

И. Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университети
Б. Ельцин атындагы Кыргыз-Россия Славян университети

Диссертациялык кеңеш Д 01.25.711

Кол жазма катары

УОК:163631

Душенова Умут Джумаказыловна

**Жылуулук өткөрүү маселелерин чечүүдө аналитикалык жана сандык ыкмаларды
колдонуу**

01.02.05 – Суюктук, газ жана плазманын механикасы

Диссертациянын авторефераты

физика-математика илимдеринин кандидаты илимий даражасын алуусуна

Бишкек – 2025

Диссертациялык иш Кыргыз мамлекеттик техникалык университетинин И. Раззаков атындагы «Колдонмо математика жана информатика» кафедрасында аткарылган.

Илимий жетекчи: Жаманбаев Мураталы Жүзүмалиевич физика-математика илимдеринин доктору, профессор, Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын корреспондент-мүчөсү, Кыргыз мамлекеттик техникалык университетинин И. Раззаков атындагы «Колдонмо математика жана информатика» кафедрасынын жетекчиси.

Расмий оппоненттер: Бекетаева Асел. Орозалиевна, физика-математика илимдеринин доктору, Аль-Фараби атындагы Казак улуттук университетинин математикалык жана компьютердик моделдөө кафедрасынын доценти.

Мукамбаев Нурбек Жээмбасвич – физика-математика илимдеринин кандидаты, Л.Н. атындагы Кыргыз улуттук университетинин Кыргыз-Кытай институтунун окуу иштери жана мобилдүүлүк боюнча координатору. Ж. Баласагын.

Жетектөөчү уюм: К.Тыныстанов атындагы Ысык-Көл мамлекеттик университети, Каракол ш., көч. К.Тыныстанова 26, Физика-математика факультети, Математика жана маалыматтык технологиялар кафедрасы

Диссертацияны коргоо «2025-жылдын 27-июнунда» саат 14:30да И. Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университетинде жана Б. Ельцин атындагы Кыргыз-Россия Славян университетинде докторлук (кандидаттык) диссертацияларды коргоо боюнча Д 01.25.711 диссертациялык кеңештин жыйынында өтөт. Дареги: 720044, Кыргыз Республикасы, Бишкек шаары, Ч. Айтматов проспекти, 66, И. Раззаков атындагы КМТУ, кичи жыйындар залы (КЖЗ, аудитория 1/257). Диссертацияны коргоо видеоконференция аркылуу өткөрүлөт. Видеоконференцияга катышуу үчүн шилтеме: <https://vc.vak.kg/b/012-h47-fex-gn0>

Диссертация менен төмөнкү даректер боюнча таанышса болот: И. Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университетинин китепканаларында- 720044, Кыргыз Республикасы, Бишкек шаары, Ч. Айтматов проспекти, 66, Б. Ельцин атындагы Кыргыз-Россия Славян университетинин китепканасында- 720000, Кыргыз Республикасы, Бишкек шаары, Киев көчөсү, 44 жана www.vak.kg веб-сайтында.

Автореферат 2025-жылдын май айынын 26сында таратылды

Диссертациялык кеңештин илимий катчысы,
физика-математика илимдеринин
кандидаты, доценти



Доталиева Ж.Ж.

ДИССЕРТАЦИЯЛЫК ИШТИН ЖАЛПЫ МҮНӨЗДОМӨСҮ

Диссертациялык иштин темасынын актуалдуулугу.

Жогорку тоолуу аймактарда түбөлүк муздак шартта гидротехникалык курулуштарды куруу жана пайдалануучу объекттерди эксплуатациялоо атайын илимий изилдөөлөрдү талап кылат, ал объекттердин коопсуздугу менен байланышкан. Курулуштардын коопсуздугуна таасир этүүчү негизги факторлордун бири температуралык режим болуп саналат. Гидротехникалык курулуштардын температуралык режимин изилдөө гана коопсуздук менен чектелип калбай, экологиялык коопсуздукка, айлана-чөйрөнү коргоого да байланыштуу. Маселен, алтын руда комбинатынын дамбасынын астындагы тоңгон жердин эрий башташы жана түбөлүк муздун астындагы жердин эриши айлана-чөйрөгө цианистик суюктуктун агып чыгышына, жер астындагы, топурактуу жана беттик сууларга булганууга алып келиши мүмкүн, ошондой эле курулуштардын негиздеринин деформациясына жана туруктуулугун жоготууга, башкача айтканда кыйроого алып келет, ал өз кезегинде чоң экономикалык чыгымдарга жана адам жоготууларына себеп болушу мүмкүн. Ошондуктан, түбөлүк муздак шартта жайгашкан гидротехникалык курулуштардын температуралык режимин изилдөө абдан маанилүү. Бул эмгек аналитикалык жана сандык ыкмаларды колдонуу менен тоңгон жердин эриген процесстерин изилдөөгө арналган. Аналитикалык жана сандык ыкмалар узак мөөнөттүү болжолдуу тапшырмаларды чечүүгө эффективдүү ыкма түзүп, туруктуу режимге өтүү убактысын аныктоого жана математика моделинин белгисиз параметрлерин, мисалы, температура өткөрүмдүүлүк коэффициенти, жылуулук алмашуу коэффициенттерин аныктоо жолу менен чечүүгө мүмкүндүк берет.

Диссертациялык иштин темасынын илимий программалар же илимий-изилдөө иштери менен байланыштары:

- «Масса жана жылуулук өткөрүү процесстерин математикалык моделдөө жана аларды чечүү ыкмалары», 2012 – 2014-жж. КР МОН илим департаменти тарабынан аткарылган долбоор.
- «Кыргызстандын саздуу топурактарында көчкү процесстерин математикалык моделдөө», 2021-2022-жж. КР МОН илим департаменти тарабынан аткарылган долбоор.
- «Кыргыз Республикасынын өнөр жайында физика-техникалык көйгөйлөрдү чечүүдөгү инновациялык технологиялар» деген аталыштагы илимий-изилдөө ишинин отчету, 2013-ж.
- Россиянын илимий фондунун эл аралык илимий долбоору РФФИ № 14-05-90116 (Сибирь федералдык университетинин Геология жана жер ресурстары институту менен биргеликте), 2014-2015-жж.

Диссертациялык иштин максаты — жылуулук өткөрүү процесстеринин математикалык моделдерин аналитикалык чечүү үчүн эффективдүү ыкманы түзүү жана сандык анализ аркылуу алынган чечимдердин негизинде адистерге, инженерлерге жана тиешелүү уюмдарга сунуштарды, сунуштамаларды жана кеңештерди түзүү.

Изилдөөнүн негизги тапшырмалары:

- **Тапшырма 1.** Температураны, температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттерин жана жылуулук алмашуу коэффициенттерин аныктоо боюнча методика түзүү, математикалык моделдин чечими катары сандык-аналитикалык ыкманы колдонуу жана

табигый температура байкоолорунун маалыматтарын колдонуу. Практикада бул коэффициенттер эксперименттик жол менен чоң катачылыктар менен аныкталат.

- **Тапшырма 2.** Ар кандай чекиттик шарттарда тоңгон топуракта конвективдик жылуулук өткөрүү процесстеринин математикалык моделинин аналитикалык чечимин түзүү. Туруктуу режимге өтүү убактысын жана бул убакытта эриген тереңдикти графикалык түрдө аныктоо.

- **Тапшырма 3.** Эриген жана тоңгон топурак ортосундагы жылуулук алмашууну эске алуу менен математикалык моделдин аналитикалык чечимин түзүү. Алдын ала алынган чечим менен графикалык салыштыруу жана жыйынтык чыгаруу.

- **Тапшырма 4.** Сандык анализ аркылуу аналитикалык чечимдердин негизинде тоңгон топурак процессинин туруктуу режимге өтүшүнө баштапкы шарттардын таасирин жыйынтыктоо.

- **Тапшырма 5.** Стефан маселеси катары эрүү чектеринде фазалык өтүүнү эске алуу менен жана фазалык өтүүнү эсепке албастан, математикалык моделдердин тоңгон топурактын эрүү маселесин чечүүнүн анализи. Эрүү чек арасы конвекциялык жылуулук өткөрүүнүн нөл изотермасы жайгашкан жерде жайгашкан.

Илимий жаңылыктар:

1. Жылуулук өткөрүү маселелерин чечүү үчүн сандык-аналитикалык ыкма иштелип чыккан, бул конечтик элементтер ыкмасын ЧЭЫ(чектелген элементтер ыкмасы)колдонуу идеясына негизделген.
2. Температураны байкоо маалыматтарын колдонуу менен жылуулук өткөрүү моделинин чечими катары температура өткөрүмдүүлүк коэффициентинин тереңдигин аныктоо жана идентификациялоо методикасы сунушталды.
3. Калдыктарды сактоочу жай негизиндеги тоңгон топурактын эришинин аналитикалык моделинин чечими түзүлүп, туруктуу режимге өтүү убактысы жана бул убакытта эриген тереңдик аныкталган.
4. Баштапкы шарттардын таасиринин узак мөөнөттүү болжолдоодо эриген тереңдикке таасир этпөө жөнүндө жыйынтык, сандык эксперименттин негизинде чыгарылган.
5. Тоңгон топурак эриген процесстеринин ар түрдүү математикалык моделдеринин аналитикалык чечимдерин талдоо жана математикалык моделди тандоодо сунуштар.

Алынган жыйынтыктын практикалык баалуулугу.

Сунушталган ыкма жана алгоритм түбөлүк муздактык зонасындагы курулуштардын температуралык режиминин колдонмо маселелерин чечүү үчүн негиз болуп кызмат кыла алат. Бул ыкма ар кандай климаттык факторлорду эске алуу менен курулуштарды долбоорлоо, куруу жана эксплуатациялоодо маанилүү.

Алынган натыйжаларды окуу процессинде, жогорку курс студенттери, магистранттар жана аспиранттар үчүн атайын курстардын бир бөлүгү катары колдонууга болот, ошондой эле «Математикалык моделдөө», «Математикадагы колдонмо маселелер» дисциплиналарын үйрөнүүдө колдонсо болот.

Диссертацияны коргоого коюлган негизги жоболор:

- Аналитикалык жана сандык ыкманы, аналитикалык ыкмасын жана ЧЭЫ (чектелген элементтер ыкмасы) идеясын айкалыштыруу негизинде түзүлгөн ыкма;
- Тоңгон топурактын температурасы, температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттери жана жылуулук алмашуу коэффициенттерин аныктоо методикасы;

• Узак мөөнөттүү болжолдоо учурунда баштапкы шарттардын эриген тереңдикке таасир этпегендиги жөнүндө сунуш.

Илимий идеялардын, жыйынтыктардын жана сунуштардын тууралыгы аналитикалык жана сандык моделдердин чечимдеринин анализи жана бааланган негизде көрсөтүлөт, ошондой эле алынган натыйжаларды байкоо скважиналарынан алынган маалыматтар жана башка авторлордун натыйжалары менен салыштыруулар аркылуу текшерилет.

Диссертациялык ишти аткаруучунун кошкон салымы: Сунушталган методиканы ар түрдүү жылуулук өткөрүү маселелерин чечүүдө колдонуу, изилдөөлөрдү жүргүзүү, алынган маалыматтарды талдоодо, жыйынтыктарды чыгарып, макалаларды жарыялоодо, стационардык абалга өтүү убактысын аныктоодо, ошондой эле ар түрдүү математикалык моделдердин аналитикалык чечимдерин жана сандык натыйжаларын талдоодо, жөнөкөй математикалык моделди тандоодо тиешелүү адистерге сунуштарды берүү болуп саналат.

Апробациянын натыйжалары:

Бул диссертациялык иштин натыйжалары төмөнкү эл аралык жана республикалык конференцияларда жана семинарларда маалымдалган:

- Кыргыз мамлекеттик техникалык университети И. Раззаков атындагы илимий-практикалык конференциялар, Бишкек, 2010, 2012, 2014, 2016, 2019, 2020-жж.
- Республикалык илимий-теориялык журнал ВАК КР «Илим жана жаңы технологиялар», Бишкек, 2023-ж.
- Жаш илимпоздордун Эл аралык илимий-техникалык конференциясы «Инновация - жаштар үчүн вектор» Кыргыз мамлекеттик техникалык университети И. Раззакова атындагы (КГТУ), Бишкек шаары, 2014-ж.
- Эл аралык илимий-практикалык конференция «Жалпы чөйрөлөрдүн механикасынын учурдагы маселелери» Геомеханика жана жер казынасын иштетүү институту, НАН КР, Бишкек, 2012, 2024-ж.
- Эл аралык илимий-практикалык конференция «Агрардык өнүктүрүүнүн стратегиясынын илимий негиздери», Волгоград, 2014-ж.
- КГТУнун 65 жылдыгына арналган Эл аралык илимий-практикалык конференция, Бишкек, 2019-ж.
- Эл аралык илимий конференция «V Борубаев окуулары», Бишкек, 2024-ж. (макала жыйнагы)
- «VII Дүйнөлүк түрк дүйнөсү математиктеринин конгресси», Түркстан, 2023-ж.
- «Инженердик борбор «Импульс» РГУ им. А.Н. Косыгина, Москва, 2023-ж.
- Илимий-техникалык семинардын кеңейтилген жыйыны, кафедра, 2024-ж.

Диссертациянын публикациясында толук чагылдырылган жыйынтыктар:

Изилдөөнүн негизги жыйынтыктары 12 илимий макалада жарыяланган, анын ичинде Кыргыз Республикасынан тышкары илимий журналдарда жарыяланган макалалар, Scopus базасына кирген (1), РИНЦ (2) журналдарында.

Диссертациялык иштин түзүлүшү жана көлөмү:

Диссертация 3 бөлүмдөн: киришүү, корутунду, колдонулган адабияттардын тизмеси сыяктуу бөлүмдөрдөн турат. Диссертациялык иштин көлөмү 92 беттен, 22 таблицадан, 47 сүрөттөн жана 85 колдонулган адабият булактарынын тизмесинен турат

ИШТИН НЕГИЗГИ МАЗМУНУ

Кириш бөлүмүндө маселени актуалдаштыруу негизделип, максаттар жана милдеттер аныкталган, ошондой эле диссертациянын негизги маселелери коргоого коюлган.

Биринчи бөлүмдө гидротехникалык курулуштардын температуралык режимин моделдөөнүн ыкмаларына карата колдонулган адабияттар каралды. Температуралык

шарттардын өзгөрүшү кыртыштын эришине алып келет, бул курулмалардын фундаменттеринин жана негиздеринин деформациясынын, ошондой эле суюктуктун фильтрациясынын пайда болушунан улам гидротехникалык курулмалардын коопсуздугу менен байланышкан. Натыйжада, бул экологиялык кырдаалды өзгөртүп, айлана-чөйрөнү булгануу коркунучун жогорулатат. Мындай маселелерди изилдөө менен көптөгөн окумуштуулар алектенишкен, анын ичинде Соболев С.В., Биянов Г.Ф., Куперман В.Л., Максимов И.А., Трупаков Н.Г., Чжан Р.В. жана башка көптөгөн изилдөөчүлөр. **Температуралык массаны ташуу** моделдөө маселелери чоң масштабдагы табигый объекттерде, көп жылдык мөңгү жамгырлуу тоо, тоо карларынын аймагында орун алган жерлерде, Gou L., Fabre D., Bense V. F., Чжан Р.В., Цыбин А.М. сыяктуу изилдөөчүлөрдүн иштеринде каралган. Инженердик ыкмаларды колдонуу менен термогидродинамикалык жана эмпирикалык карап чыгуу параметрлеринин ортосундагы байланыштар Фельдман Г. М., Соболев С.В., Томиярдо С.В., Комаров И.А., Цытович Н.А. жана башка изилдөөчүлөр тарабынан каралган. Криолит зонасындагы калдыктарды сактоочу жайдын температурасын изилдөө иштерин Буйских А.А., Анискин Н.А., Назаров Л.А., Назарова Л.А., Джаманбаев М.Дж., Чыныбаев М.К. жана башка көптөгөн окумуштуулар жүргүзүшкөн.

