен анализ влияния начальных и граничных условий на динамику процесса таяния, что позволяет лучше понимать и прогнозировать поведение мерзлого грунта при изменении внешних факторов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы состоять в следующем:

1. Предложен аналитико-численный подход реализации математической модели теплопереноса в одномерной постановке.
2. Разработана методика определения температуры грунта, коэффициентов температуропроводностей, теплообмена и глубины таяния с учетом фильтрации воды из водоема на основе аналитико-численного подхода.
3. Определено время перехода в стационарный режим процесса таяния и предельная глубина таяния мерзлого грунта при заданной температуре воды в водоеме.
4. На основе численного анализа при долгосрочном прогнозировании установлено, что начальное условие не влияет на предельную глубину таяния.
5. На основе анализа результатов двух разных математических моделей для одной задачи предложен выбор более простой математической модели.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Предложенный подход и алгоритм могут служить основой для решения прикладных задач, связанных с оценкой температурного режима сооружений, расположенных в зоне вечной мерзлоты, с учётом различных климатических факторов. Это особенно важно при проектировании, строительстве и эксплуатации зданий и сооружений в условиях криолитозоны. Практическая ценность разработанного метода заключается в возможности более точного прогноза глубины сезонного протаивания и оценки термического воздействия на основания сооружений, что способствует повышению надёжности и долговечности инженерных объектов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Биянов Г.Ф. Плотины на вечной мерзлоте [Текст] / Г.Ф. Биянов. — М.: Энергия, 1975. -184 с.
2. Биянов Г.Ф. О температурном режиме и соответствующей классификации плотин на вечной мерзлоте [Текст] / Г.Ф. Биянов // Энергетическое строительство – Москва, 1983, №3 – с.44-46.
3. Бучко Н.А. Применение термосвай для создания мерзлотных мерзлотных противофильтрационных завес [Текст] / Н.А. Бучко // Гидротехническое строительство – Москва, 1975. - с.26-30.
4. Кроник Я.А. Расчет температурного режима плотин из местных материалов методом конечных элементов [Текст] / Я.А. Кроник, Н.И. Демин // Гидротехническое строительство – Москва, 1979. - с.44-48.
5. Кроник Я.А. Криогенные процессы и явления в грунтовых сооружениях и их основаниях [Текст] / Я.А. Кроник // Материалы к III Международной конф. по мерзлотоведению - Новосибирск, 1979. - с.204-213.
6. Кузнецов Г.И. Криогенные процессы и устойчивость хвостохранилищ на многолетнемерзлых основаниях. [Текст] / Г.И. Кузнецов // В кн.:

- Проблемы инженерного мерзлотоведения в гидротехническом строительстве – Москва, 1986. – с. 67-75.
7. Куперман В.Л. Гидротехническое строительство на Севере [Текст] / В.Л. Куперман, Ю.Н. Мызников, Л.Н. Торопов. - М.: Энергоатомиздат, 1987. - 304 с.
 8. Максимов И.А. Расчет промерзания фильтрующего основания грунтовой плотины в районах Крайнего Севера [Текст] / И.А. Максимов // Известия ВНИИГ – Москва, 1981, т. 146. - с. 53-58.
 9. Мызников Ю.Н. Подготовка многолетнемерзлого основания каменноземляной плотины прорезанного подрусловым таликом [Текст] / Ю.Н. Мызников, Б.Е. Полдомасов // Энергетическое строительство - Новосибирск, 1981, №4. - с. 47-53.
 10. Оловин Б.А. Динамика температурного поля плотины Вилюйской ГЭС [Текст] / Б.А. Оловин, Г.А. Медведев. - Новосибирск.: Наука, 1980. - 47с. 169
 11. Павчич М. Противофильтрационные устройства и крепление откосов грунтовых плотин [Текст] / М. Павчич, В.Г. Радченко, М.Б. Гинзбург. - М.: Энергоиздат, 1982, вып.4 -104 с.
 12. Распопин Г.А. Гидротехнические сооружения. Мерзлотные завесы [Текст] / Г.А. Распопин. - Новосибирск: НГАСУ, 1999. -108 с.
 13. Смирнов Е.А. Формирование температурного режима и деформации нижней призмы плотины Вилюйской ГЭС [Текст] / Е.А. Смирнов // Труды координационного совещания по гидротехническому строительству - Ленинград, ВНИИГ. 1975, вып. 101. - с. 110-116.
 14. Трупаков Н.Г. Строительство земляных плотин на вечномерзлых грунтах [Текст] / Н.Г. Трупаков // - М.: Гидротехническое строительство, 1970, №9. - с.8- 11.
 15. Чжан Р.В. Проектирование, строительство и эксплуатация гидротехнических сооружений низкого напора в криолитозоне (на