Экинчи бөлүмдө. Илимий иштердин ыкмалары жана изилдөө иштеринин ыкмалары. Жылуулук өткөрүү маселесин чечүү үчүн жаңы, эффективдүү ыкманы негиздөө каралган, бул ыкма математикалык модельдин аналитикалык чечимин жана ЧЭЫ(чектелген элементтер ыкмасы)идеясын айкалыштырууга негизделген. Мындай ыкма иш жүзүндө маселелерди чечүүдө убакыт жана мейкиндиктин дискретизациясы менен байланышкан суроолорду чечет жана жердин температурасын, температуралык өткөргүчтүк коэффициенттерин жана жылуулук алмашуу маселелерин аналитикалык чечимди эстетикалык байкоо маалыматтары менен идентификациялоо жолу менен чечүүгө мүмкүнчүлүк берет. Мындай маселелер практика үчүн маанилүү, анткени бул коэффициенттер лабораториялык шарттарда эксперименталдык жол менен аныкталат жана аларда маанилүү каталар болушу мүмкүн.

Изилдөөнүн объектиси:

- калдыктарды сактоочу жай астындагы тонгон топурактын эрип кетүү процесси түбөлүк мөңгү аймактарында жайгашкан.
- Климаттык жана техногендик факторлордун таасири менен топурактагы жылуулук өткөрүү процессинин математикалык моделдеринин аналитикалык чечимдерин түзүү.

Изилдөөнүн предмети болуп тонгон жердин, тонгон топурактын эрип кетүү маселелерин чечүү үчүн аналитик-сандык ыкманын иштелип чыгышы, бул ыкма топурактын температурасын, температура өткөргүчтүк коэффициенттерин жана жылуулук алмашууну аныктоо боюнча маселелерди натыйжалуу чечүүгө мүмкүндүк берет.

Тапшырма 2.1 Математикалык моделдин аналитикалык чечимин аныктоо жолу менен тонгон жана талканган топурактардын температура өткөргүчтүк коэффициенттерин жана топурактагы температуранын маанилерин аныктоо, температуранын табигый байкоолорун колдонуу менен. Мисал катары Кумтор аймагында 3800 м бийиктикте жана 30 м тереңдикте жайгашкан скважинадагы температура байкоолорунун (ВН93-12, 23-июнь 1993-ж.) маалыматы каралган.

Чечүү ыкмасы. Аналитик-сандык ыкма иштелип чыккан, бул ыкма аналитикалык ыкманы жана аягындагы элементтердин ыкмасын айкалыштыруу менен негизделген. Анын мазмуну мындай: математикалык моделдин жакындатылган чечими МКЭ сыяктуу ар кандай базалык функцияларды колдонуп эмес, жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесинин сызыктуу көз каранды эмес жеке чечимдерин колдонуу менен түзүлөт. Натыйжада, жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесинин аналитикалык чечими алынат, ал белгиленген баштапкы жана чектик шарттарга жооп берет. Курулган аналитикалык чечим баштапкы шарттардан чыгып, трансценденттик теңдеме катары температура өткөргүчтүк

коэффициентин аныктоого мүмкүнчүлүк берет. Жылуулук өткөрүү процессинин математикалык модели тоңгон топурактын катмарында бир өлчөмдүү формада төмөнкүдөй сүрөттөлөт: (Фельдман..., Томиярдо...).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_T}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq h \\ \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \leq x \leq L \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$t = 0; \quad x \in [0, h]; \quad T_T = f_1(x); \quad x \in [h, L], \quad T_M = f_2(x). \quad (2)$$

$$x=0, \quad T_T = T_B, ; \quad x=h, \quad T_T = T_M = T_0; \quad x=L, \quad T_M = T_1. \quad (3)$$

h – терендик, тоңгон топурактын эрип кетүү деңгээли, L – топурактагы мезгилик эрип кетүү зонасынын чеги, анык түбөлүк мөңгү башталат, T_0, T_1, T_B – топурактын эрип кетүү температурасы, түбөлүк мөңгүнүн температурасы, айлана-чөйрөнүн температурасы, $f_1(x), f_2(x)$ – эриген жана тоңгон зона үчүн баштапкы шарттар, a_T, a_M – эриген жана тоңгон топурактын температура өткөргүчтүк коэффициенттери. Белгисиз кыймылдуу чекит, топурактын эрип кетүү чекитинин орду, Стефан теңдемеси менен аныкталат: Стефан теңдемеси бул таптакыр мөңгүдө жана эриген топурактагы жылуулук өткөрүү процессинин ордун көрсөтүп, эрип кеткен жана тоңуп калган топурактардагы жылуулук алмашуу шарттарын чагылдырат.

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x} \right]_{x=h} = q_0 w \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4)$$

Мында, T_T – эриген топурактын температурасы, T_M – тоңуп калган топурактын температурасы. Маселени жөнөкөйлөтүү үчүн суунун температурасы жана топурактын температурасы узак мөөнөттүү болжолдоодо, бирдей деп эсептелет. λ_T, λ_M – эриген жана тоңуп калган топурактардын жылуулук өткөргүчтүк коэффициенттери, w – топурактагы муздун саны, q_0 – муздун эрип кетүү жылуулугу. Бул тапшырманын аналитикалык жана сандык чечимин түзүү үчүн (1) - (4) ЧЭК (Чектелген элементтер ыкмасы) ыкмасынын идеясына ылайык, негизги функциялар катары жылуулук өткөргүчтүк теңдемесинин сызыктуу көз каранды эмес өзгөчө чечимдери тандалат. Өзгөчө чечимдин түрү [34] эмгегинен айырмаланып, өз алдынча тандалбайт, тескерисинче ал процессдин физикасына ылайык келиши керек, башкача айтканда, топурактын температурасы терендик боюнча төмөндөйт, ал эми убакыт боюнча мезгил-мезгили менен өзгөрөт

$$T_1(x, t, a) = e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x} \cos\left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x - 4\pi t\right), T_2(x, t, a) = e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x} \sin\left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}x - 4\pi t\right) \quad (5)$$

Каралып жаткан аймак жердин температуралык режимине ылайык аягына жеткиликтүү элементтерге бөлүнөт, башкача айтканда, температуранын өзгөрүшү тез жүргөн жерлер кичирээк элементтерге, ал эми температуранын өзгөрүшү жай жүргөн жерлер чоңураак элементтерге бөлүнөт. Ар бир элементте аналитикалык чечим ЧЭК (Чектелген элементтер ыкмасы) ыкмасы боюнча аналогия кылып төмөнкүдөй аныкталат.

$$\begin{aligned} T_T(x, t, a) &= N_i^1(x, t, a) * T_B + N_j^1(x, t, a) * T_0, \\ T_M(x, t, a) &= N_i^2(x, t, a) * T_0 + N_j^2(x, t, a) * T_1, \end{aligned} \quad (6)$$

мында

$$\begin{aligned} N_i^k(x, ta) &= \frac{T_2(x_j, ta) * T_1(x, ta) - T_2(x, ta) * T_1(x_j, ta)}{T_2(x_j, ta) * T_1(x_j, ta) - T_2(x_i, ta) * T_1(x_j, ta)}, \\ N_j^k(x, ta) &= \frac{T_2(x, ta) * T_1(x_i, ta) - T_2(x_i, ta) * T_1(x, ta)}{T_2(x_j, ta) * T_1(x_j, ta) - T_2(x_i, ta) * T_1(x_j, ta)}. \end{aligned} \quad (7)$$

ЧЭК(Чектелген элементтер ыкмасы) ыкмасынын формаларынын аналогдору, k – элементтин номери. «а» элементтин температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттери трансценденттик теңдеме (6) боюнча чечим катары табылат, баштапкы шартка (2) ылайык. Жердин температура талаасын башка убакытта табуу үчүн, бул жерде ЧЭЫдагы сызыктык алгебраалык теңдемелер системасын чечүү аркылуу эмес, аймактагы элементтердин ортосундагы чечимдердин айкалышуу шартынан табылат. ЧЭЫда айкалышуу шарты катары жылуулук өткөргүчтүк процессинин үзгүлтүксүздүгү колдонулат. Бул иште айкалышуу шарты катары биринчи жолу аймактын элементтеринин ортосундагы жылуулук алмашуу, башкача айтканда, конвективдик жылуулук өткөрүү шарты каралат. Мындай ыкманын кыйынчылыгы чөйрө менен топурак ортосундагы жылуулук алмашуу коэффициентинин жана ар түрдүү топурактар арасындагы жылуулук өткөрүү коэффициентинин белгисиздигинде болчу, башкача айтканда, аймактагы элементтердин ортосундагы жылуулук алмашуу коэффициентинин белгисиздигинде. Элементтердин чекиттеринде жылуулук алмашуу коэффициенттери ар башка болот жана алар элементтин ар түрдүү жактарынан келип жаткан жылуулук агымдарынын өлчөмүнө көз каранды. Баштапкы шартты жана чектөө теңдемесинин үчүнчү түрүнөн алынган температура боюнча аналитикалык чечимдерди колдонуп, жылуулук алмашуу коэффициенттери табылат. Температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттерин жана жылуулук алмашуу коэффициенттерин аныктагандан кийин, топурактын температура талаасы келечектеги убакыттар үчүн аймактын элементтеринин ортосундагы температура агымдарынын айырмасы шартынан табылат. Убакыт кадамы өтө чоң болбойт, физикалык процесстин негизинде тандалып, топурактын температурасынын өзгөрүшү аз болушу керек. Андан кийин, кийинки убакыт кадамында эсептелген температуранын маанилери баштапкы шарт катары колдонулуп, температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттерин, жылуулук алмашуу коэффициенттерин жана топурактын температурасын аныктоо процессине кайрадан өтүлөт. Аймактын чекиттеринде же элементтеринин чекиттеринде эки жылуулук алмашуу шарты коюлат, башкача айтканда, суудан келген жылуулук агымын жана топурактан келген жылуулук агымын эсептөө үчүн эки шарт коюлат.

$$\frac{\partial T_B}{\partial x} = \gamma_1^- (T_B - T_1), \quad x = 0. \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_T}{\partial x} = \gamma_1^+ (T_T - T_B), \quad x = 0. \quad (9)$$

Мында (8) шарты чөйрөдөн же суудун жанынан келип жаткан жылуулук агымын билдирет, ал эми (9) шарты топурактын агымын билдирет, негиздин топурагынан, башкача айтканда, жүк сактоочу чогултма табигый топурак болуп саналат. T_B – суу буферинин температурасы же чөйрөнүн температурасы; T_1 – суунун негизиндеги топурактын температурасы же күндүн бетиндеги топурактын температурасы

$T_T = T^k(x, t, a) = N_i^k(x, t, a) * T_i + N_j^k(x, t, a) * T_j$, Аналитикалык чечим топурактын температурасы k -элементте, ал аркылуу ар бир элемент үчүн температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттери табылат; γ_1^-, γ_1^+ — суу (чөйрө) менен топурак, топурак менен суу (чөйрө) ортосундагы жылуулук алмашуу коэффициентинин аналогдору. Жылуулук

алмашуу коэффициенттери, баштапкы температура шарттарын жана $t_0 = 0$ учурда эсептелген температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттерин колдонуп табылат.

$$\gamma_1^- = \frac{\partial T_B / \partial x}{T_B^{(0)} - T_1^{(0)}} , \quad \gamma_1^+ = \frac{\partial T_F / \partial x}{T_1^{(0)} - T_B^{(0)}} \quad (10)$$

Жылуулук алмашуу коэффициенттеринин табылган маанилерин колдонуп, кийинки убакыттардагы температуралардын маанилери биринчи элемент үчүн төмөндөгүдөй табылат:

$$T_1 = \frac{(T_B \gamma_1^- - \partial T_B / \partial x)}{\gamma_1^-} , \quad T_2 = \frac{(-\frac{\gamma_1^+}{\gamma_1^-} * \frac{\partial T_B}{\partial x} - \frac{\partial N_i}{\partial x} * T_1)}{\partial N_j / \partial x} \quad (11)$$

Кийинки элементтердин топурактын температурасы айкалышуу шартынан, башкача айтканда, элементтердин чекиттериндеги температура агымдарынын айырмасын билдирген теңдемеден табылат. "1" жана "2" элементтеринин чекиттеринде төмөндөгүдөй теңдеме бар:

$$\frac{\partial T_F^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial T_F^{(2)}}{\partial x} = \gamma_2^-(T_2 - T_3) - \gamma_2^+(T_2 - T_1)$$

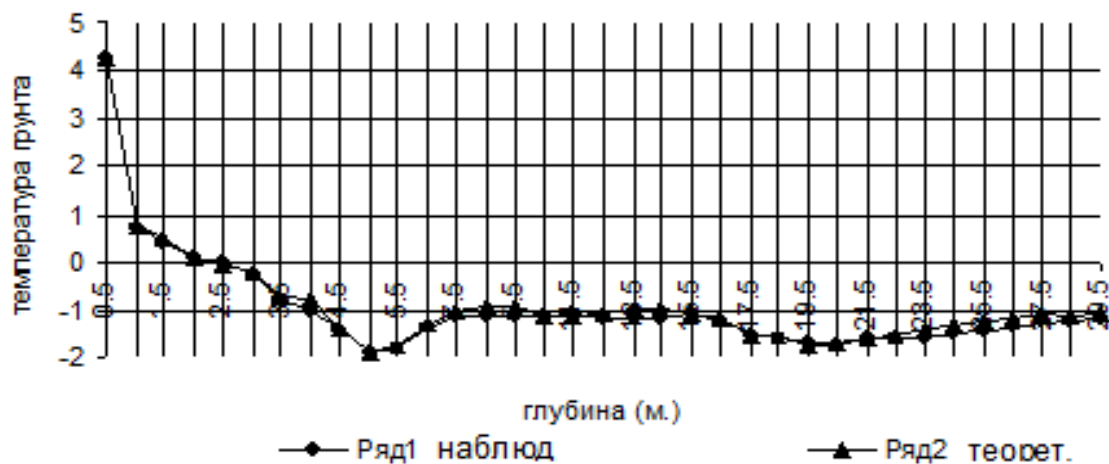
же

$$T_3 = \frac{\gamma_2^- T_2 - \gamma_2^+ (T_2 - T_1) - \frac{\partial T_F^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial x} * T_2}{\gamma_2^- - \partial N_j^{(2)} / \partial x} . \quad (12)$$

Жылуулук алмашуу коэффициенттеринин аналогдору γ_2^- , γ_2^+ айкалышуу шарты боюнча табылат, баштапкы температура шартын колдонуу менен:

$$\gamma_2^- = \frac{\partial T_F^{(1)} / \partial x}{T_2^{(0)} - T_3^{(0)}} , \quad \gamma_2^+ = \frac{\partial T_F^{(2)} / \partial x}{T_2^{(0)} - T_1^{(0)}} \quad (13)$$

Бул алгоритмди кайталап, топурактын температурасынын кийинки маанилери табылды. Жогоруда баяндалган алгоритмге ылайык, 1993-жылдын 23-июнундагы ВН93-12 суу скважинасынан алынган температура байкоолоруна негизделген тапшырма чечилди. Скважинанын тереңдиги 30 м болгон. Температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттери жана ар түрдүү учурлар үчүн температуранын маанилери аныкталды. Алынган натыйжалардын тактыгы ошол скважинадан алынган температура байкоолору менен салыштырууга негизделген. Салыштыруу 1.1 сүрөттө көрсөтүлгөн. Скважинанын тереңдиги 17 элементке бөлүнгөн



Сүрөт 2.1. Топурактын температурасы

Таблица 2.1де (2 мге чейин) жана тоңгон топурактын (2 мден терең) температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттерин аныктоо боюнча алынган натыйжалар көрсөтүлгөн, трансценденттик теңдемелердин чечими катары. Биринчи сапта элементтердин номери берилген, экинчи сапта тиешелүү топурак тереңдиги, үчүнчү сапта тиешелүү температура өткөрүмдүүлүк коэффициентинин мааниси $a^2 = k/ \text{ср.}$ Кичине бөлүү активдүү катмар аймагында жүргүзүлдү, бул жерде температуранын өзгөрүшү байкалат, ал эми чоң бөлүү түбөлүктүү тоңуу аймагында жүргүзүлдү, бул жерде температуранын өзгөрүшү анчалык маанилүү эмес.