- примере Якутии) [Текст] / Р.В. Чжан. – Якутск. Изд-во института мерзлотоведения СО РАН, 2000. - 160 с.
16. Фельдман Г.М., Прошкин В.И. Оценка точности существующих методов прогноза температурного режима мерзлых грунтов [Текст] / Г.М. Фельдман, В.И. Прошкин // Материалы по проектированию сложных фундаментов и оснований и по производству изысканий. - М., изд. АН СССР, 1975. Вып. 15.
17. Фельдман Г.М. Прогноз температурного режима грунтов и развития криогенных процессов [Текст] / Г.М. Фельдман. - Новосибирск: Наука, 1977.
18. Томирдиаро С.В. Труды Арктического и Антарктического научно-исследовательского института в 1970 году (Т. 294, с. 172–182).
19. Анискин Н.А. Температурно-фильтрационный режим основания и плотины Курейской ГЭС во втором правобережном понижении [Текст] / Н.А. Анискин // Вестник МГСУ – Москва, 2006, №2 – с.43-52.
20. Анискин Н.А. Температурно-фильтрационный режим пригребневой зоны грунтовой плотины в суровых климатических условиях [Текст] / Н.А. Анискин // Вестник МГСУ – Москва, 2013, №4 – с.129-137.
21. Горохов Е.Н. Регулирование температурно-фильтрационного режима каменно-земляных плотин [Текст] / Е.Н. Горохов, М.Е. Горохов // Сборник материалов Всероссийской конференции "Актуальные проблемы строительной отрасли" – Новосибирск, НГАСУ, 2008 – с. 72-73
22. Горохов Е.Н. Температурный режим каменно земляной плотины в условиях Крайнего Севера с учётом ледообразования в порах наброски [Текст]: 170 автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук / Е.Н. Горохов. - Ленинград, 1986. – 24с.
23. Горохов М.Е. Регулирование температурного режима каменно-земляных плотин путем управления конвекцией воздуха в низовой

- призме [Текст]: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук / М.Е. Горохов. - Нижегородск, 2011. – 24с.
24. Кочубиевская Р.Л. Температурный режим грунтовых противофильтрационных элементов при возведении талых плотин в Северной строительно-климатической зоне [Текст]: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук / Р.Л. Кочубиевская. - Новосибирск, 1983. – 18с.
25. Соболев С.В. К расчету стационарного температурного состояния плотины с охлаждаемым низовым откосом [Текст] / С.В. Соболев // Опыт проектирования и строительства плотин из местных материалов на Крайнем Севере – Ленинград, 1974, вып.89. – с.36-40.
26. Клейн И.С. Численное моделирование оттаивания мерзлых оснований грунтовых плотин под действием фильтрации [Текст] / И.С. Клейн // Инженерное мерзлотоведение в гидротехнике: мат.конф. и совещан. по гидротехнике - Ленинград: Энергоатомиздат, 1989. – с. 97-100.
27. Клейн И. С. Метод расчета температурного режима каменно-земляной плотины [Текст] / И. С. Клейн // Исследования плотин из грунтовых материалов ВНИИ ВОДГЕО Москва, 1981. – с. 162-176
28. Битюрин А.К. Температурный расчет примыкания фильтрующей плотины к мерзлому склону долины [Текст] / А.К. Битюрин // Инженерное мерзлотоведение в гидротехническом строительстве: материалы конф. и совещан. по гидротехнике - Л.: ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 1984. – с.76-79.
29. Битюрин А. К. Температурно-фильтрационный режим напорного фронта гидроузлов в условиях вечной мерзлоты [Текст] / А. К. Битюрин // Известия ВУЗов. – 1997, №8. – с. 53-58. 171
30. Оловин Б. А. Динамика температурного поля плотины Виллюйской ГЭС [Текст] / Б.А. Оловин Б.А. Медведев. -Новосибирск: Наука, 1980. – 47 с.

31. Оловин Б. А. Особенности льдообразования в каменнонабросных плотинах [Текст] / Б.А. Оловин // Мерзлые породы и снежный покров. – Новосибирск, 1972. – с. 136-142.
32. Цвик А. М. Регулирование температурного режима грунтовых сооружений на Севере [Текст]: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук / А. М. Цвик. - Красноярск, 2003. – 24 с.
33. Максимов И.А. Прогноз формирования фильтрационно-термического режима основания грунтовой плотины [Текст] /И.А. Максимов// Исследования, проектирование и строительство гидротехнических сооружений на Крайнем Севере и в районах распространения вечной мерзлоты: Тезисы докладов конференции – Л., ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева, 1981. – с.197-198.
34. Цыбин А.М. К созданию метода расчета температурного режима бетонной плотины при наличии фильтрационного потока в основании [Текст]/ А.М. Цыбин. – Л.: Энергия, 1975. – 178 с.
35. Цыбин А.М. Некоторые вопросы расчета температурных полей, связанные со строительством и эксплуатацией гидросооружений, работающих в районах крайнего севера и вечной мерзлоты. [Текст] / А.М. Цыбин. – С.-Петербург: ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева, 1995. – 344 с.
36. Цыбин А.М. Температурный режим грунта под руслом реки и определение границы талика. Гидротехническое строительство в районах вечной мерзлоты и сурового климата. Материалы конференций и совещаний по гидротехнике [Текст] / А.М. Цыбин // – Л.: Энергия, 1979. – с. 36-39.
37. Шугаева Р.Т. Расчет термического режима земляных плотин с учетом послойного их возведения [Текст] / Р.Т. Шугаева. - Изв. ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева, 1971. – 196 с.

38. Шугаева Р.Т. Прогноз термического режима грунтовой плотины Вилюйской ГЭС-III. [Текст] / Р.Т. Шугаева. - Изв. ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева, 1984. – 158 с. 172
39. Джаныбеков Ч.Дж. Методы фильтрационных расчетов в слоистых средах Фрунзе, «Илим» - 1983
40. Исманбаев А.И. Исследование влияния неоднородной прослойки, прилегающей ко дну канала, на характер фильтрационного течения жидкости» Опубликовано в журнале «Наука и новые технологии», Бишкек, 1998, № 3.
41. Джаманбаев М.Дж. Методы решения и идентификация параметров математической модели процессов переноса [Текст] / М.Дж. Джаманбаев. – Бишкек, Илим, 1996. - 121 с.
42. Джаманбаев М.Дж. Методика расчета теплопереноса в горных породах [Текст] / М.Дж. Джаманбаев, С. Кадыркулова // Известия Кыргызского технического университета им. И. Раззакова. – Бишкек, 2005. №7. - с.129 -133.
43. Джаманбаев М.Дж. Методика определения температуры, коэффициентов теплообмена и температуропроводности грунта [Текст] / М.Дж. Джаманбаев, У.Дж. Душенова, З.С. Турсункулова // Известия Кыргызского технического университета им. И. Раззакова. – Бишкек, 2012. № 28 - с.105 -109.
44. Джаманбаев М.Дж. Влияние уровня воды на величину фильтрационного расхода и на процесс таяния под основанием водоема. [Текст] / М.Дж. Джаманбаев, У.Дж. Душенова, З.С. Турсункулова // Известия Кыргызского технического университета им. И. Раззакова. – Бишкек, 2012. № 28 - с.110 -115.
45. Джаманбаев М.Дж. Методы решения коэффициентных задач процессов переноса. [Текст] / М.Дж. Джаманбаев // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова. – Бишкек, 2011. - № 23. - с. 28-35.

46. Джамабаев М.Дж. Аналитическое решение задачи протаивания грунта под основанием водоема / Зарнаева А.Ж., Нурбекова Н.Н. –Бишкек: Известия КГТУ им. И.Раззакова. - 2022. -№61. -6с.
47. Джаманбаев М.Дж. Инфильтрация атмосферных осадков по наклонному склону /Душенова У.Дж., Омуралиев С.Б // Известия КГТУ им. И. Раззакова №26, г. Бишкек, 2010. -С.205 -208. <https://elibrary.ru/item.asp?id=27165604>
48. Джаманбаев М.Дж. Определение глубины таяния мерзлого грунта под основанием пруда хвостохранилища/ Душенова У.Дж., Турсункулова З.С.// Известия КГТУ им. И. Раззакова №29, г. Бишкек, 2013. -С. 239-242. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29214773>
49. Джаманбаев М.Дж. Определение глубины таяния мерзлого грунта под основанием пруда водохранилища. / Душенова У.Дж., Турсункулова З.С.// Материалы научной конференции «Научные основы стратегии развития АПК и сельских территорий в условиях ВТО ВолгГау. г.Волгоград, 2014. -С. 328-331. <https://elibrary.ru/item.asp?id=25566503>
50. Душенова У.Дж [Оценка степени влияния природных факторов на промерзание грунта/ Джаманбаев М.Дж., Шекеев К.Р./ Известия КГТУ им.И.Раззакова №50, г. Бишкек, 2019.-С. 163-168. <https://elibrary.ru/item.asp?id=39537304>](https://elibrary.ru/item.asp?id=39537304)
51. Джаманбаев М.Дж. Определение периода (времени) не установившейся части процесса переноса тепла в мерзлых грунтах под влиянием заданной температуры. /Душенова У.Дж.// Журнал Научные исследования в Кыргызской Республике №1,г.Бишкек,2023.-С.19-24 <https://elibrary.ru/item.asp?id=61182954>
52. Джаманбаев М.Дж.. Аналитико-численное решение задачи протаивания мерзлого грунта с учетом теплообмена и изменения начального условия./Душенова У.Дж, Кыштобаева Г.К.// Сборник статей “Перспективные задачи инженерной науки”. -г. Москва, 2023. - С. 52- 57 <https://elibrary.ru/item.asp?id=50742458>