Температура өткөрүмдүүлүк коэффициентинин маанилери

№ №	1	2	3	4	5
X (м)	0.5 - 1.5	1.5 - 2.5	2.5 - 3.5	3.5 - 4.5	4.5 - 6.5
a^2	$0.272 \cdot 10^{-4}$	$0.145 \cdot 10^{-4}$	$0.247 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.500 \cdot 10^{-4}$
№ №	6	7	8	9	10
X (м)	6.5 - 8.5	8.5 - 10.5	10.5 - 12.5	12.5 - 14.5	14.5 - 16.5
a^2	$0.143 \cdot 10^{-4}$	$0.339 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.164 \cdot 10^{-4}$
№ №	11	12	13	14	15
X (м)	16.5 - 18.5	18.5 - 20.5	20.5 - 22.5	22.5 - 24.5	24.5 - 26.5
a^2	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.209 \cdot 10^{-4}$	$0.240 \cdot 10^{-4}$	$0.196 \cdot 10^{-4}$	$0.259 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2.1 Келтирилген ыкманын бир өзгөчөлүгүн белгилеп өтүү керек. Эсептөө натыйжаларын алуу учурунда жылуулук өткөргүчтүк коэффициенти боюнча түз маалымат колдонулган эмес, ал эми түз эмес маалымат – температураны байкоо боюнча маалыматтар колдонулган. Бул ыкма, кадимки сандык ыкмаларынан айырмаланып, аймакты дискретизациялоо физикалык чөйрөнүн түзүлүшүнө жараша ар кандай элементтердин өлчөмдөрүндө жүргүзүлөт жана алгебралык теңдемелер системасын чыгаруу жүргүзүлбөйт, башкача айтканда, туундуларды жана интегралдарды жакындатылган түрдө эсептөө операциялары жүргүзүлбөйт, алар аналитикалык түрдө эсептелет.

Тапшырма 2.2. Жогоруда баяндалган алгоритмге ылайык, температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттерин, элементтер ортосундагы жылуулук алмашуу

коэффициенттерин жана ар түрдүү убакыттарда температуранын маанилерин аныктоо боюнча тапшырма каралат. Мисал катары башка байкоо скважинасынын тереңдиги 20 м болгон маалыматтары каралат. Баштапкы маалыматтар катары термисторлордон алынган скважинанын тереңдиги боюнча топурактын температурасынын маанилери алынган. Бул жерде 20 м тереңдиктеги аймак 10 элементке тең эмес бөлүнөт. Таблица 1.2де температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттеринин маанилери, трансценденттик теңдеме (6) боюнча чечимдер катары $\varepsilon = 0.002$ тактык менен табылган. Таблица 2.2ден көрүнүп тургандай, температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттеринин маанилери 7.53 м тереңдикке чейин туруктуу болуп, 0.2765ке барабар, ал эми 7.53 м ден 20 м ге чейин дагы туруктуу болуп, 4.402ге барабар. Таблица 2.3те элементтердин чекиттериндеги жылуулук алмашуу коэффициенттеринин маанилери (13) формуласы боюнча эсептелген.

Таблица 2.2.

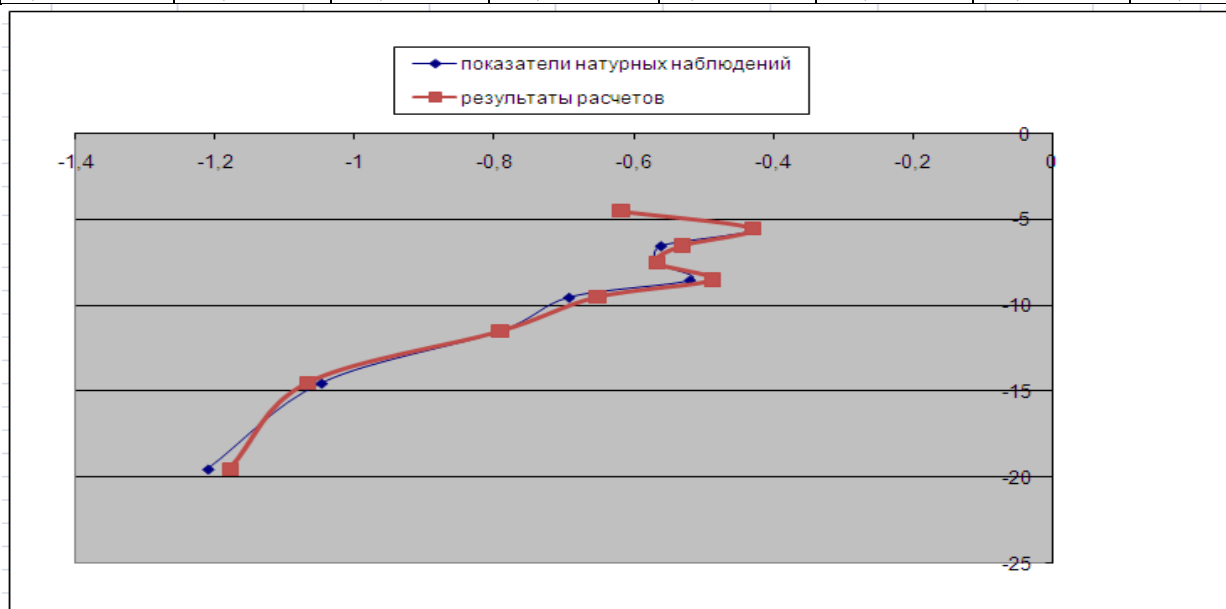
Температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттеринин маанилери.

x	4.53-5.53	5.53-6.53	6.53-7.53	7.53-8.53	8.53-9.53	9.53-11.53	11.53-14.53	14.53-19.53
a	0,2765501	0,27655	0,27655	4,40155	4,40155	4,40155	4,40155	4,40155

Таблица 2.3

Элементтердин чекиттериндеги жылуулук алмашуу коэффициенттеринин маанилери

x	4,53	5,53	6,53	7,53	8,53	9,53	11,53	14,53
M[k]	-	-	-	-	-	-	-	-
M1[k]	0,5380083	17,85291	9,311128	-100,3299	54,04002	5,554611	17,77161	5,358785
M1[k]	0,0721688	19,10033	52,69399	25,18457	3,698798	25,88969	-3,78001	10,96662



Сүрөт 2.2. Топурактын температурасы

Таблица 2.3түн экинчи сапта жылуулук алмашуу коэффициенттери берилген, алар күндүн бетинен же суунун түбүнөн келип жаткан жылуулук агымын мүнөздөйт, ал эми үчүнчү сапта түбөлүктүү тоңуу тарабынан келип жаткан жылуулук агымын мүнөздөгөн коэффициенттер берилген. Табылган жылуулук-физикалык параметрлерди колдонуп,

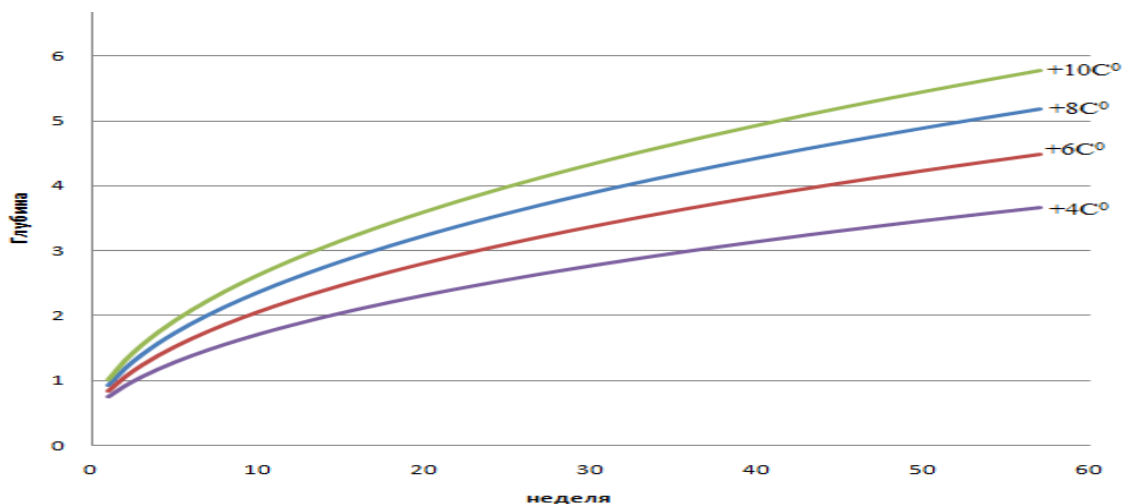
топурактын температурасын ар түрдүү убакыттарда жана тереңдиктерде (12) жана (13) формулалары аркылуу аныктоо жүргүзүлдү. Сүрөт 2.2де теориялык жол менен эсептелген температуранын графиктери жана табигый байкоолордун маалыматтары көрсөтүлгөн. Графиктен көрүнүп тургандай, алар дээрлик дал келүүдө. Бул ыкманын жана алгоритмдин тууралыгын, топурактын температурасын, температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттерин жана жылуулук алмашуунун коэффициенттерин аныктоо үчүн туура колдонулушун тастыктайт.

Тапшырма 2.3 Суу жыйноочу жай калдыктар жана цианиддүү суулар менен толтурулат, алар алтын-кен өндүрүүчү фабрикадан алынган, түбөлүктүү тоңуу шарттарында жайгашкан. Суу температурасынын оң болушу менен суу түбүндөгү тоңгон топурак эрий баштайт. Топурактын температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттерин жана суунун түбүндөгү тоңгон топурактын эриген алдыңкы чекитинин кыймылын аныктоо керек, бул жылуулук өткөрүүчү баштапкы-мейкиндиктик маселени чечүү аркылуу жүргүзүлөт.

Чечүү ыкмасы. Чечүү аймагын, аймактын өлчөмүнөн көз карандысыз түрдө эки элементтен турган деп карайбыз. Биринчи элемент эритилген топурак аймагы болот. Экинчи элемент — тоңгон топурак аймагы. Эки элементтин өлчөмдөрү, убакыттын өтүшү менен, суунун түбүндөгү температуранын таасири менен тоңгон топурактын эриүүсүнө байланыштуу өзгөрөт. Тоңгон топурактын эриүү процесси үчүн математикалык модель (1)-(4) формулалар менен берилет. Мындай математикалык моделдин аналитикалык чечимдерин куруу мурунку тапшырмаларда каралган.

Башталышында суу жыйноочу жай толтурула баштаганда, биринчи элементтин (эриген зона) узундугу экинчи элементке салыштырмалуу кичинекей болот. Убакыттын өтүшү менен, бул элемент кеңейип, эриген топурак суу түбүндөгү температуранын таасири менен көбөйөт, ал эми экинчи элемент кыскарышы керек. Кыймылдап турган чекит (эриген алдыңкы чекит) биринчи даражадагы дифференциалдык теңдемени (4) чечүү жолу менен сандык түрдө аныкталат, Рунге-Кутта ыкмасы менен. Бул ыкманын өзгөчөлүгү төмөнкүчө: ар дайым үч белгилүү температура колдонулат: суу сактагычтын түбүндө суу температурасы T_b туруктуу болот, эриген чекитте туруктуу $T_0 = +0.01^{\circ}\text{C}$ температурасы болот, бул чекит эриген алдыңкы чекит менен жылып отурат, жана тереңдиктин акыркы чекитинде L , бул жерден туруктуу терс температура (түбөлүктүү тоңуу) $T_1 = -1.86^{\circ}\text{C}$ сакталат. Кандай гана болбосун, ар бир убакыт үчүн алынган температураларды баштапкы шарт катары колдонуп, ар бир элемент үчүн температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттери транценденттик теңдеме (6) аркылуу сандык түрдө аныкталат.

$N_i^1(x, t, a) * T_b + N_j^1(x, t, a) * T_0 = T^*$, $N_i^2(x, t, a) * T_0 + N_j^2(x, t, a) * T_1 = T^{**}$ Мында T , T^* — температуранын орто маанилери ар бир элементтин ортосунда. **Ижилдөөлөрдүн натыйжалары.**** Бул алгоритм белгилүү бир мисалда сыноодон өткөрүлдү, бул жерде суу сактагычтын түбүндөгү суу температурасы туруктуу деп алынган, $+4^{\circ}\text{C}$, $+6^{\circ}\text{C}$, $+8^{\circ}\text{C}$, $+10^{\circ}\text{C}$ аралыгы боюнча бир жылдын ичинде эсептөөлөр жүргүзүлдү. Эсептөөлөр жогоруда баяндалган алгоритмге ылайык жасалды. Сандык эксперименттин натыйжалары сүрөт 1.2.1де берилген. Сүрөт 1.2.1ден көрүнүп тургандай, суу температурасы $+4^{\circ}\text{C}$ болгондо, жыл бою эриген тереңдик 3,65 мге жетет, ал эми $+6^{\circ}\text{C}$ болсо, эриген тереңдик 4,48 мге жетет.

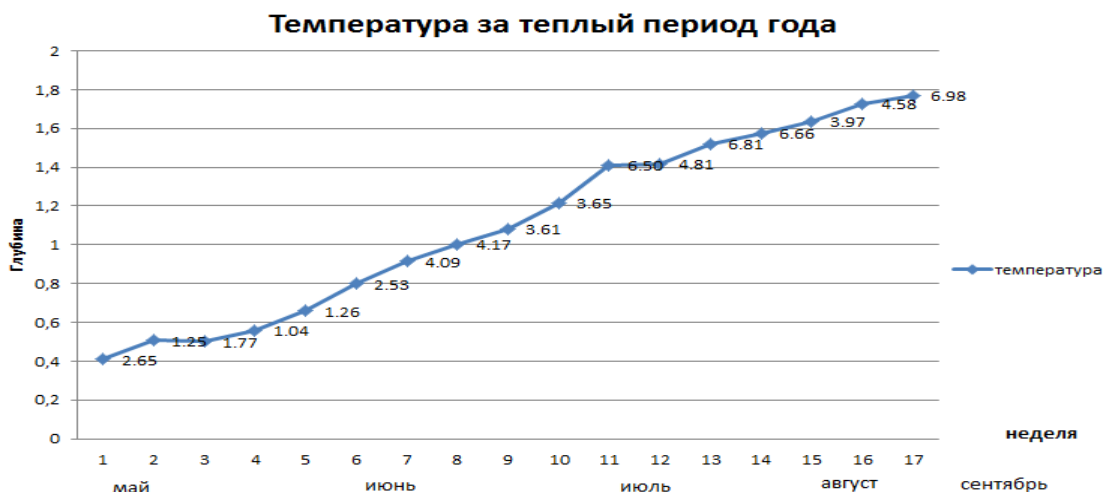


Сүрөт 2.3. Топурак түбүнүн эриген тереңдиги суу температурасына жараша. Алынган натыйжалар (Назаров Л.А., Назарова Л.А. (2015), Востриков В.М. (2015) иштеринен алынган маалыматтар менен шайкеш келет, бул сунушталган ыкма менен математикалык моделдин ишке ашырылышынын тактыгын тастыктайт.