53. Бийбосунов Б.И. Моделирование и решение оптимизационных задач напорной фильтрации при сложном строении грунта Бишкек, издательство «Илим», 1998.
54. Чукин Б.А, Чукин Р.Б. Патент на изобретение - 2006 «Устройство для предотвращения прорыва завальной плотины»
55. Назарова Л.А. Эволюция термогидродинамических полей в окрестности защитной дамбы хвостохранилища рудника Кумтор [Текст] / Л.А. Назарова, Л.А. Назаров , М.Д. Джаманбаев , М.К. Чыныбаев // ФТПРПИ. – Н.: 2015. - № 1. с. 23-29
56. Назарова Л.А. Моделирование процесса тепломассопереноса в окрестности гидротехнических сооружений в криолитозоне [Текст] / Л.А. Назарова , Л.А. Назаров , М.Д. Джаманбаев , М.К. Чыныбаев // ГИАБ. – М.: 2015. - № 9. с. 373- 379.
57. Nazarova L.A., Nazarov L.A., Jamanbaev M.D., Chynybaev M.K. Modeling heat and mass transfer processes in the vicinity of waterside structures in cryolite zone // Reports of the XXIII International Scientific Symposium «Miner's Week – 2015» 26- 30 January, 2015. p. 35-40.
58. Назарова Л.А. Исследование процесса тепломассопереноса в ограждающей дамбе хвостохранилища в зоне многолетнемерзлых пород [Текст] / Л.А. Назарова, Л.А. Назаров, Н.А. Мирошниченко, М.Д. Джаманбаев // «Недропользование. Горное дело. Направления и технологии поиска, разведки и разработки месторождений полезных ископаемых. Геоэкология»: Сб. матер. XI Межд. научн. конгресса. – Новосибирск: Изд. СГГА, 2015. с. 153–158.
59. Nazarova L.A., Nazarov L.A., Jamanbaev M.D., Chynybaev M.K. Temperature and filtration conditions in the embankment at the Kumtor Mine, Kyrgyzstan: Case study and contingency situation analysis / Proceedings of 10th Asian Regional Conference of IAEG, Sep. 26-28, 2015, Kyoto, Japan.

60. Дарьин Н.А. Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке [Текст] / Н. А. Дарьин, В. И. Мажукин // Дифференциальные уравнения. – 1987. №23(7). – с. 1154–1160
61. Самарский А.А. Вычислительная теплопередача [Текст] / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. - Москва: Эдиториал УРСС, 2003. – 340с.
62. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем [Текст] /А.А. Самарский. - М.: Наука, 1971. - 552 с.
63. Самарский А.А. Разностные методы решения задач математической физики на нерегулярных сетках [Текст] / А.А. Самарский, П. Н. Вабищевич // Математическое. Моделирование - Москва, 2001. - №13(2), с. 5–16.
64. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М., Гостехиздат, 1953. - 680 с.
65. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теория функциональных пространств — М.: Наука, 1977
66. Ладыженская О.А. «Математические вопросы динамики вязкой жидкости».- ГИТТЛ, 1953; переиздавалась в 1960-х
67. Шекеев К.Р. Влияние вида теплообмена поверхности с окружающей средой на протаивание вечной мерзлоты. [Текст] / К.Р. Шекеев // Современная наука. Актуальные проблемы и пути их решения. - Липецк, 2016, №2 (24). - с. 8-11 175
68. Алипова К. А. Задача Стефана для уравнения теплопроводности [Текст] / К. А. Алипова, Н.Н. Богословский // Материалы сборника статей Всероссийской научной молодежной конференции «Все грани математики и механики». - Томск, Томский государственный университет, 2016. - с.92-99.
69. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике [Текст]/ Издательство «Мир» -Москва, 1975.
70. Система критериев и обобщение зависимости для расчета процессов замораживания грунта с помощью сезоннодействующих

- охлаждающих устройств [Текст] / Н.А. Бучко // Холодильная техника - Москва, 1978, №1. - с. 19-22.
71. Кудрявцев В.А. Общее мерзлотоведение [Текст] / В.А. Кудрявцев. - М.: Издво МГУ, 1978. - 464 с.
72. Ершов В.Д. Влагоперенос и льдовыделение в мерзлых породах под действием градиентов напряжений. [Текст] / В.Д. Ершов, В.А. Кудрявцев // Сборник «Исследование состава, строения и свойств мерзлых, промерзающих и оттаивающих пород с целью наиболее рационального проектирования и строительства» - М.: 1981, с. 56-61.
- 173
73. Кудрявцев В.А. Карта мерзлотных условий нечерноземной зоны РСФСР [Текст] / В.А. Кудрявцев, В.В. Баулин. - М.: Наука, 1984. – 32 с.
74. Goodrich L. E., 1982. The influence of snow cover on the ground thermal regime, Can. Geotechn. J., vol. 19, pp. 421–432.
75. Лыков А.В. Теория тепло- и массопереноса [Текст] / А.В. Лыков, Ю.А. Михайлов. - Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 358 с.
76. Павлов А.В. Теплофизика ландшафтов [Текст] / А.В. Павлов. - Новосибирск, Наука, 1979. - 285 с.
77. Шекеев К.Р. Влияние вида теплообмена поверхности с окружающей средой на протаивание вечной мерзлоты. [Текст] / К.Р. Шекеев // Современная наука. Актуальные проблемы и пути их решения. - Липецк, 2016, №2 (24). - с. 8-11
- 175
78. Илларионов В.А. Инженерное мерзлотоведение. [Текст] / В.А. Илларионов. - Сыктывкар: Изд-во СыктГУ, 2014. – 104 с.
79. Каменский Г.Н. Гидрогеология СССР [Текст] / Г.Н. Каменский, М.М. Толстихина, Н.И. Толстихин. - М.: Госгеолтехиздат, 1959. – 366 с.
80. Цытович Н.А. Механика мерзлых грунтов [Текст] / Н.А. Цытович. - М.: Высшая школа, 1973. – 446 с.