Тапшырма 2.4. Топурактын түбүндөгү түбөлүктүү тоңдуруунун эриген тереңдигин аныктоо керек, аны жылуулук мезгилинде, сырттагы температуранын таасири менен жана температура өткөрүмдүүлүк коэффициентин идентификациялоо аркылуу. Түбөлүктүү тоңдуруунун температурасынын таасири менен тоңгон топурактын эрүүсүн изилдөө маселеси гидротехникалык курулуштардын туруктуулугун изилдөөдө маанилүү маселелердин бири болуп саналат, бул курулуштар түбөлүктүү тоңуу шарттарында жайгашкан жана климаттын жылышы боюнча маселелерди изилдөөгө да тиешелүү. Мисал катары 4000 м бийиктиктеги түбөлүктүү тоңуу шарттарында жайгашкан топурактар каралат. Сырттагы температуранын маанилери Кумтор метеостанциясынын байкоо маалыматтарынан алынган. Жылуулук мезгили май айынан сентябрга чейин беш айга чейин созулат. **Чечүү ыкмасы.** Талаа жана тоңгон топурактардын жылуулук өткөрүмдүүлүгү боюнча математикалык модельге негизделген (1)-(4) жогоруда баяндалган алгоритмге ылайык, температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттери моделдин баштапкы шарты (2) аркылуу аныкталат. Андан соң жылуулук өткөрүмдүүлүгү боюнча аналитикалык чечимди аймакты эритүү жана тоңгон аймак үчүн (6) түзүү керек. Бул аналитикалык чечимдерди колдонуп, сандык түрдө сырттагы температуранын таасири менен тоңгон топурактын эриген тереңдигин аныктоо үчүн эритилген жана тоңгон топурак аймактарынын чекиттеринде температура агымдарын бириктирүү шартын Стефан теңдемесин чыгаруу аркылуу эсептөө жүргүзүлөт.

Изилдөөлөрдүн натыйжалары. Бул алгоритм Кумтордун шарттарын имитациялоочу мисалда сыноодон өткөрүлдү, башкача айтканда 2011-жылдагы жылуулук мезгили үчүн сырттагы температура колдонулду, топурак 20 м тереңдикте жана түбүндө түбөлүктүү тоңуу башталат, ал эми температура -1.86°C . Жылуулук-физикалык касиеттер: λ_T , λ_M , w , q_0 болжол менен төмөнкүчө алынды: $\lambda_T = 1.21 \text{ ккал}/(\text{ч}\cdot\text{м}\cdot^{\circ}\text{C})$, $\lambda_M = 1.54 \text{ ккал}/(\text{ч}\cdot\text{м}\cdot^{\circ}\text{C})$, $w = 0.11$, $q_0 = 650$. Эсептөө натыйжасында, ар бир убакыт кадамында аналитикалык чечим менен дал келтирилген маалыматтарга негизделип, температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттери эритилген жана тоңгон топурактар үчүн аныкталды. Алар убакыттын өтүшү менен дээрлик өзгөрүүсүз болуп, $a = 1.893 \text{ м}^2/\text{ч}$ деп калды. Жылуулук мезгилиндеги сырттагы температуранын таасири менен түбөлүктүү тоңуу

аймагынын эриген тереңдигин аныктоо боюнча эсептөө натыйжалары 2.4 сүрөттө көрсөтүлгөн.



Сүрөт 2.4 жылуулук мезгилинде түбөлүктүү тоңуунун эриген тереңдиги. Рис. 2.4төн көрүнүп тургандай, май айынан сентябрь айына чейин 5 ай ичинде тоңгон топурактын эриген тереңдиги 1.8 м жетет. Кумтор аймагындагы эриген тереңдик боюнча байкоолор 1.78 мден 2.6 мге чейин өзгөрөт, бул алынган натыйжалардын тактыгын жана сунушталган ыкманын тууралыгын тастыктайт.

Тапшырма 2.5 суунун топтомунун түбүндө топурактын эрүүсү процессин карап чыгуу, суу агымынын жана суу температурасынын таасири менен. Суу калдыгынын түбүндөгү температура-фильтрациялык процесс бир өлчөмдүү процесс катары каралган. **Математикалык модель.** Эгерде топурактын температурасы жана фильтрацияланган суунун температурасы бирдей деп эсептелсе, анда Фурье-Кирхгофтон моделин кабыл алат (Фельдман...Томиардо...). Талаа топурагында суу агымы эске алынат, ал эми тоңгон топурак аймагында фильтрация эске алынбайт. Мындай процесс үчүн математикалык модель төмөнкүдөй болот:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_T}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2} - v \frac{\partial T_T}{\partial x}, 0 \leq x \leq h. \\ \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \leq x \leq L \end{aligned} \right\} \quad (2.5.1) \quad (2.5.2)$$

Баштапкы- чектөө шарттары төмөнкүдөй:

$$t = 0; \quad x \in [0, L]; \quad T_M = f_1(x). \\ x=0, \quad T_T = T_b,$$

$$\begin{aligned} x=h, \quad T_T &= T_M = T_0 \\ x=L, \quad T_M &= T_1, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x} \right]_{x=h} = q_0 w \gamma \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (2.5.4)$$

мында T_T – эритилген топурактын температурасы, T_M - муздак топурактын температурасы, баштапкы чектик маселенин(2.5.1) - (2.5.2) чыгарылышы болуп саналат; T_b - көл түбүндөгү температура; a_T , a_M , λ_T , λ_M - эритилген жана муздак топурактагы температура өткөрүмдүүлүк жана жылуулук өткөрүмдүүлүк коэффициенттери; h - эритилишинин тереңдиги; w - топуракта муздун көлөмү; q_0 - муздун эритилишинен чыккан жылуулук, γ - топурактын тыгыздыгы, v – суу көлдөн фильтрациянын ылдамдыгы.

Чечүү ыкмасы. Баштапкы-чектик маселе (2.5.1)-(2.5.3) үчүн аналитикалык-каражаттуу чечим курулат, ал маселенин баштапкы жана чектик шарттарына жооп берет, айрыкча эритүүчү зона жана тоңдурулган зона үчүн. Эритүүчү зона үчүн негизги функциялар катары жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесинин (2.5.1) сызыктуу көзкарандысыз бөлүктүү чечимдери колдонулат, ал эми тоңдурулган топурак зонасы үчүн (2.5.2) теңдемеси колдонулат. Эритүүчү зона үчүн аналитикалык чечимди курууда суунун фильтрациясы эске алынып, төмөнкүдөй өзгөртүү колдонулат.

$$T(x, t, a) = e^{\frac{v(x-vt)}{2a}} U(x, t, a), \quad (2.5.5)$$

$$(1.3.1) \text{ теңдемени өзгөртөт } \frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (2.5.6)$$

$U(x, t, a)$ – жаңы белгисиз функция. Ал тиешелүү баштапкы жана чектик маселе (2.5.1)-(2.5.3) боюнча чыгарылыш катары (2.5.5) түрдө табылат, a – температуранын өткөргүчтүк коэффициенти. Анда аналитикалык чыгарылыш баштапкы жана чектик маселе (2.5.1)-(2.5.3) катары төмөнкүдөй жазылат.

$$T_T(x, t, a) = e^{\frac{v(x-vt)}{2a}} (N_i(x, t, a)U_i + N_j(x, t, a)U_j), \quad (2.5.7)$$

Мында $U_i = T_i e^{\frac{-v_i(x_i-v_i t)}{2a}}$, $U_j = T_j e^{\frac{-v_j(x_j-v_j t)}{2a}}$. Баштапкы мөңгүлүк жердин аймагы L узундукка ээ болуп, эки элементке бөлүнөт. Биринчи элемент жер бетинен башталып, анык эмес жана кыймылдуу болгон таянып түшүү чегинен чектелет. Экинчи элемент таянып түшүү чегинен башталып, түпкүрүндөгү L тереңдиктеги түбөлүк мөңгүгө чейин созулат, анда суунун фильтрациясы жок. Убакыттын өтүшү менен элементтердин өлчөмдөрү өзгөрүп, бул процесстер температуранын жана суу фильтрациясынын таасири менен болот. Кыймылдуу чектөөчү чекти (таянып түшүү чегин) биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемеси (2.5.4) Рунге-Кутта ыкмасы менен чечүү аркылуу сандык түрдө аныктоого болот. Убакыт боюнча кадам бир күнгө тең алынган. Чечимдер бир жылдык мөөнөткө жүргүзүлгөн. Суу жыйноочу жайдын түбүндө температура туруктуу сакталат, ал суу температурасына барабар, ал эми таянып түшүү чегинде температура туруктуу болот ($+0.01^\circ\text{C}$, муздун эритилүү температурасы), ал таянып түшүү чегинен бирге кыймылдайт. Тереңдик L боюнча акырында туруктуу терс температура сакталат (түбөлүк мөңгү) -1.86°C . Ар бир убакыттын ичинде температуранын өзгөрүүлөрүнө жараша, сандык түрдө температура өткөрүүчү коэффициенттерди табуу үчүн трансценденттик теңдемелерди чыгаруу керек

$$N_i^{(2)}(x, t, b) * T_b + N_j^{(2)}(x, t, b) * T_0 = T^*,$$

$$e^{\frac{v(x-vt)}{2a}} (N_i^{(1)}(x, t, a) * U_0 + N_j^{(1)}(x, t, a) * U_1) = T^{**},$$

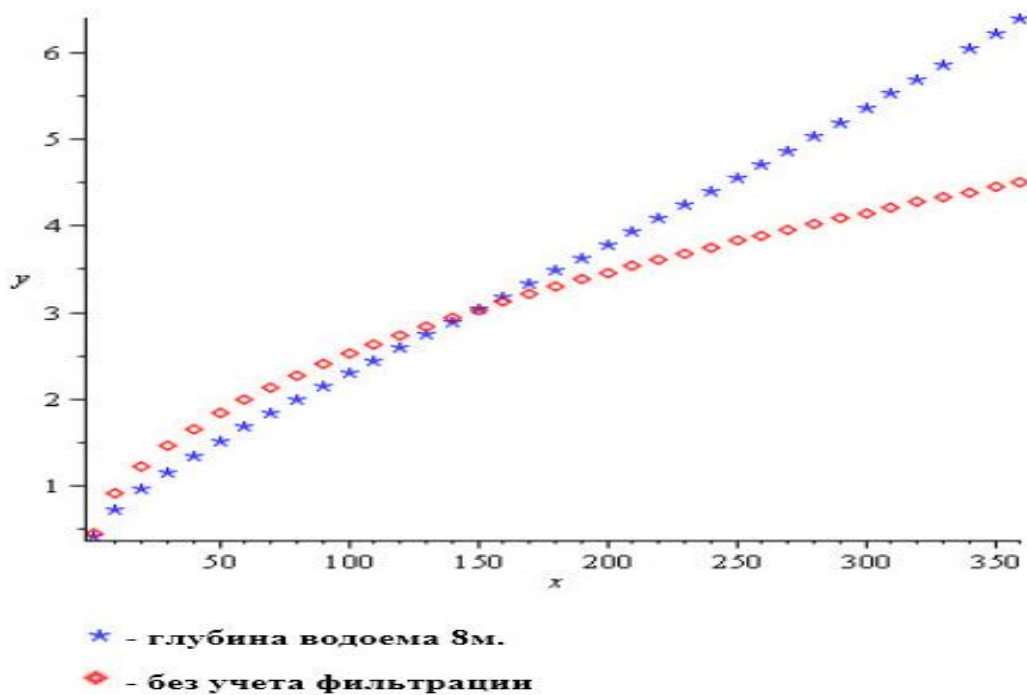
Мында T^* жана T^{**} — бул ар бир элементтин ортосундагы температуранын орточо маанилери. Суу фильтрациясынын таасирин жамгырдын түбүнө тийгизген таасирин иллюстрациялоо үчүн, ар кандай чечим варианттарын карап чыктык: суу көлөмүн эске албаган жана суу фильтрациясын эске алган.

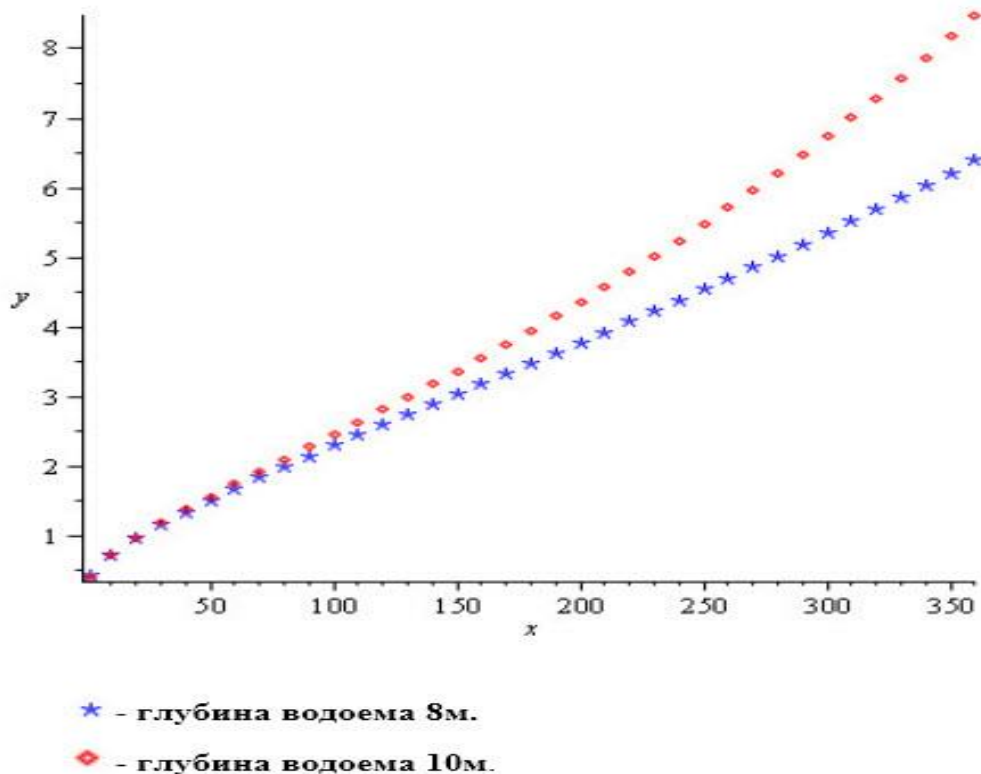
Вариант 1. суу жыйноочу жай түбүндөгү процесстин эрүүсү суу фильтрациясын эске албастан каралат, башкача айтканда, суу жыйноочу жайдын суу деңгээли эске алынган эмес, болгону анын температурасы каралган. Баштапкы маалыматтар төмөнкүдөй алынган: $\lambda_T = 1.24$, $\lambda_M = 1.54$, $L = 21$ м. Суу жыйноочу жай түбүндөгү суу температурасы $+60^\circ\text{C}$

деп кабыл алынган. Натыйжалар көрсөткөндөй, бир жылдын ичинде эрүү тереңдиги 4.51 м жеткен.

Вариант 2. Суу жыйноочу жай түбүндөгү процесстин эрүүсү суу тереңдиги $H = 8$ м жана суу фильтрациясы эске алынып каралат. Фильтрациянын коэффициенти $k_f = 0.0312$, $m_r = 0.22$ деп кабыл алынган. Фильтрациянын ылдамдыгы Дарси формуласынан эсептелген. Бул учурда бир жылдын ичинде эрүү тереңдиги 6.45 м жеткен. Эсептөө натыйжаларынын графиги 2.5.1 сүрөтүндө көрсөтүлгөн.

Вариант 3. Бул вариантта ошол эле учур каралган, бирок суу жыйноочу жайдын тереңдиги эки метрге көбүрөөк, башкача айтканда, тереңдик $H = 10$ м деп кабыл алынган. Бул учурда фильтрациянын ылдамдыгы мурдагы вариантка караганда жогору болот жана бир жылдын ичинде эрүүнүн тереңдиги 8.58 м жеткен. Суу сактоочу жайдын суу деңгээлин эки метрге көтөрүү, фильтрацияны эске алуу менен, мөңгүлүк жердин эрүү зонасын 2.13 мге кеңейтти.





Сүрөт. 2.5.1. Эрүүнүн тереңдиги калдыктарды сактоочу жайдын түбүндөгү суунун деңгээлине карата.

Эсептик эксперименттен көрүнүп тургандай, суу калдыгынын түбүндөгү эрүүнүн тереңдиги пруддагы суу деңгээлине же суу фильтрациясынын ылдамдыгына түздөн-түз көз каранды. Башкача айтканда, эгерде суу калдыгындагы суу деңгээли жогору болсо, анда мөңгүлүк жердин эрүү зонасынын өлчөмү дагы чоң болот. Калдыктарды сактоочу жайларды колдонууда жана айлана-чөйрөнү экологиялык жактан коргоо максатында, калдыктарды сактоочу жайдын түбүндөгү суу фильтрациясын эске алуу менен суу калдыгындагы суу деңгээлин көңүлгө алуу зарыл.

Үчүнчү бөлүмдө мөңгүлүк жердин эритилүү процессин математикалык моделдөө каралат, экинчи бөлүмдө каралган математикалык моделден айырмаланып, бул жерде мөңгүлүк жердин эритилиш процесси эритүү зонасында баштапкы-чектөөчү маселе катары жана мөңгү зонасында (1)-(3) түрүндө өзүнчө моделденет. Белгисиз кыймылдуу чектөөчү чекти Стефан теңдемеси (4) катары чечүү аркылуу табууга болот. Бул бөлүмдө мөңгүлүк жердин эритилиши процесси бир теңеме менен баштапкы-чектөөчү шарттар менен моделденет. Белгисиз кыймылдуу чектөөчү чекти нөлдүк изотерманын жайгашуусу аркылуу табууга болот. Мындай ыкма туруктуу абалга өтүү убактысын натыйжалуу табууга жана баштапкы жана чектик шарттардын эритүү процесси боюнча таасирин талдоого мүмкүнчүлүк берет.

Маселенин коюлушу.

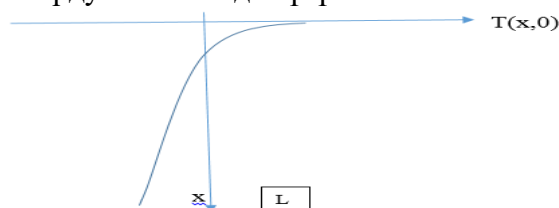
Вариант 1. Мөңгүлүк жердин эритилиши процесси жылуулук транспортунун бир аймакта чектүү жана баштапкы шарттардын өзгөрүшүнө таасир этүүчү маселе катары каралат. Эрүүнүн чеги нөлдүк изотерманын жайгашуусу аркылуу аныкталат. Математикалык түрдө маселе төмөнкүдөй формулировкаланат:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

Аймактык шарттарды эске алуу менен

$$T(0, t) = T_1, \quad T(L, t) = T_2 \quad (3.2)$$

Баштапкы температуралык шарттар жердин түбүндөгү температурасы боюнча байкоолордун негизинде түзүлөт.



Сүрөт 3.1. Баштапкы температуралык шарт
Аналитикалык түрдө баштапкы шарт параболанын бир тармагы түрүндө жакындатылды:

$$T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c \quad (3.3)$$

Туруктуу коэффициенттер a , b , c — жердин температурасы боюнча байкоолордун негизинде эң кичине квадраттар ыкмасы менен аныкталат. Аналитикалык чечим маселе төмөнкүдөй эки кошулуучудан түзүлөт:

$$T(x, t) = T_{CT}(x) + T_{HC}(x, t) \quad (3.4)$$

$T_{CT}(x)$ — стационардык бөлүгү, ал чектик шарттардын негизинде түзүлөт, $T_{HC}(x, t)$ — туруктуу эмес бөлүгү. Ал баштапкы жана бирдей чектик шарттардын негизинде түзүлөт жана төмөнкүдөй көрүнүшкө ээ:

$$T_{CT}(X) = Ax + B = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1, \quad T_{HC}(X, t) = \sum_i^n b_n e^{-\frac{\pi n^2}{L} a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \overline{\varphi(x)} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx = \\ &= \frac{2a}{L} \left[-\frac{L^3}{\pi n} (-1)^n + 2 \frac{L^3}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right] + \\ &+ \frac{2}{L} (b - A) \left[-\frac{L^2}{\pi n} (-1)^n \right] + \frac{2}{L} (c - B) - \left[\frac{L}{\pi n} ((-1)^n - 1) \right]. \end{aligned}$$

$$\overline{\varphi(x)} = ax^2 + bx + c - (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1,$$

$$T_{CT}(X) = Ax + B = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1, \quad T_{HC}(X, t) = \sum_i^n b_n e^{-\frac{\pi n^2}{L} a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \overline{\varphi(x)} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx = \\ &= \frac{2a}{L} \left[-\frac{L^3}{\pi n} (-1)^n + 2 \frac{L^3}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right] + \\ &+ \frac{2}{L} (b - A) \left[-\frac{L^2}{\pi n} (-1)^n \right] + \frac{2}{L} (c - B) - \left[\frac{L}{\pi n} ((-1)^n - 1) \right]. \end{aligned}$$

$$\overline{\varphi(x)} = ax^2 + bx + c - (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1,$$

$$T_{CT}(X) = Ax + B = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1, \quad T_{HC}(X, t) = \sum_i^n b_n e^{-\frac{\pi n^2}{L} a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \overline{\varphi(x)} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx =$$

$$= \frac{2a}{L} \left[-\frac{L^3}{\pi n} (-1)^n + 2 \frac{L^3}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right] +$$

$$+ \frac{2}{L} (b - A) \left[-\frac{L^2}{\pi n} (-1)^n \right] + \frac{2}{L} (c - B) - \left[\frac{L}{\pi n} ((-1)^n - 1) \right].$$

$$\overline{\varphi(x)} = ax^2 + bx + c - (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1,$$

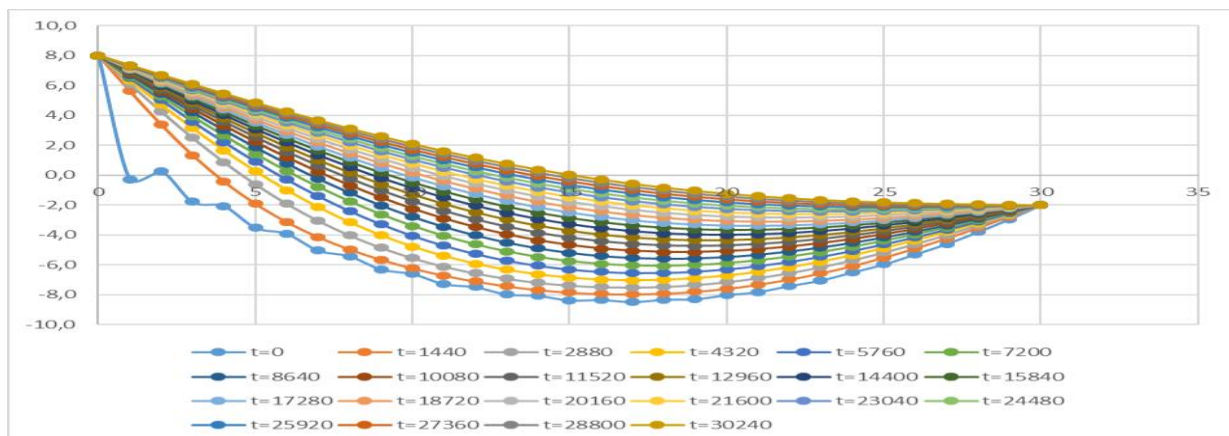
Берилген чектик маселенин аналитикалык чечими баштапкы-чектөөчү шарттарга ылайык
төмөнкүдөй жазылат

$$T(x, t) = T_{cm}(x) + (x, t) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1 + \sum_i^n b_n e^{-\left(\frac{\pi^* i}{L}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi^* i}{L} x\right) \quad (3.5)$$

Аналитикалык чечим (3.5) математикалык моделине (3.1) - (3.3) негизделген төмөнкү маселелер каралган:

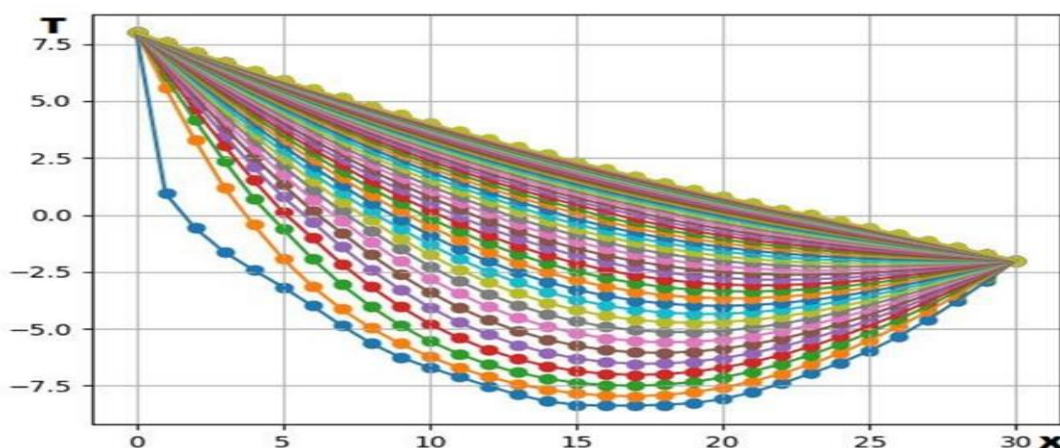
Тапшырма 3.1. суу жыйноочу жай түбүндөгү жердин температурасынын баштапкы шарты төмөнкүдөй мааниге ээ болгон:

1. $x_1 = 0$ м, $T_{10} = +20^\circ\text{C}$ **2.** $x_2 = 1.7$ м, $T_{00} = 0^\circ\text{C}$ **3.** $x_3 = L = 30$ м, $T_{20} = -20^\circ\text{C}$
суу жыйноочу жайдын негизиндеги топурак кум ташы деп эсептелет, анын температура өткөрүмдүүлүгү коэффициенти 0.0042832 м²/саатка барабар. Андан кийин суу жыйноочу жай суу менен толтурулат, анын температурасы $T_1 = +80^\circ\text{C}$. Тереңдикте $L = 30$ м түбөлүк мөңгү бар, анын температурасы $T_2 = -20^\circ\text{C}$. Маселе төмөнкүлөрдү аныктоону талап кылат: эрүү процесси кайсы убакта токтойт жана туруктуу абалга өтөт, ошондой эле ошол убакыт ичинде мөңгүлүк жердин максималдуу эрүү тереңдигин аныктоо. Бул маселени чечүү үчүн, (3.5) катардын шарты боюнча тактык 0.0003 деп алынган жана мүчөлөрдүн саны $n = 25$ экендиги аныкталды. Баштапкы шарт үч чекиттеги температуранын берилген маанилери менен бир параболаанын бир тармагы аркылуу жакындатылды: $\varphi(x) = 0.036859737x^2 - 1.2391325435x + 2$ Аналитикалык чечимдин негизинде жасалган эсептөө натыйжалары 3.1 сүрөттөрүндө көрсөтүлгөн. 3.1 а) сүрөтүндө эрүү процесси дагы туруктуу абалга өтө электиги көрсөтүлгөн, бул үчүн 3.5 жыл убакыт талап кылынган жана бул убакыт ичинде эрүү процессинин тереңдиги 15 метрге жеткен.



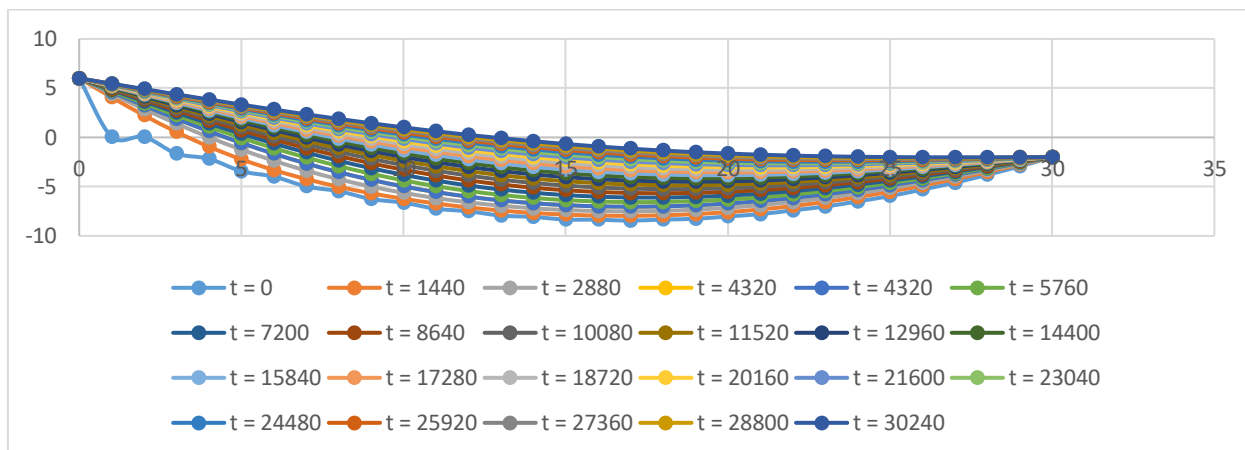
Сүрөт

3.1

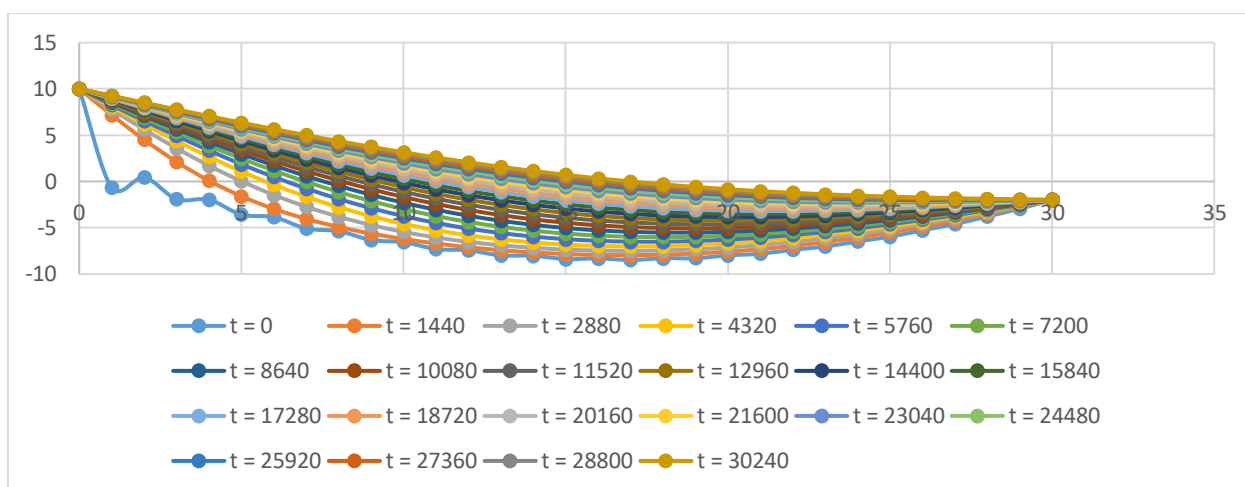


Сүрөт. 3.2 Суу жыйноочу жай түбүндөгү жердин температурасын ар кандай убакыт мезгилдеринде көрсөтүү. Графиктен (Сүр. 3.2, б)) көрүнүп тургандай, кум ташы үчүн жылуулук өткөрүү 70080 сааттан кийин туруктуу абалга келет, бул болжол менен 8.06 жылга тете. Бул убакыттын ичинде эрүү процессинин тереңдиги 23.2 метрге жетет. Бул нерсе туруктуу эмес процесстин 8.06 жылдан кийин туруктуу процесс болуп өтөөрүн жана андан кийин өзгөрбөй турганын көрсөтөт, бул физикалык процесстин касиеттерине дал келет.