81. Смышляев Б.Н. Особенности проектирования искусственных сооружений в суровых условиях Дальневосточного региона [Текст] / Б.Н. Смышляев, Г.М. Боровик. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2008. – 93 с.
82. Технический отчет по руднику «Кумтор» (Кыргызская Республика). № 43- 101. 2015 г. 72. Руководство по определению физических, теплофизических и механических характеристик мерзлых грунтов Москва 1973.
83. Кудрявцев В.А. Мерзлотоведение [Текст] / В.А. Кудрявцев, Н.Ф. Полтев, Н.Н. Романовский. – М.: Изд-во МГУ, 1981 г. – 239 с.
84. Шульгин А.М. Климат почвы и его регулирование [Текст] / А.М. Шульгин. - Ленинград: Гидрометеиздат, 1972. - 341 с.
85. Справочник дорожного мастера. Строительство, эксплуатация и ремонт автомобильных дорог [Текст] – М. Изд-во Инфра-Инженерия, 2005 г. – 48 с.
86. Заручевных И.Ю. Механика грунтов в схемах и таблицах. [Текст] / И.Ю. Заручевных, А.Л. Невзоров - М.: Издательство ассоциации строительных вузов, 2007.
87. Герасимов Н.Н. Годовой ход температур грунта в районе Якутска. [Текст] / Н.Н. Герасимов. - М.: Изд. АН СССР, 1950, вып. 2. – 340 с. 176
88. Андрияшев М.М. Тепловые расчеты при проектировании водопроводов в условиях вечной мерзлоты [Текст] / М.М. Андрияшев. - Л.: Госстройиздат, 1941. – 235с.
89. Павлов А.В. Теплообмен промерзающих и протаивающих грунтов с атмосферой [Текст] / А.В. Павлов. - М.: Наука, 1965. - 253 с.
90. Лофицкий В. Н. Зимние земляные работы в гидроэнергетическом строительстве [Текст] / В. Н. Лофицкий. - Л.: Госэнергоиздат, 1961. - 172 с.

91. Крылов Д.А. Математическое моделирование распределения температурных полей в криолитозоне [Текст] / Д.А. Крылов, Ю.С. Мельникова // Студенческий научный вестник: сборник статей четвертой научно-технической выставки «Политехника». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. - с.94-97.
92. Котляков В.М. Математическое моделирование тепло–массообмена в снежном покрове при таянии [Текст] / В.М. Котляков, Н.И. Осокин, А.В. Сосновский // Криосфера Земли. Н.: Наука, 2004. т. VIII. № 1. - с.78–83.
93. Лукьянов В.С. Расчет глубины промерзания грунтов [Текст] / В.С. Лукьянов, М.Д. Головкин. - М. Трансжелдориздат, 1957. – 256 с.
94. Бубело Р.В. Стабилизация отрицательной температуры мерзлых грунтов оснований с помощью поверхностных аккумуляторов холода [Текст]: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Р.В. Бубело. - Москва, 2003 г. – 189 с.
95. Цытович Н.А. Основы геокриологии [Текст] / Н.А. Цытович, И.Я. Баранов. – М.: Издательство Академии наук СССР, 1959. – 659 с.
96. Кудрявцев В.А. Температура, мощность и прерывистость мерзлых толщ пород [Текст] / В.А. Кудрявцев // Основы геокриологии. – М.: АН СССР, 1959. – с. 219-325.
97. Булдович С.Н. Экспресс-метод оценки и прогнозирования температурного режима многолетнемерзлых пород [Текст] / С.Н. Булдович. – М: Изд-во МГУ, 2001. - 228 с.
98. Ершов Э.Д. Методы геокриологических исследований [Текст] / Э.Д. Ершов. - М. Изд-во МГУ, 2004. - 512 с.
99. Любославский Г.А. Влияние поверхностного покрова на температуру и обмен тепла в верхних слоях почвы [Текст] / Г.А. Любославский. – Санкт-Петербург, 1990. – 176 с.
100. Кондратьев К.Я. Радиационный баланс Земли [Текст]/К.Я. Кондратьев. – Л.: Гидрометиздат, 1988. – 352с.

101. Алисов Б.П. Климатология [Текст]/ Б.П. Алисов, Б.В. Полтараус - М.: Издво МГУ, 1974. -300 с.
102. Шекеев К.Р. Исследование влияния климатических и техногенных факторов на температурный режим грунтов [Текст]/Шекеев К.Р., Джаманбаев М.Дж.//Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. - Москва, 2016, №08. - стр. 7-11.
103. Марчик Т.П. Почвоведение с основами растениеводства. [Текст] / Т.П. Марчик, А.Л. Ефремов.–Гродно:Изд-во Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, 2014 – 196 с.
104. Тыртиков А.П. О влиянии растительности на многолетнемерзлую подпочву. [Текст] / А.П. Тыртиков // Материалы к основам учения о мерзлых зонах земной коры.-М.:Изд. АН СССР, 1956. Вып.3.– с.78-83
105. Константинова Г.С. О влиянии снега на температуру многолетнемерзлых пород в бассейне Пясины и в низовьях Енисея [Текст] / Г.С. Константинова // Сб. «Снежный покров, его распространение и роль в народном хозяйстве». -М., Изд-во АН СССР, 1962.
106. Абельс Г. Суточный ход температуры снега и зависимость между теплопроводностью снега и его плотностью [Текст] / Г. Абельс. - СПб., 1993. 178
107. Константинова Г.С. Изменение геокриологических условий в зависимости от снежного покрова в естественных условиях района Игарки. [Текст] / Г.С. Константинова. М., Ин-т мерзлотоведения им. В. А. Обручева 1959.
108. Хусаинова З.Р. Теоретическое исследование процессов термоэрозии и термокарста многолетнемерзлых пород [Текст]: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 01.04.14. / З. Р. Хусаинова. - Уфа, 2007. - 148 с.
109. Ершов Э.Д. Общая геокриология [Текст] / Э.Д. Ершов.-М.: изд-во МГУ, 2002. - 682 с.