Андан кийин жердин эрүү тереңдигине суунун температурасы кандай таасир эткенин аныктоого жардам берген сандык анализдер келтирилген. 3.2 сүрөттө суунун температурасы $+60^{\circ}\text{C}$ болгон учурда эсептөө натыйжалары көрсөтүлгөн. 3.3 сүрөттө суу температурасы $+100^{\circ}\text{C}$ болгон учурда эсептөө натыйжалары берилген. Эсептөө натыйжаларынан көрүнүп тургандай, 30240 саатка же болжол менен 3.5 жылга тең убакыт ичинде суу температурасы $+60^{\circ}\text{C}$ болгондо эрүү процессинин тереңдиги 13 метрге жетет, $+80^{\circ}\text{C}$ болгондо 15 метрге, ал эми $+100^{\circ}\text{C}$ болгондо 17 метрге жетет. Мындан көрүнүп тургандай, суу температурасынын эки градуска өзгөрүүсү 3.5 жыл ичинде эрүү процессинин тереңдигин 2 метрге өзгөртөт.



Сүрөт 3.3 Ар кандай убакыт мезгилдериндеги тереңдик боюнча температуранын маанилери



Сүрөт. 3.4 Ар кандай убакыт мезгилдериндеги тереңдик боюнча температуранын маанилери

Кийинки маселе мөңгүлүк жердин эритилиши процесси боюнча чектик шарттын өзгөрүүсүнүн таасирин карайт. Төмөнкү чекте жылуулук алмашуу шарты коюлат, башкача айтканда, түбөлүк мөңгүдөн тараптан келген суу муздатуучу агымдын мүнөздөгөн үчүнчү түрдөгү чектик шарт коюлат.

Тапшырма 3.2. Мындай маселени чечүүнүн математикалык модели төмөнкүдөй көрүнөт:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (3.2.1)$$

$$\begin{cases} T(0, t) = g_1(t) \\ T_x(L, t) + hT(L, t) = g_2(t) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

$T(x, 0) = \varphi(x)$, мында $\mathbf{g}_1(\mathbf{t})$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{t})$ — аймактын учундагы температуранын берилген маанилери. Аналитикалык чыгарылыш мурунку учурдагыдай эки кошулуучулардан түзүлөт.

$$T(x, t) = S(x, t) + U(x, t) = A(t) \left(1 - \frac{x}{L}\right) + B(t) \left(\frac{x}{L}\right) + U(x, t), \quad (3.2.3)$$

мында $\mathbf{A}(\mathbf{t})$, $\mathbf{B}(\mathbf{t})$ чектик шарттардан алынат. $A(t) = T_b$, $B(t) = \frac{T_b + LhT_{\text{гp}}^M}{Lh+1}$ (3.2.4)

.Белгисиз кошулуучу $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ бир тектүү чектик шарттары менен бир тектүү эмес теңдеменин чыгарылышы катары

$$U_t(x, t) = a^2 U_{xx} - S_t(x, t) \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} U(0, t) &= 0, \\ U_x(L, t) + hU(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

баштапкы шарт түрүндө

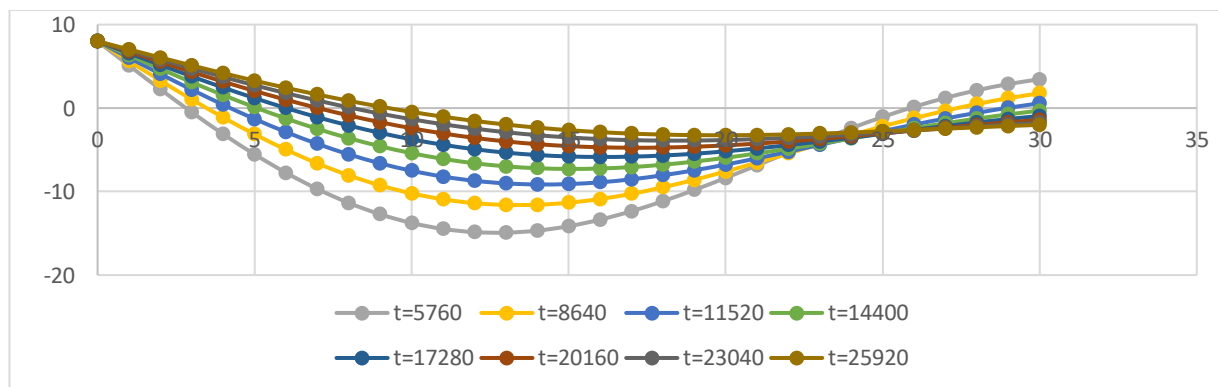
$$U(x, 0) = \varphi(x) - S(x, 0) = ax^2 + bx + c - T_b \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \frac{T_b + LhT_{\text{гp}}}{Lh+1} \left(\frac{x}{L}\right) \quad (3.2.7)$$

Математикалык модельдин (2.11) – (2.13) аналитикалык чыгарылышы төмөнкүдөй көрүнүшкө ээ: $U(x, t) = \sum_i^n b_i e^{-\lambda_i^2 a^2 t} \sin(\lambda_i x)$, мында λ_i -трансценденттик теңдеменин чыгарылышы катары аныкталат. $\text{tg}(L * \lambda_i) = -\frac{\lambda_i}{h}$, (3.2.8)

Жалпы аналитикалык чыгарылыш төмөнкүдөй болот:

$$T(x, t) = T_b \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{T_b + LhT_{\text{гp}}}{Lh+1} \left(\frac{x}{L}\right) + \sum_i^n b_i e^{-\lambda_i^2 a^2 t} \sin(\lambda_i x) \quad (3.2.9)$$

Эсептөөлөрдүн жыйынтыгы качан суу жыйноочу жай суу температурасы $+10^\circ\text{C}$ ка барабар болгондогу эсептөөнү эске алганда жылуулук алмашуунун төмөнкү чеги 2.6 сүрөттө көрсөтүлгөн



Сүрөт 3.5 Ар кандай убакыт мезгилдериндеги жердин температурасынын маанилери, эгерде төмөнкү чектеги үчүнчү түрдөгү чектик шарт кабыл алынган болсо. Натыйжалардын тактыгы, түбөлүк мөңгүдөн тараптан келген суу муздатуучу агымдын так маанисин берүү тактыгына көз каранды. Жылуулук алмашуу коэффициентинин так маанисин билбөө, жакындан сапаттуу натыйжаларды алууга мүмкүндүк берет. Графиктен көрүнүп тургандай, төмөнкү чектеги суу муздатуучу агымды эске алуу мөңгүлүк жердин эритилиши процесси боюнча чоң таасир тийгизет. Графиктен 25920 сааттын же 3 жылдын ичинде эрүү тереңдиги 10 метрге жеткенин байкоого болот. Эгерде ушул эле маселе

төмөнкү чектеги температурасы -20°C деп кабыл алынган жана жылуулук алмашуу эске алынбаган учурда чечилсе, 25920 сааттын же 3 жылдын ичинде эрүү тереңдиги 15 метрге жакындаган. Демек, түбөлүк мөңгүдөн келген муздатуучу агымды эске алуу мөңгүлүк жердин эритилиш тереңдигине чоң таасир тийгизет, башкача айтканда, эрүү процессинин тереңдиги кескин кыскарып, туруктуу эмес процесс түзүлүү убактысы да кыскарган. Төмөнкү чектеги жылуулук алмашуу коэффициентинин так эмес мааниси жакындан алынган натыйжаларды алып келет. Ошондуктан, чыныгы эсептөөлөрдө, жердин температурасынын так мааниси өлчөнүшү мүмкүн болгондуктан, төмөнкү чектеги биринчи түрдөгү чектик шартты колдонуу сунушталат.

Тапшырма 3.3. Суу калдыгынын түбүндөгү мөңгүлүк жердин эритилиши процесси, жердин суусуз аймагында жердин каркасындагы жылуулук алмашууну эске алуу менен, ал эми мөңгүлүк аймакта жылуулук алмашуу эске алынбайт. Мындай процесс үчүн математикалык модель төмөнкүчө көрүнөт:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta T(x, t), \quad (3.15)$$

мында β – жылуулук алмашуу коэффициенти.

Талаа жеринин аймагында, бул жерде $T(x, t) \geq 0$, $\beta \neq 0$, ал эми мөңгүлүк жеринин аймагында, бул жерде $T(x, t) < 0$, $\beta = 0$. Чектик шарттар төмөнкүдөй көрүнүшкө ээ: $T(0, t) = T_1$;

$$T(L, t) = T_2; \quad (3.3.1)$$

Бул процесс үчүн баштапкы шарт мурунку тапшырманын вариантындагыдай кабыл алынат. $T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c$; (3.3.2)

Бул математикалык моделдин аналитикалык чыгарылышы мурунку учурлардагыдай түзүлөт.

$$T(x, t) = S(x) + \omega(x, t); \quad (3.3.4)$$

мында $S(x) = (T_2 - T_1) x/L + T_1$ — стационардык чыгарылыш, ал бир тектүү эмес чектик шарттарга (3.18) жооп берет. $\omega(x, t)$ — туруктуу эмес чыгарылыш. Ал төмөнкүдөй баштапкы - чектик маселе катары чечилет.

$$\omega_t = \alpha^2 \omega_{xx} - \beta(S(x) + \omega(x, t)) \quad (3.3.5)$$

$$\omega(0, t) = 0, \quad \omega(L, t) = 0 \quad (3.3.6)$$

$$\omega(x, 0) = ax^2 + bx + c - S(x) \quad (3.3.7)$$

Берилген тапшырманын чыгарылышы төмөнкүдөй түрдө көрсөтүлөт:

$$\omega(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{\pi n}{L} x, \quad (3.3.8)$$

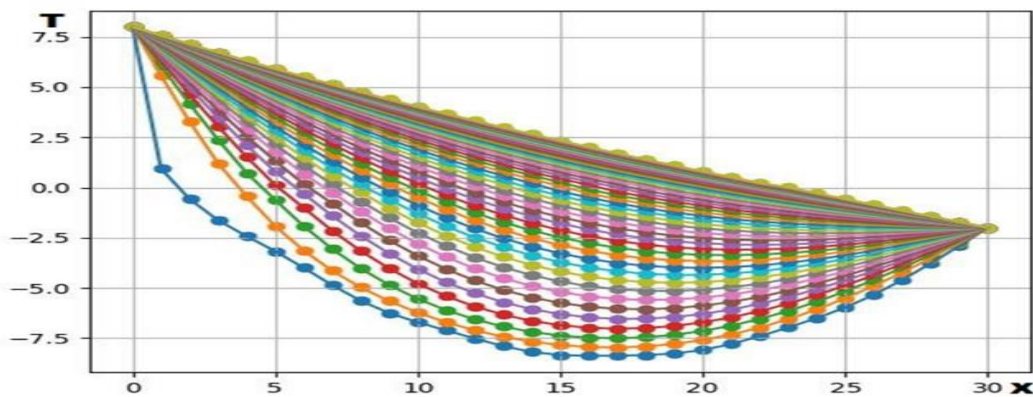
мында $b_n(t)$ — белгисиз коэффициенттердин катары. Ал стационардык чыгарылыштын Фурье катарында жайгаштыруу жолу менен табылат. Баштапкы шартка (3.21) жооп берип, жалпы аналитикалык чыгарылыш (3.3.9) - (3.21) алынат.

$$T(x, t) = S(x) + \omega(x, t) = \left[(T_2 - T_1) \frac{L}{L} + T_1 = T_2 \right] + \sum_{i=1}^n \left[-\frac{2\beta}{\pi n} \frac{(T_1 - T_2(-1)^n)}{(\beta + (\frac{\pi n}{L})^2)} + (A_i + C_i e^{(\frac{\pi i}{L} \alpha)^2 + \beta} t) \right] \sin \frac{\pi i}{L} x;$$

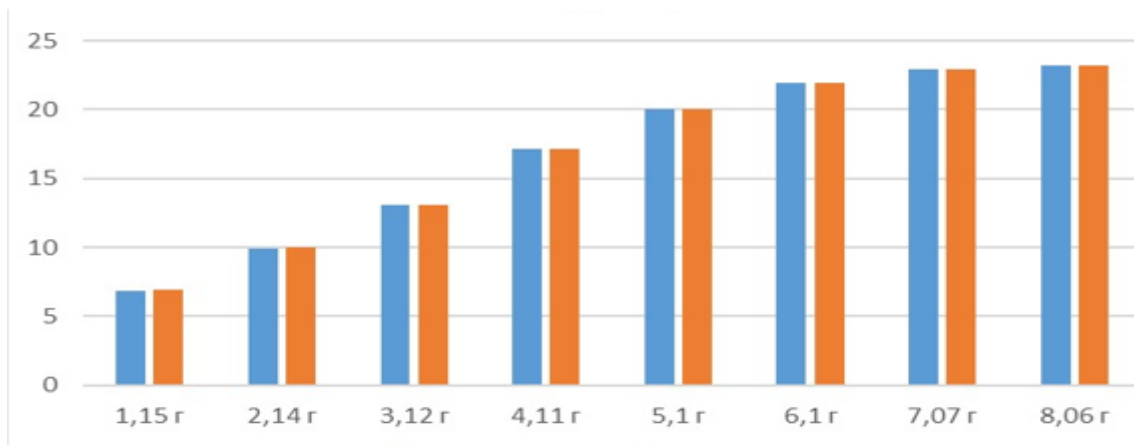
$$A_i = 2\beta(T_1 + 2.0)(-1)^i / ((\pi i / L)^3 (T_2 - T_1) + \beta),$$

$$C_i = (-2aL^2 - 2L(b - (T_2 - T_1))) / (\pi i(-1)^i + 4aL^2(\pi i)). \quad (3.3.9)$$

Сүрөт 2.7 Бул жерде аналитикалык чечим менен алынган мурдагы мисалдын натыйжалары көрсөтүлгөн, бул моделдин (3.3.8) жылуулук алмашуусун эске алат, бул жерде талаа жериндеги жылуулук алмашуу эске алынат. Жылуулук алмашуу коэффициенти өтө кичине (0.0000043) кабыл алынган, анткени узак мөөнөттүү процесс учурунда жердин жана суунун температурасы дээрлик теңешет. Бул учурда, жылуулук алмашуу болбойт, анткени эки орточо ортодо температуралар бирдей болот. Графиктен көрүнүп тургандай, баштапкы шартка (3.3.3) жана суу температурасы +80°C болгондо жылуулук алмашууну эске алуу менен, эрүү процессинин туруктуу эмес абалдан туруктуу абалга өтүшү 70080 сааттын же 8.06 жылдын ичинде болуп, эрүү тереңдиги 23.20 метрге жетет.



Сүрөт 3.6 Температуранын өзгөрүүсү тең салмактуу абалга жеткенге чейин 3.5 сүрөттө математикалык моделдин жылуулук алмашууну эске алуу жана эске албоо шарттарында нөлдүк изотерманын ордун сандык салыштыруусу көрсөтүлгөн. Ал нөлдүк температура маалында трансценденттик теңдеме (3.22) аркылуу табылат. Графиктен көрүнүп тургандай, нөлдүк изотерманын орду бара-бара тең салмактуу абалга келип, өзгөрүүсүз бойдон 8.06 жылдан кийин кала берет, эгерде суу сактагычтагы суунун температурасы +80°C болсо жана топурак кум ташы болуп саналса.