110. Чернядьев В.П. Прогноз теплового состояния грунтов при освоении северных районов [Текст] / В.П. Чернядьев, А.Л. Чеховский, А.Я. Стремяков, В.А. Пакулин - М.: Наука, 1984. - 137 с.
111. Фролов Н.М. Гидрогеотермия [Текст] / - Н.М. Фролов. - М.:Недра, 1976. – 280 с.
112. Гафаров Ш.А. Физика нефтяного пласта [Текст] / Ш.А. Гафаров. - Уфа: Изд. УГНТУ, 2000. - 348 с.
113. Коротаев Ю.П. Избранные труды [Текст] / Ю.П. Коротаев. - М.:Недра, 1999. – 364 с.
114. Чистотинов Л.В. Миграция влаги в промерзающих неводонасыщенных грунтах [Текст] / Л.В. Чистотинов. - М.: Наука, 1973. – 196 с.
115. Порхаев Г.В. Тепловое взаимодействие зданий и сооружений с вечномёрзлыми грунтами [Текст] / Г.В. Порхаев. - М.: Наука, 1970. — 236с.
116. Смирнова Н.Н. Некоторые данные по определению зависимости теплофизических свойств горных пород от степени влагонасыщенности [Текст] / Н.Н. Смирнова, А.А. Ананьян // Кн. Мерзлотные исследования. - М.: изд. АН СССР, 1950. - Вып. XI.
117. Иванов Н.С. Обоснование метода изучения температурной зависимости коэффициента теплопроводности промерзающих образцов грунта [Текст] / Н.С. Иванов // Кн. Методы определения тепловых свойств горных пород. - М.: Наука, 1970.
118. Федорович Д.И. Определение теплофизических характеристик промерзающих и протаивающих грунтов по анализу естественного температурного поля [Текст]/Д.И. Федорович // Кн. Методы определения тепловых свойств горных пород. - М.: Наука, 1970.
119. Рубинштейн Л.И. К вопросу о промерзании грунта [Текст] / Л.И. Рубинштейн. – М.: Изд. АН СССР. Серия география и геофизика. 1974.

120. Антонов А.С. Температурно-фильтрационный режим грунтовых плотин, возводимых в суровых климатических условиях [Текст]: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / А.С. Антонов. - М.,2016г.
121. Бирюлин Г.В. Применение ЭВМ для решения задач теплопроводности [Текст] / Г.В. Бирюлин, В.И. Егоров. - М.: Наука, 1988 г. – 187 с.
122. Павлов А.В. Расчет и регулирование температурного режима почвы [Текст] / А.В. Павлов. - Новосибирск: Наука, 1980. - 220 с.
123. «Обобщённые функции. Том3: Теория дифференциальных уравнений» Авторы: И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилор— Москва: Физматгиз, 1963
124. Звонарев С.В. Основы математического моделирования:учебное пособие/С.В. Звонарев -Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019 -112 с.
125. Ладыженская О.А. «Математические вопросы динамики вязкой жидкости»-ГИТТЛ, 1953; переиздавалась в 1960-х
126. Шарма Дж.Н. Уравнения в частных производных для инженеров / Дж. Н. Шарма, К. Сингх. – М.: Техносфера, 2002. -320 с.
127. Шекеев К.Р. Влияние влажности на температурный режим грунта // Наука, новые технологии и инновации. -2014. - №1 -С.11-13.
128. Шекеев К.Р. Численное моделирование протаивания мерзлого грунта под основанием хвостохранилища. –Бишкек: Известия КГТУ им. И.Раззакова. - 2014. -№31. - С.329-331.