Сүрөт 3.7

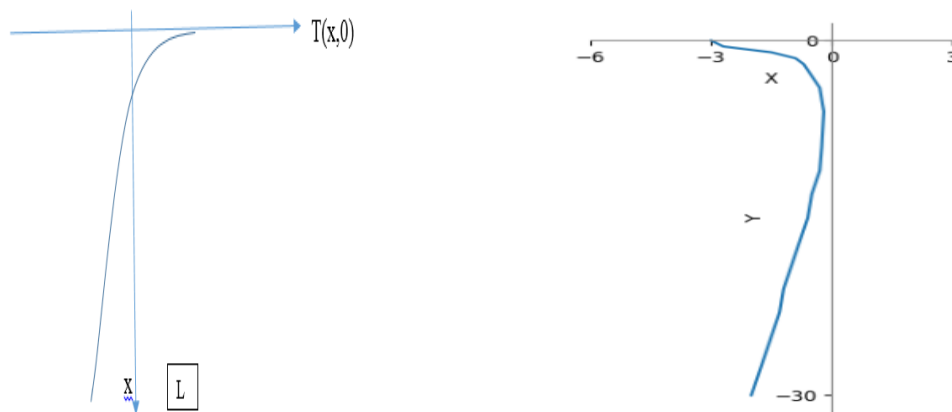
Нөлдүк изотерманын орду жылуулук алмашууну эске алуу жана эске албоо шартында

Мындан көрүнүп тургандай, түбөлүк тоң жерлерде жылуулуктун өтүшүн узак мөөнөткө божомолдогондо, топурак менен ээриген суунун ортосундагы жылуулук алмашууну эске албоого болот, анткени алардын температуралары теңелет. Мындай учурларда жылуулук алмашуу коэффициентинин мааниси өтө аз болуп, математикалык моделдеги (3.15) – (3.17) жылуулук алмашууну мүнөздөгөн мүчөнүн таасирин эске албоого мүмкүн болот. Ошондуктан, түбөлүк тоң жерлерде жылуулуктун өтүшүн узак мөөнөткө божомолдогондо, жылуулук алмашуу параметри жок жөнөкөйлөтүлгөн математикалык модель (3.1) – (3.3) колдонулушу мүмкүн.

Тапшырма 3.4.

Бул жерде мөңгүлүү топурактын ээришинин тереңдигине баштапкы шарттын таасиринин бар же жок экендигин аныктоо үчүн математикалык моделдин аналитикалык чечиминин негизинде сандык эксперимент жүргүзүлөт. Бул суу сактагычтагы суунун температурасынын таасири алдында мөңгүлүү топурактын ээриш тереңдигин узак мөөнөттүү божомолдоо жыйынтыктарын талдоо аркылуу ишке ашат. Математикалык жактан бул баштапкы шарттарды түзүү аркылуу аткарылат, алар курулуш объектилерин эксплуатациялоого чейин чөйрөнүн баштапкы абалын мүнөздөп, кыш мезгилин, эрте жазды жана жазды чагылдырат. Ар кандай баштапкы шарттардын схемалык көрүнүшү 3.7 сүрөттө көрсөтүлгөн. Сүрөт 3.6. Нөлдүк изотерманын абалы жылуулук алмашуусуз жана жылуулук алмашуу

менен



Сүрөт 3.8 Баштапкы шарттардын түрлөрү

Жаз мезгили үчүн топурактын баштапкы абалы төмөнкүчө кабыл алынган:

Күндүзгү бети $+20^{\circ}\text{C}$, нөлдүк температура тереңдиги 1.7 м, түбөлүк тоң 30 м тереңдиктен башталып, бул чекиттеги температура -20°C . Кыш мезгили үчүн топурактын баштапкы температурасы күндүзгү бетинде -30°C деп алынган. Топурактын негизин түзгөн катмар кумдук болуп, анын температура өткөрүмдүүлүк коэффициенти $0.00432 \text{ м}^2/\text{саат}$ деп алынган. Баштапкы шарттардын аналитикалык формулалары бир тармактуу парабола менен жакындатылып анын коэффициенттери эң кичине квадраттар ыкмасы менен аныкталган. Бул ыкма температура белгиленген 10 чекиттин негизинде колдонулган.

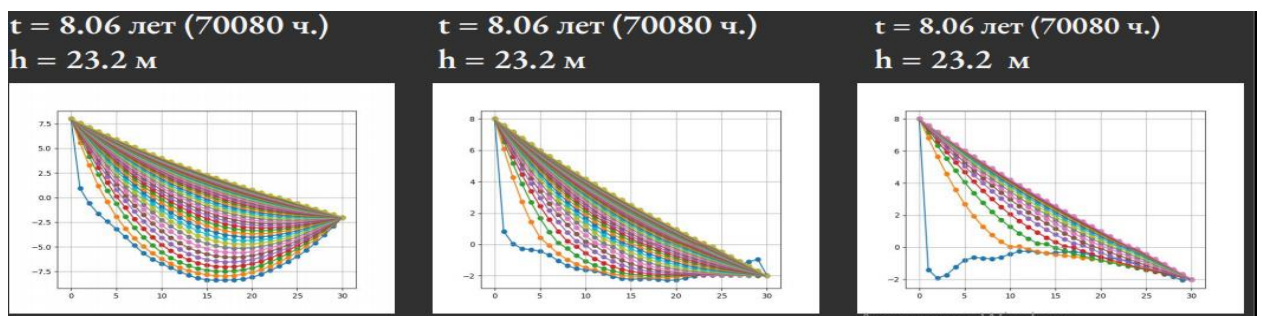
$$T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0.0369x^2 - 1.2392x + 2,0 \quad (3.4.1)$$

$$T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0.01033x^2 - 0.3682x + 2.0 \quad (3.4.2)$$

$$T(x, 0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = -0.0084x^2 - 0.2392x - 1.9762 \quad (3.4.3)$$

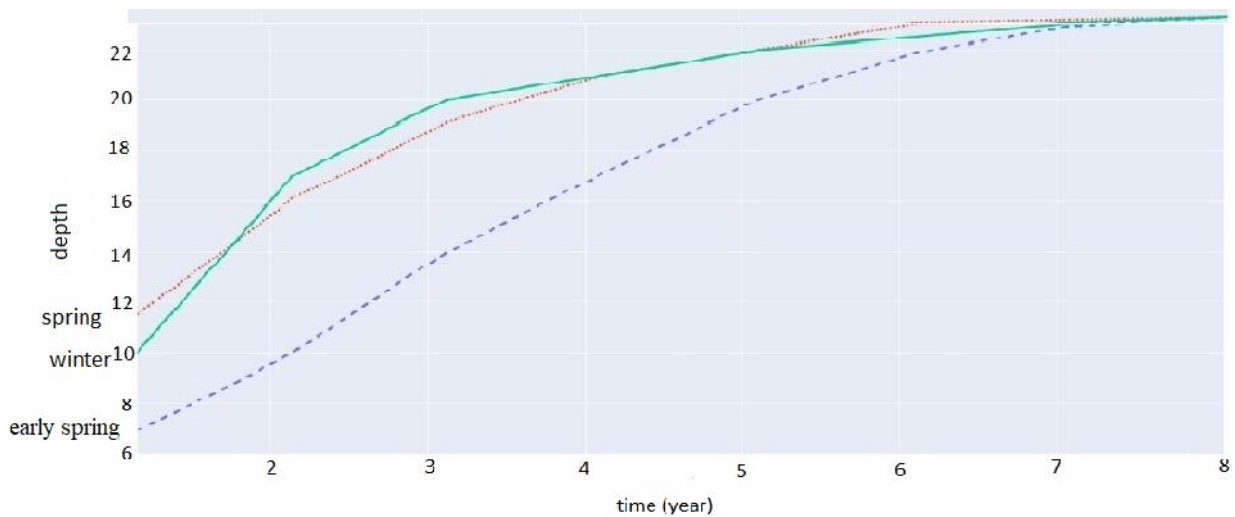
Суу сактагычтын түбүндөгү жылуулуктун өтүү процесси

Суу сактагычка $+80^{\circ}\text{C}$ температурадагы суу толтурулганда, анын түбүндөгү жылуулуктун өтүү процесси баиталат. Жогоруда баяндалган алгоритмге ылайык, бул аймакта туруктуу эмес жылуулук өткөрүү процесси орношконго чейин прогноздук эсептөөлөр жүргүзүлөт. Эсептөөнүн натыйжалары **3.8 сүрөттө** көрсөтүлгөн.



Сүрөт 3.9 Ар кандай баштапкы шарттар үчүн алдын-ала эсептөөлөрдүн натыйжалары

Эсептөөлөрдүн жыйынтыктары көрсөткөндөй, узак мөөнөттүү божомолдоодо баштапкы шарттардын түрүнө карабастан, туруктуу эмес процесс бир эле убакытта туруктуу (стационардык) процесске өтөт. Бул убакыт аралыгында ээрүү процессинин тереңдиги 23.2 мге жетет. Ал нөлдүк изотерманын орду аркылуу аныкталат жана трансценденттик теңдеменин чыгарылышы катары эсептелет. Мөңгүлүү топурактын ээриш фронтунун стационардык процесске чейин болгон кыймылы **3.9 сүрөттө** көрсөтүлгөн.



Сүрөт 3.10 Ээрүү тереңдиги ар кандай баштапкы шарттар үчүн

Графиктен көрүнүп тургандай, узак мөөнөттүү божомолдоодо ээрүү тереңдиги баштапкы шарттардын түрүнө көз каранды болбойт, ал суу сактагычтагы суунун температурасына байланыштуу болот. Ээрүү процесси 8.06 жылдан кийин туруктуу абалга өтөт, ал эми ээрүү тереңдиги $+80^{\circ}\text{C}$ температурадагы суу шартында 23.2 мге жетет. Бул жыйынтык **Галкин А. Ф., Курта И. В. (2020)** тарабынан алынган. Мындан, түбөлүк тоң шартында жайгашкан курулуштарды пайдаланууга киргизүү үчүн сөзсүз түрдө кыш мезгилин күтүүнүн зарылдыгы жок деген тыянак чыгарууга болот — бул каалаган ыңгайлуу убакта аткарылышы мүмкүн.

Тапшырма 3.5. Бул жерде мөңгүлүү топурактын ээрүү маселеси эки башка математикалык модель аркылуу чечилип, алынган жыйынтыктар салыштырылат. Анализдин негизинде эң ылайыктуу моделди тандоо сунушталат. Башында жылуулуктун өтүү модели талдоо жүргүзүлөт, анда ээрүү процесси жана мөңгүлүү топурак зоналары өз-өзүнчө каралат, ошондой эле бул эки зона ортосундагы фазалык өтүүлөр эске алынат. Ээриш фронтунун кыймылы, ээригич жана мөңгүлүү топурактын жылуулук агымдарынын айырмасынын шарты аркылуу аныкталат. Бул маселе **Стефан маселеси** катары чечилет.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_T}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq h \\ \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \leq x \leq L \end{aligned} \right\} \quad (3.5.1)$$

$$\text{баштапкы } t = 0; \quad x \in [0, h]; \quad T_T = f_1(x), \quad x \in [h, L], \quad T_M = f_2(x). \quad (3.5.2)$$

чектелген шарттар менен:

$$\begin{aligned} x=0, \quad T_T &= T_b, \\ x=h, \quad T_T &= T_M = T_0 \\ x=L, \quad T_M &= T_1. \end{aligned} \quad (3.5.3) \text{ Бул жерде: } T_b \text{ — суу сактагычтагы суунун}$$

температурасы, T_0 — мөңгүлүү топурактын ээрүү температурасы, T_1 — түбөлүк тоңдун температурасы. Мөңгүлүү жана ээригич топурактын чектеш аймагындагы жылуулук алмашуунун шарты **Стефан теңдемеси** менен берилет:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x} \right]_{x=h} = q_0 w \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.5.4)$$

Бул жерде:

T_T, T_M -баштапкы-четки шарттар маселесинин (3.5.1)-(3.5.3) аналитикалык чечими, $a_T, a_M, \lambda_T, \lambda_M$ — ээригич жана мөңгүлүү топурактын температура өткөрүмдүүлүк коэффициенттери: h — ээрүү тереңдиги, w — топурактагы муздун көлөмү, q_0 — муздун эрүү жылуулугу. Ар бир зонадагы баштапкы шарттар мурунку маселелердегидей аналитикалык түрдө **бир тармактуу парабола** катары кабыл алынат (3). **Математикалык моделдин аналитикалык чечими** ээригич жана мөңгүлүү топурак зоналары үчүн мурунку маселелердегидей курулат жана төмөнкүдөй көрүнүшкө ээ:

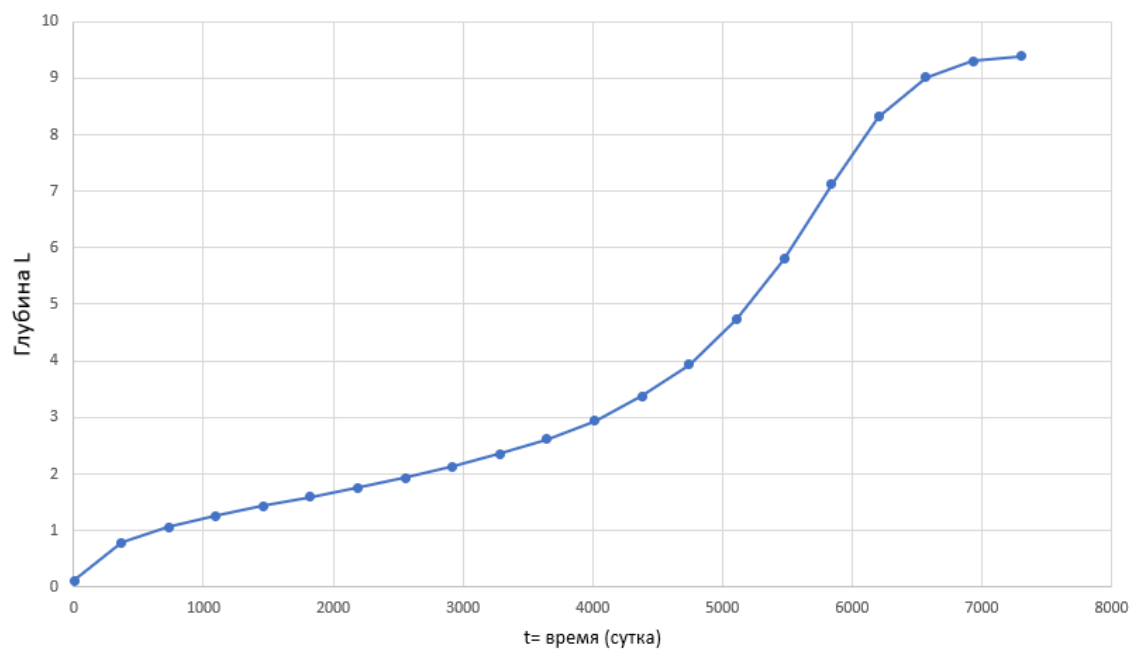
$$T_m(x, t) = \frac{8}{h}x + 8 + \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-\left(\frac{\pi n \alpha}{L}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{L} x,$$

$$T_M(x, t) = \frac{2}{L-h}x + \frac{2h}{L-h} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-\left(\frac{\pi n \alpha}{L}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{L} x,$$