ПРИЛОЖЕНИЕ1 Программный код для однородных граничных условий
Определение количества слагаемых в ряду

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
double F(double t, double x, double L, int i)
{
    const double pi=3.14;
    double a=0.0368, b=-1.2391, c=2;
    double A=-10/L, B=8;
    double s=A*x+B;
    double ro=0.004283;
    for (int n=1; n<=i; n++)
    {
        //double Lamda=n*pi/L;
```

```

s+=(((4*a*pow(L,2)*(pow((-1),n)-1))/(pow(pi,3)*pow(n,3)))-
(2/(pi*n))*(a*pow(L,2)*
    pow((-1),n)+(b-A)*L*pow((-1),n)+(c-B)*(pow((-1),n)-1)))*exp(-
pow(((pi*n)/L),2)*ro*t)*sin(pi*n*x/L);
    }
return s;
}
int main()
{
    setlocale(LC_ALL,"Russian");
    double L,t=1;
cout<<"L=";
cin>>L;
double x=1.0;
double R=0;
double E=0.0003;
int i=100;
int M=0;
double R1, R2;
for(int n=2; n<=i; n++)
{
R1=F(t,x,L,n);
if(abs(R-R1)<=E)
{
    M=n;
    R2=F(t,x,L,M);
    cout<<" R2= "<<R2<<" m= "<<M;
break;
}
else

```

```

{
    R=R1;
}

}

system("pause");
return 0;
}

```

**Нахождение методом деления отрезка по пополам значение глубин
в разные моменты времени**

```

#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
double F(double t, double x, double L, int M)
{
    const double pi=3.14;
    double a=0.0369, b=-1.2391, c=2;
    double A=-10/L, B=8;

    double s=A*x+B;
    double ro=0.004283;
    for (int n=1; n<=M; n++)

    {
        //double Lamda=n*pi/L;
s+=
        (((4*a*pow(L,2)*(pow((-1),n)-1))/(pow(pi,3)*pow(n,3)))-
(2/(pi*n))*(a*pow(L,2)*pow((-1),n)+(b-A)*L*pow((-1),n)+(c-B)*(pow((-1),n)-
1)))*exp(-pow(((pi*n)/L),2)*ro*t)*sin((pi*n*x)/L);
    }
return s;
}

```

```

}
int main()
{
    setlocale(LC_ALL,"Russian");
    double L,t,ro;
    cout<<"L=";
    cin>>L;
    double h=1;
    double xO=0;
    double x=xO;
    const double E=0.003;
    int M=3;
    int j;
    for (j=0; j<=90; j++)
    {
        t=168*j;
        snova:
            double fOld=F(t,xO,L,M);
            while (x<=L)
            {
                x+=h;
                double fNew=F(t,x,L,M);
                if(fNew*fOld<=0)
                    break;
                fOld=fNew;
                xO=x;
            }
        delenie:
            double c=(xO+x)/2;

```

```

double FRab=F(t,c,L,M);
double fNew=F(t,x,L,M);
if (abs(FRab)<=E)
{
    x=c;
    goto finish;
}
else
if(fNew<0)
{
    if (FRab<0)
    {
        x=c;
        fNew=FRab;
        goto delenie;
    }
    else
    xO=c;
    fOld=FRab;
    goto delenie;
}
else if (FRab<0)
{
    xO=c;
    fOld=FRab;
    goto delenie;
}
else

```

```

        x=c;
        fNew=FRab;
        goto delenie;
finish:
        cout<<"i= "<<j<<" x1="<<x<<" t="<<t<<endl;
}
system("pause");
return 0;
}

```

Различные значения глубины в момент времени

```

#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
double F(double t, double x, double L, int M)
{
    const double pi=3.1415926;
    double a=0.036859737;
    double b=-1.2391325435;
    double c=2;
    double A=-10/L;
    double B=8;
    double s=A*x+B;
    //double s=0.;
    double ro=0.004283;
    int n;
    for (int n=1; n<=M; n++)
    {
        //double Lamda=n*pi/L;

```

```

s+=
                (((4*a*pow(L,2)*(pow((-1),n)-1))/(pow(pi,3)*pow(n,3)))-
(2/(pi*n))*(a*pow(L,2)*pow((-1),n)+(b-A)*L*pow((-1),n)+(c-B)*(pow((-1),n)-
1)))*exp(-pow(((pi*n)/L),2)*ro*t)*sin((pi*n*x)/L);
        }
return s;
}
int main()
{
    setlocale(LC_ALL,"Russian");
    double L,t,y;
cout<<"L=";
cin>>L;
    const double pi=3.1415926;
double x=0;
double h=1;
int j=0;
double R;
int M=3;
R=sin((3*pi*L)/L);
cout<<"y30= "<<R<<endl;
R=0.;
//for(int i=0; i<=90; i++)
t=0;
while(x<=L)
{   cout<<" x="<<x<< endl;
    j=j+1;
    y= sin((j*pi*x)/L);
    R = F(t,x,L,M);
    x=x+h;
}
}

```

```
cout<<"y= "<<y<<endl;
cout<<"R= "<<R<<endl;
}
system("pause");
return 0;
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Программный код для математической модели с
неоднородными граничными условиями
Нахождение значения лямбд

```
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

double f(double x)
{
    return tan(30*x)+(x/(0.35));
}

int main()
{

    double a,b,c,eps = 0.003;
    a=-1.15;
    for (double i=1; i<=10; i++ )
    {

        b=(3.14/30)*(i);
        cout<<"a="<<a<<" b="<<b<<endl ;
        if (f(a)*f(b)<0)
        {
        do
        {
            c=(a+b)/2;
            if(f(c)*f(a)<0)
```

```

        b=c;
    else
        a=c;
    }
    while((fabs(a-b)>=eps)&&(fabs(c)<=eps));
    cout<<"Корень= "<<c<<endl;
    cout<<endl;

}
else
    cout<<"На данном отрезке нет корня т.к. f(a) и f(b)
равны"<< f(a) <<" и "<<f(b)<<endl;

}
return 0;
}