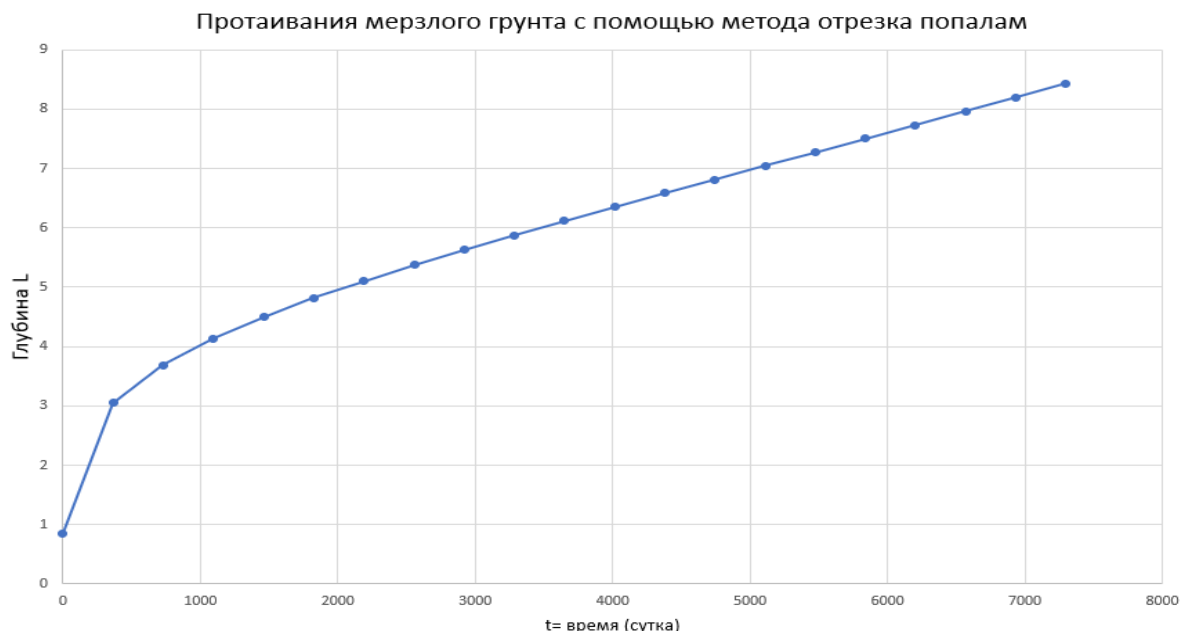
D_n — Фурье катарындагы ажыратуу коэффициенттери. Ээрүү тереңдиги мөңгүлүү топурактын ээрүү фронтунун кыймылын сүрөттөгөн **Стефан теңдемесинин** (3.5.4) негизинде аныкталат. Бул дифференциалдык теңдемени **Рунге-Кутта ыкмасынын** төртүнчү тартиби аркылуу сандык түрдө чечүүгө болот. Мөңгүлүү жана ээритилген топурак катары топурактын физика-механикалык мүнөздөмөлөрү $a_{T=} = 0.003024 \text{ м}^2/\text{сут.}$, $a_M = 0.01296 \text{ м}^2/\text{сут.}$ Стефан теңдемеси боюнча эсептөөлөрдүн жыйынтыктары. Графикте көрсөтүлгөндөй, тоңгон топурак үчүн ээрүү процесси 7300 сутка же 20.2 жыл өткөндөн кийин туруктуу абалга өтөт. Ээрүү тереңдиги: 9.46 м. Андан кийин, маселе башка математикалык модел (3.5.1)-(3.5.3) аркылуу чечилген. Бул моделде ээрүү тереңдиги нөлдүк изотерманын жайгашуусу аркылуу аныкталган. Жыйынтыктар график түрүндө 3.10 сүрөттө да берилген.

h_M

График протаивания грунта с методом Стефана



Сүрөт 3.11 Стефандын теңдемесинин чыгарылышы катары ээрүү тереңдиги



Сүрөт 3.12

Эрүү тереңдиги нөлдүк изотерманын жайгашуусу катары

Графиктен көрүнүп тургандай, эрүү процесси 7300 күндөн кийин стационардык абалга өтөт. Эки моделдин эсептөө натыйжалары болжол менен бирдей натыйжаларды көрсөтөт. Натыйжалардагы айырма муздун көлөмү, муздун эрүү жылуулугу жана жылуулук өткөрүү коэффициенти сыяктуу кириш параметрлеринин так эместиги менен түшүндүрүлөт. Ар кандай математикалык моделдер менен бир маселенин алынган чечимдерин талдоонун жыйынтыгы боюнча төмөндөгү сунуш формулировкаланган.

Жылуулук өткөргүч моделди колдонуу ыңгайлуу, анткени баштапкы маалыматтар катары чек ара жана баштапкы шарттардан тышкары, жылуулуктун диффузиялык коэффициенти гана колдонулат. Математикалык моделде канчалык көп параметр камтылса, аларды эксперименталдык жол менен аныктоодо белгисиздиктен же олуттуу катадан улам аны ишке ашыруу ошончолук кыйын болоору белгилүү.

КОРУТУНДУ

Диссертациялык иштин негизги натыйжалары болуп төмөнкүлөр саналат:

1. Бир өлчөмдүү математикалык моделди ишке ашыруу үчүн аналитикалык-сандык ыкма сунушталды..
2. Аналитикалык-сандык ыкманын негизинде суу сактагычтан сууну чыпкалоону эсепке алуу менен кыртыштын температурасын, жылуулук диффузиялык коэффициенттерин, жылуулук өткөрүүнү жана эрүү тереңдигин аныктоо методикасы.

3. Эрүү процессинин стационардык режимине өтүү убактысын жана суу сактагычтагы суунун берилген температурасында тоңгон кыртыштын эритүүнүн максималдуу тереңдигин аныктоо.
4. Узак мөөнөттүү болжолдоо үчүн сандык анализдин негизинде баштапкы шарт эрүүнүн максималдуу тереңдигине таасир этпей турганын белгилөө.
5. Бир маселе боюнча эки түрдүү математикалык моделдин жыйынтыктарын талдоонун негизинде жөнөкөйүрөөк математикалык моделди тандоо сунушу киргизилет

ДИССЕРТАЦИЯЛЫК ИШТИН ТЕМАСЫ БОЮНЧА ЖАРЫЯЛАНГАН ЭМГЕКТЕРДИН ТИЗМЕСИ

1. Душенова У.Дж. Инфильтрация атмосферных осадков по наклонному склону /Джаманбаев М.Дж., Омуралиев С.Б // Известия КГТУ им. И. Раззакова №26, г. Бишкек, 2010. -С.205-208. <https://elibrary.ru/item.asp?id=27165604>
2. Душенова У.Дж.. Определение глубины таяния мерзлого грунта под основанием пруда хвостохранилища/ Джаманбаев М.Дж., Турсункулова З.С.// Известия КГТУ им. И. Раззакова №29, г. Бишкек, 2013. -С. 239-242. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29214773>

3. Душенова У.Дж. Методика определения температуры, коэффициентов теплообмена грунта. / Джаманбаев М.Дж., Турсункулова З.С.// Известия КГТУ им. И. Раззакова №29, г. Бишкек, 2013. -С.242-246. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29214774>
4. Душенова У.Дж. Определение глубины таяния мерзлого грунта под основанием пруда водохранилища. /Джаманбаев М.Дж., Турсункулова З.С.// Материалы научной конференции «Научные основы стратегии развития АПК и сельских территорий в условиях ВТО ВолгГау. г.Волгоград, 2014. -С. 328-331. <https://elibrary.ru/item.asp?id=25566503>
5. Душенова У.Дж. Влияние уровня воды на величину фильтрационного расхода и на процесс таяния под основанием водоема/ Известия КГТУ им. И. Раззакова, № 31. г.Бишкек, 2015. -С. 198-201. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26455471>
6. Душенова У.Дж. Определение дальности смещения оползневой массы/ Джаманбаев М.Дж., Омуралиев С.Б.// Известия КГТУ им. И. Раззакова, №4(48) г.Бишкек, 2018. - С.173-179. <https://elibrary.ru/item.asp?id=37167828>
7. Душенова У.Дж. Оценка степени влияния природных факторов на промерзание грунта/ Джаманбаев М.Дж., Шекеев К.Р./ Известия КГТУ им.И.Раззакова №50, г. Бишкек, 2019.-С. 163-168. <https://elibrary.ru/item.asp?id=39537304>
8. Душенова У.Дж. Вероятностно-статистический анализ бытового потребления электроэнергии города Каракол./ Асанов А.К., Асиев А.Т.// Журнал “Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана” №6, г. Бишкек, 2022. -С.19-24 <https://elibrary.ru/item.asp?id=49830020>
9. Душенова У.Дж. Определение периода (времени) не установившейся части процесса переноса тепла в мерзлых грунтах под влиянием заданной температуры. / Джаманбаев М.Дж.// Журнал Научные исследования в Кыргызской Республике №1, г.Бишкек,2023. -С.19-24 <https://elibrary.ru/item.asp?id=61182954>
10. Душенова У.Дж. Аналитико-численное решение задачи протаивания мерзлого грунта с учетом теплообмена и изменения начального условия./ Джаманбаев М.Дж., Кыштобаева Г.К.// Сборник статей “Перспективные задачи инженерной науки”. -г. Москва, 2023. - С. 52- 57 <https://elibrary.ru/item.asp?id=50742458>
11. Dushenova U. Analytical and numerical solution of the problem of thawing of frozen soil taking into account heat exchange and changes in the initial condition/Dzhamanbaev M., Kyzy, Nargiza Bazarkul., Tologonova A. //Conference Proceedings Scientific Conference on Modern Problems of Applied Science and Engineering, MPASE -Samarkand 2024. <https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85212131911&origin=resultslist&sort=plf-f&src=s&sot=b&sdt=b&s=TITLE-ABS-KEY%28Analytical-numerical+method+for+solving+transport+processes+problems+based+on+the+finite+element+method+concept%29&sessionSearchId=8412cefe4d42c6bfaaeaa16fa1e3937e>

Дүйшөнова Умут Жумаказыевнанын 01.02.05 – суюктук, газ жана плазма механикасы адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты илимий даражасын алуу үчүн “Жылуулук берүү маселелерин аналитикалык жана сандык чечүү” темасында диссертациясынын РЕЗЮМЕСИ

Душенова Умут Джумаказыловнанын «Жылуулук өткөрүү маселелерин чечүүдө аналитикалык жана сандык ыкмаларды колдонуу» темасындагы диссертациясы физика-математика илимдеринин кандидаты даражасын алуу үчүн 01.02.05 – суюктуктардын, газдардын жана плазманын механикасы адистиги боюнча сунушталган.

Негизги сөздөр: Температура өткөрүмдүүлүгүнүн коэффициенти; жылуулук өткөрүмдүүлүк; тондурулган топурак; эритүү фронту; температура, температуралык режим, түбөлүк тондуруу; эритүү тереңдиги, таштанды сактагыч, топурак, таштанды сактагычтын негизине таянып эритүү.

Изилдөөнүн объектиси – түбөлүк тондуруу шарттарында жайгашкан таштанды сактагычтын негизиндеги тондурулган топурактын эритүү процесси. Изилдөөнүн предмети – климаттык жана техникалык факторлордун таасири астында топуракта жылуулук өткөрүлүшү боюнча математикалык моделдерди аналитикалык чечүү жана талдоо.

Диссертациянын максаты – жылуулук өткөрүлүшүн куруу үчүн эффективдүү ыкманы түзүү жана сандык талдоонун негизинде чечимдерди түзүп, адистерге, инженерлерге жана тиешелүү уюмдарга сунуштар, сунуштар жана кеңештерди түзүү.

Изилдөө ыкмалары: диссертациялык жумушта философиялык, жалпы илимий, теориялык жана атайын ыкмалар (сандык моделдөө, көп фактордуу талдоо) колдонулган.

Илимий жаңылыктар:

Жылуулук өткөрүү маселелерин чечүү үчүн сандык-аналитикалык ыкма иштелип чыккан, ал ЧЭК(Чектелген элементтер ыкмасы) ыкмасына негизделген. Топурактагы температура өлчөөлөрүн колдонуп, жылуулук өткөрүмдүүлүгүнүн коэффициентин аныктоо жана эритүү тереңдигин аныктоо методикасы сунушталган;

- Таштанды сактагычтын негизинде тондурулган топурактын эритүү моделине аналитикалык чечим курулуп, стационардык режимге өтүү убактысы жана эритүү тереңдиги аныкталган;
- Баштапкы шарттардын узак мөөнөттүү болжолдоо учурунда эритүү тереңдигине таасир этпеши тууралуу жыйынтык чыгарылган;
- Тондурулган топурактын эритүү процесси боюнча ар кандай математикалык моделдердин аналитикалык чечимдери талданып, модель тандоодо сунуштар берилген.

Колдонуу чөйрөсү:

Алынган илимий принциптер, жыйынтыктар жана иштелип чыккан методикалар практикалык жана теориялык мааниге ээ жана бул илим тармагындагы кийинки изилдөөлөр үчүн жалпы теориялык жана практикалык деңгээлде кызмат кыла алат. Чыгарылган жыйынтыктар жана сунуштар нормативдик документтерде жана тиешелүү ишканалардын долбоорлоо иштеринде колдонулушу мүмкүн.

РЕЗЮМЕ

Диссертационной работы Душеновой Умут Джумаказыловны
на тему: «Аналитико-численное решение задач теплопереноса» на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.05 – «Механика жидкости,
газа и плазмы»

Ключевые слова: Коэффициент температуропроводности, теплопроводность, мерзлый грунт, фронт таяния, температура, температурный режим, вечная мерзлота, глубина протаивания, хвостохранилище, грунт, основание хвостохранилища.

Объект исследования процесс таяния мерзлого грунта под основанием хвостохранилища, расположенная в условиях вечной мерзлоты.

Предметом исследования является Построение и анализ аналитических решений математических моделей процесса переноса тепла в грунте под влиянием климатических и техногенных факторов.

Целью исследования является создание эффективного метода к построению теплопереноса и на основе численного анализа решений, формировать выводы, предложения, рекомендации специалистам, инженерам и соответствующим организациям.

Методы исследования: в диссертационной работе использовались философские, общенаучные, теоретические, специальные (численное моделирование, многофакторный анализ).

Научная новизна полученных результатов работы исследования разработан численно аналитический подход к решению задач теплопереноса, основанный на идее МКЭ;

- предложена методика определение глубины таяния и идентификации коэффициента температуропроводности, как решение математической модели теплопереноса с использованием данных наблюдений температуры грунта;
- построение аналитического решение математической модели таяние мерзлого грунта под основанием хвостохранилища и определение времени перехода к стационарному режиму и глубину таяние за это время;
- вывод о не влиянии начального условия на глубину таяние при долгосрочном прогнозе на основе численного эксперимента;
- анализ аналитических решений разных математических моделей процесса таяние мерзлого грунта и рекомендация выбора математической модели;

Область применения: научные положения, полученные результаты и разработанные методики имеют практическое и теоретическое значение, и могут служить для дальнейших исследований в данной области науки на общетеоретическом и практическом уровнях, сформулированные выводы и предложения могут быть использованы в нормативной документации и проектной деятельности в соответствующих предприятиях.

SUMMARY

Dissertation by Umut Dzhumakazylovna Dushenova on the topic: "Analytical and numerical solution of heat transfer problems" for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in specialty 01.02.05 - fluid, gas and plasma mechanics

Keywords: Thermal diffusivity coefficient; thermal conductivity; frozen soil; melting front; temperature, temperature regime, permafrost; thawing depth, tailings storage facility, soil, tailings storage facility base.

The object of the study is the process of thawing of frozen soil under the base of the tailings storage facility, located in permafrost conditions. The subject of the study is the construction and analysis of analytical solutions of mathematical models of the process of heat transfer in the soil under the influence of climatic and man-made factors.

The purpose of the dissertation is to create an effective method for constructing heat transfer and, based on numerical analysis of solutions, to form conclusions, proposals, recommendations for specialists, engineers and relevant organizations. Research methods: philosophical, general scientific, theoretical, special (numerical modeling, multivariate analysis) methods were used in the dissertation.

Scientific novelty of the study: a numerical analytical approach to solving heat transfer problems based on the idea of FEM was developed;

- a technique was proposed for determining the depth of thawing and identifying the thermal diffusivity coefficient as a solution to a mathematical model of heat transfer using soil temperature observation data;

- constructing an analytical solution to a mathematical model of frozen soil thawing under the base of the tailings storage facility and determining the time of transition to a steady-state mode and the depth of thawing during this time;

- a conclusion about the lack of influence of the initial condition on the depth of thawing in a long-term forecast based on a numerical experiment;

- analysis of analytical solutions of different mathematical models of the process of thawing of frozen soil and a recommendation for choosing a mathematical model;

Scope: scientific provisions, obtained results and developed methods have practical and theoretical significance and can serve for further research in this field of science at the general theoretical and practical levels, the formulated conclusions and proposals can be used in regulatory documentation and project activities in the relevant enterprises.