```

Нахождение значений температур в разным момент времени в соответствующих глубинах

```

#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

double f(int j, int x, double L, double t)
{
    double h=0.52,eps = 0.003, ro=0.004283;
    double lyam,U,B=0, f1, f2 , f3;
    double a=0.036859737;

```

```

double b=-1.2391325435;
double c=2;
double Tg=-2;
double Tv=8;
double an,bn;
U=((x/L)*((Tv+(L*h*Tg))/((L*h)+1)))+(Tv*(1-(x/L)));
double E=(((L*h+1)*L*b)-
(Tv+(L*h*Tg))+((L*h+1)*Tv))/((L*h+1)*L);

```

```

an=-1.15;
for (int i=1; i<=j; i++ )
{
    //an=(3.14/30)*(i);
    bn=(3.14/30)*(i);
    f1=tan(30*an)+an/h;
    f2=tan(30*bn)+bn/h;

    if ((f1*f2)<0)
    {
do
    {
        lyam=(an+bn)/2;
        f3=tan(30*lyam)+lyam/h;

        if ((f1*f3)<0)
            bn=lyam;
        else
            an=lyam;
    }
while((fabs(an-bn)<=eps)&&(fabs(f3)<=eps));

```

```

    {
double H=(c-(Tv/L))/lyam;
B=B+(((2/L)*((2*a*(cos(lyam*L)-
1)/pow(lyam,3))+((sin(lyam*L)/pow(lyam,2))*((2*L*a)+E))-
((cos(lyam*L)/lyam)*((a*pow(L,2))+L*E)+H))-H))*(exp(-
pow(lyam,2)*t*ro))*sin(lyam*x));

    }
    }
    }
return B+U;
}
int main()

{ setlocale(LC_ALL,"Russian");
double t;
cout<<"t="; cin>>t;
double L=30;

int x;
double R=0.;
int j=25;
for(x=0 ; x<=L; x++)
{ //cout<<" x="<<x<< endl;
R = f(j,x,L,t);
cout<<" "<<R<<endl;

}
system("pause");
return 0;
}

```

«Геотехникалык объектилердин туруктуулугунун»
илимий долбоордук лабораториясы» ЖЧК
ОсОО «Научно-проектная лаборатория
«Устойчивости геотехнических объектов»



«УТВЕРЖДАЮ»

Директор
к.т.н. Р.Б. Чукин

_____ 2025.



Акт

Внедрения научных результатов диссертационной работы

Душеновой Умут Джумаказылова

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по
специальности 01.02.05 «Механика жидкости, газа и плазмы»
на тему: «Аналитико-численное решение задач теплопереноса»

1. Автор внедрения: Душенова Умут Джумаказылова

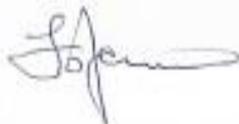
2. Наименование диссертационной работы: «Аналитико-численное решение задач теплопереноса»

3. Краткая аннотация: Дамбы хвостохранилищ в условиях высокогорья часто возводятся на мерзлых грунтовых основаниях. Наполнение хвостохранилищ теплыми жидкими отходами связано с нарушением теплового режима мерзлых грунтовых оснований. В результате происходит таяние мерзлых грунтов основания. Данный процесс сказывается на надежности и безопасности дамб хвостохранилищ т.к. оттаявшие грунты обладают пониженными прочностными и деформационными характеристиками. В зоне таяния мерзлого грунта под основанием хвостохранилища устанавливаются фильтрационные процессы. При этом фильтрационная жидкость зачастую представляет собой токсичную жидкость, что связано с вопросами экологической безопасности и охраны окружающей среды. Поэтому исследования, посвященные разработке аналитико-численного метода по изучению процессов таяния мерзлого грунта, являются актуальными и имеют важное народнохозяйственное значение.

В процессе научных исследований получены следующие результаты:

- Разработан аналитико-численный подход к решению задач теплопереноса, основанный на идее метода конечных элементов (МКЭ).
 - Предложена методика определения глубины таяния и идентификации коэффициента температуропроводности, как решение математической модели теплопереноса с использованием данных наблюдений температуры грунта.
 - Построение аналитического решения математической модели таяния мерзлого грунта под основанием хвостохранилища и определение времени перехода к стационарному режиму и глубину таяния за это время.
 - Вывод о не влиянии начального условия на глубину таяния при долгосрочном прогнозе на основе численного эксперимента.
4. **Эффект от внедрения:** Научные результаты диссертации могут быть приняты во внимание и использованы при выполнении проектных работ по строительству гидротехнических сооружений повышенной ответственности на грунтовых основаниях в условиях вечной мерзлоты, что позволяет значительно улучшить качество результатов принимаемых инженерных решений.
5. **Место и время внедрения:** Указанные результаты будут использованы при выполнении раздела проекта «Оценка температурного режима грунтов основания и тела дамбы на участке примыкания дамбы к восточному борту хвостохранилища» в 2025 году.

Главный инженер проекта к.т.н.



Б.А. Чукин